

# 接力题典 1800

通关 高分 夺冠常备

策划◎文都考研数学命题研究组

编著◎汤家凤



题目册

基础篇: 第一轮复习使用, 掌握基础更牢

提高篇: 强化复习使用, 解题能力提升快

超值服务: 全书免费网络答疑

中国原子能出版社



图书在版编目(CIP)数据

考研数学接力题典 1800. 数学二 / 汤家凤编著. —  
北京: 中国原子能出版社, 2019. 1(2019. 4 重印)

ISBN 978-7-5022-7110-7

I. ①考… II. ①汤… III. ①高等数学-研究生-入  
学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 024850 号

考研数学接力题典 1800. 数学二

出版发行 中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100048)

责任编辑 王 青

特约编辑 何妍妍

印 刷 大厂回族自治县彩虹印刷有限公司

经 销 全国新华书店

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 31 字 数 774 千字

版 次 2019 年 1 月第 1 版 2019 年 4 月第 5 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5022-7110-7 定 价 72.00 元

网址: <http://www.aep.com.cn>

E-mail: [atomep123@126.com](mailto:atomep123@126.com)

发行电话: 010-68452845

版权所有 侵权必究

# 郑重声明

## 买正版图书 听精品课程

文都考研数学独家师资汤家凤老师编著的《考研数学接力题典1800. 数学一》《考研数学接力题典1800. 数学二》《考研数学接力题典1800. 数学三》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印汤家凤老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生的前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育将严厉追究其法律责任;
2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;
3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷。

全国各地举报电话:010-88820419,13488713672

电子邮箱:tousu@wendu.com

为方便考生使用考研数学系列正版图书,特提供网上增值服务,考生登录文都教育在线([www.wendu.com](http://www.wendu.com))可听取汤家凤老师的精品课程。

中国原子能出版社  
世纪文都教育科技集团股份有限公司  
授权律师:北京市安诺律师事务所

刘岩

2019年2月

# 前言

全国硕士研究生招生考试数学试卷分为数学一、数学二、数学三,其中数学一、数学三需要复习高等数学、线性代数、概率统计,数学二需要复习高等数学和线性代数。各试卷题型及分值分布一致,题型分选择题、填空题、解答题(包括计算题、证明题、应用题等),选择题8题,分值32分,填空题6题,分值24分,解答题94分。由于考研数学复习内容量大面广,需要考查考生对基本概念的理解,基本公式及基本原理的掌握,同时需要考生具有很强的计算能力、综合分析能力、逻辑推理能力、空间想象能力及实际应用能力。要牢固掌握基础知识并用所学知识融会贯通地解决问题,就需要进行系统的练习。那么拥有一本通过分层递进的习题训练达到基础知识的掌握和解题能力的提高,并能帮助同学们最终取得优异成绩的习题册就成为广大考研学子的迫切需求。

本书是作者在长达二十多年的考研数学授课、阅卷及对对新大纲深入研究的基础上,根据考研数学命题趋势及命题的重点、难点和考生的弱点,从广大考生的实际出发精心编写而成。

本书分基础篇、提高篇和精选试题,包括高等数学、线性代数。基础篇是针对基础复习阶段而设计的,注重对基本概念的理解,基本原理和基本方法的掌握,为复习打下坚实的基础;提高篇和精选试题适用于复习的强化阶段,注重基本概念的深化、原理的拓展,同时训练计算能力、综合分析能力、证明问题的能力、利用数学知识解决实际问题的能力。本书设计问题的难度和综合性比考试的要求略高,从这些年的使用情况看,达到了非常好的效果。

本书是针对数学二的考生编写,其主要特点有:

1. 每部分的题目都是严格依据最新考纲的规定,无论是题型还是知识点都是依据考研考试的要求设计。基础篇每部分融合了基本概念、基本原理、基本方法的考查点,知识覆盖面广,题型丰富、新颖。通过基础篇的系统练习,考生扎实掌握基础知识,对考纲和考试有清晰的认识,为强化复习打下扎实的基础。

2. 强化复习是取得数学高分非常关键的阶段,不仅强化课程非常关键,练习的设计也是非常重要的一环。本书的强化综合部分的练习侧重对考生的复杂计算能力、逻辑推理能力、综合分析能力和实际应用能力的训练。

3. 本书题目从题型的难度和综合性等方面都体现了整个数学的认知过程,各部分解答力求通俗易懂,方法独到,从最近这些年使用情况看基本达到了考试对知识点、题型和题目难易度考察的要求。

数学复习不同于其他课程的复习,大家复习时一定要动手早、重基础、循序渐进。基本阶段一定要先建立整个数学的知识框架和体系,然后做一些基础练习(基础知识考查所占分值比重较大,切不可好高骛远);强化阶段是数学复习脱胎换骨的阶段,通过进一步训练综合题型提高自己的各种数学能力,提高应试技巧和适应性,这是贯穿本书的设计理念。

本书从初次出版到现在的若干年中,受到全国广大学子的厚爱 and 同仁的支持,文都考研命题研究组的同仁做了大量有益的工作,在此表示由衷的感谢。

限于本人能力,书中不足之处难免,欢迎全国广大的学子和同仁不吝指正。

汤家凤

2019年2月于南京

# ○ 目录 (题目册)

## 上篇 基础篇

高等数学部分	3
一、函数、极限、连续	3
二、导数与微分	12
三、中值定理与一元函数微分学的应用	19
四、不定积分	24
五、定积分及应用	30
六、多元函数微分学	38
七、重积分	43
八、微分方程	47
线性代数部分	51
一、行列式	51
二、矩阵	52
三、向量	56
四、线性方程组	58
五、矩阵的特征值和特征向量	62
六、二次型	66

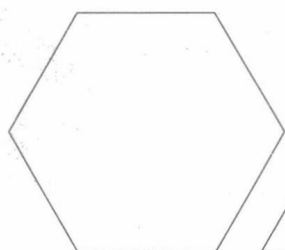
## 中篇 提高篇

高等数学部分	71
一、函数、极限、连续	71
二、一元函数微分学	76
三、一元函数积分学	84
四、多元函数微分学	90
五、重积分	92
六、微分方程	94

线性代数部分 .....	98
一、行列式 .....	98
二、矩阵 .....	99
三、向量 .....	101
四、线性方程组 .....	103
五、矩阵的特征值和特征向量 .....	106
六、二次型 .....	110

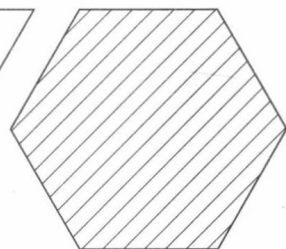
## 下篇 精选试题

高等数学部分 .....	113
一、函数、极限、连续 .....	113
二、一元函数微分学及应用 .....	117
三、一元函数积分学 .....	122
四、多元函数微分学 .....	126
五、重积分 .....	128
六、微分方程 .....	129
线性代数部分 .....	131
一、填空题 .....	131
二、选择题 .....	132
三、解答题 .....	134



[上篇]

基础篇





# 高等数学部分

## 一、函数、极限、连续

### ① 入门练习

#### ◆ 填空题

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{e^{2x} + 1}{2}\right)^{\sin 2x} - 1}{1 - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\ln(1+x)}}{x \arcsin 2x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + \sin x)^{\frac{1}{\tan x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} (2^x + x)^{\frac{1}{\arcsin 2x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{\ln(1+x)} \right]^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x-1} \cdot \sin \frac{2}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$8. \text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \sqrt{1+x \cos x} - \sqrt{1+\sin x} \sim ax^b, \text{ 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$10. \text{设 } f(x) = \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}, \text{ 则 } x=0 \text{ 为 } f(x) \text{ 的 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 间断点.}$$

$$11. \text{设 } f(x) = \begin{cases} \frac{3a \arctan x + b \sin 2x}{\ln(1+x)}, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}, & x < 0 \end{cases} \text{ 在点 } x=0 \text{ 处连续, 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$$

## ◆ 解答题

12. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x \sin x}{x^2 + x \cos \frac{1}{x}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x^2)^{\frac{1}{1 - \sqrt{1-x^2}}}$$

13. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$$

 14. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1 + x \sin 2x)^a - 1 \sim 1 - \cos x$ , 求  $a$ .

 15. 设  $a_0 > 0, a_{n+1} = \frac{2(1+a_n)}{2+a_n} (n=0, 1, 2, \dots)$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在, 并求之.

 16. 设  $f(x) = \frac{|\sin x|}{x^2 - \pi x} e^{\frac{1}{x-1}}$ , 求  $f(x)$  的间断点, 并对其进行分类.

 17. 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + e^{n(1-x)}}{2 + e^{n(1-x)}}$ , 求  $f(x)$  及其间断点, 并判断其类型.

## ② 基础练习

## ◆ 填空题

 1. 设  $f(x) = \sin x, f[\varphi(x)] = 1 - x^2$ , 则  $\varphi(x) =$  \_\_\_\_\_, 定义域为 \_\_\_\_\_.

 2. 设  $a > 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(b - \cos x) \sqrt{a + x^2}} = 1$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_.

 3. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sqrt{1 + x \arcsin x} - \sqrt{\cos x} \sim ax^2$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

 4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - \ln(1+x)}{x^2} =$  \_\_\_\_\_.

 5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{x^2 \ln(1+2x)}} =$  \_\_\_\_\_.

 6.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin 2x} =$  \_\_\_\_\_.

 7.  $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \tan \frac{\pi}{4} x =$  \_\_\_\_\_.

 8.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \pi x}{(x-1) \ln x} =$  \_\_\_\_\_.

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^2 - x^3 \sin \frac{1}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$ .
11.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x - \sin x)^{\frac{1}{x^2 \ln(1+x)}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos t \, dt}{\ln(1+x^2)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
13. 设  $a \neq \frac{1}{2}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[ \frac{n - 2na + 1}{n(1-2a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$ .
14.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2x} + x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[ \left( \frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ .
17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \sqrt{4n^2 + 1} \pi = \underline{\hspace{2cm}}$ .
18.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t \, dt - \ln \sqrt{1+x^2}}{x^4} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
19.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ .
21.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{x}{e^{x^2} - 1} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ .
23.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^2 - x \ln(1+x)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
24.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
25. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right) f(1)}$   
 $= \underline{\hspace{2cm}}$ .
26. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .
27. 设当  $x \rightarrow 0$  时,  $k \sin^2 x \sim \sqrt{4+x^2} - \sqrt{4-x^2}$ , 则  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ .
28. 设  $f(x)$  连续, 且  $f(0) = 0, f'(0) = 2$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) \, dt}{e^{x^2} - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

29. 若  $f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin 2x^2 + e^{ax^2} - 1}{\ln(1+2x^2)}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

30. 设  $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{2}{x \arctan x}}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

31. 设  $f(x)$  连续可导,  $f(0)=0$  且  $f'(0)=b$ , 若  $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) + a \sin x}{x}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $A =$  \_\_\_\_\_.

32. 设  $f(x)$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x + xf(x)}{x^3} = \frac{2}{3}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+f(x)}{x^2} =$  \_\_\_\_\_.

33. 设  $f(x)$  可导且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ , 又  $g(x) = \begin{cases} \frac{x \int_0^x f(x-t) dt}{x - \arctan x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

### ◆ 选择题

34. 设  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$  则  $f\{f[f(x)]\}$  等于( ).

(A) 0

(B) 1

(C)  $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

(D)  $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

35. 函数  $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$ ,  $-\infty < x < +\infty$  是( ).

(A) 有界函数

(B) 单调函数

(C) 周期函数

(D) 偶函数

36. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列无穷小中, 哪个是比其他三个更高阶的无穷小( ).

(A)  $x^2$

(B)  $1 - \cos x$

(C)  $\sqrt{1-x^2} - 1$

(D)  $x - \tan x$

37. 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 下列无穷小中, 阶数最高的是( ).

(A)  $\ln(1+x^2) - x^2$

(B)  $\sqrt{1+x^2} + \cos x - 2$

(C)  $\int_0^{x^2} \ln(1+t^2) dt$

(D)  $e^{x^2} - 1 - x^2$

38. 设当  $x \rightarrow 0$  时,  $(x - \sin x) \ln(1+x)$  是比  $e^{x^n} - 1$  高阶的无穷小, 而  $e^{x^n} - 1$  是比  $\frac{1}{x} \int_0^x (1 - \cos^2 t) dt$  高阶的无穷小, 则  $n$  为( ).

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

39.  $f(x) = 2^x + 3^x - 2$ , 当  $x \rightarrow 0$  时( ).

(A)  $f(x) \sim x$

(B)  $f(x)$  是  $x$  的同阶但非等价的无穷小

(C)  $f(x)$  是  $x$  的高阶无穷小

(D)  $f(x)$  是  $x$  的低阶无穷小

40. 设  $f(x) = \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt$ ,  $g(x) = \int_0^x \sin^2(x-t) dt$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $g(x)$  是  $f(x)$  的( ).
- (A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小 (C) 同阶但非等价的无穷小 (D) 等价无穷小
41. 设  $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt$ ,  $g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  是  $g(x)$  的( ).
- (A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小  
(C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价的无穷小
42. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  ( ).
- (A) 等于 1 (B) 为  $\infty$   
(C) 不存在但不是  $\infty$  (D) 等于 0
43. 当  $x \rightarrow 1$  时,  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$  的极限为( ).
- (A) 2 (B) 0 (C)  $\infty$  (D) 不存在但不是  $\infty$
44. 设  $f(x)$  连续且  $F(x) = \frac{x^2}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$  为( ).
- (A)  $a^2$  (B)  $a^2 f(a)$  (C) 0 (D) 不存在
45. 设  $f(x)$  一阶连续可导, 且  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{\arcsin x}} =$  ( ).
- (A)  $e^{-1}$  (B)  $e$  (C)  $e^2$  (D)  $e^3$
46. 设  $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}}$ , 则  $x = 0$  是  $f(x)$  的( ).
- (A) 连续点 (B) 第一类间断点  
(C) 第二类间断点 (D) 不能判断连续性的点
47. 设  $f(x)$  是不恒为零的奇函数, 且  $f'(0)$  存在, 则  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  ( ).
- (A) 在  $x = 0$  处无极限 (B)  $x = 0$  为其可去间断点  
(C)  $x = 0$  为其跳跃间断点 (D)  $x = 0$  为其第二类间断点
48. 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ , 则  $f(x)$  ( ).
- (A) 无间断点 (B) 有间断点  $x = 1$   
(C) 有间断点  $x = -1$  (D) 有间断点  $x = 0$
49. 设  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{ax+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) = b$ , 其中  $a, b$  为常数, 则( ).
- (A)  $a = 1, b = 1$  (B)  $a = 1, b = -1$   
(C)  $a = -1, b = 1$  (D)  $a = -1, b = -1$
50.  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上连续, 则  $x = 0$  是函数  $g(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$  的( ).
- (A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点  
(C) 连续点 (D) 第二类间断点

## ◆ 解答题

51. (1) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-2x}}{x}$ .

(2) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$ .

52. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1-3x}}{x}$ .

53. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\ln(1+x)}}{\sqrt[3]{1-x^2} - 1}$ .

54. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$ .

55. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x \sin x}{x^2 - 2x \cos \frac{1}{x}}$ .

56. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{4x^2 + 1}}$ .

57. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arctan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .

58. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}$ .

59. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\arcsin^2 x} \right)$ .

60. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n)$ .

61. 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^{\frac{1}{\ln x}}$ .

62. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\ln^n(1+x)}{1+x^2} dx$ .

63. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - x}{x(1 - \sqrt{\cos x})}$ .

64. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + \ln(1+x^3)}{\tan x^3}$ .

65. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{e^x - \sin x - \cos x}$ .

66. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2}$ .

67. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}$ .

68. 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\sin \pi x}$ .

69. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (t^2 + 1)e^{t^2 - x^2} dt$ .

70. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} (x \neq 0)$ .

71. 设  $a_n = \sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

72. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^2}{n^3 + n^2 + n + 1} + \frac{2^2}{n^3 + n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3 + n^2 + n + n} \right)$ .

73. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 + n^2}} \right)$ .

74. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}}$ .

75. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$ .

76. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right]$ .

77. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \cdots \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$ .

78. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (2\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$ .

79. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$ .

80. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos 2x}{x(e^x - 1)}$ .

81. 已知  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - A}{x - a} = K$ , 求  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)} - e^A}{x^2 - a^2} (a \neq 0)$ .

82. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \tan^2 \frac{1}{x^2}$ .

83. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$ .

84. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[ 1 + \frac{f(x)}{\sin x} \right]}{\arctan^2 x} = A$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$ .

85. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - 1 - t)^2 dt}{x^2(x - \arctan x)}$ .

86. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x(1 + \cos x)}$ .

87. 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$ .

88. 设  $f(x) = \int_0^{\tan x} \arctan t^2 dt$ ,  $g(x) = x - \sin x$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 比较这两个无穷小的关系.

89. 设  $f(x)$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + \cos x]^{\frac{1}{x}} = e^3$ , 且  $f'(0)$  存在, 求  $f'(0)$ .

90. 设  $f(x)$  二阶连续可导,  $f''(0) = 4$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$ .

91. 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\tan \frac{\pi}{4} x\right)^{\tan \frac{\pi}{2} x}$ .

92. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1-x^2} \cos x)}{\sin x \ln(1 + \tan x)}$ .

93. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^2 e^{t^2} dt}{x e^{x^2}}$ .

94. 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\sin 3x}$ .

95. (1) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ .

(2) 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)^x$ .

96. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$ .

97. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2|x|}{x + 2} \arctan x$ .

98. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x(\sin x - \tan x)}}$ .

99. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \right]$ .

100. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$ .

101. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3 \sin x}$ .

102. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ .

103. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$ .

104. 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\ln(1+x)}$ .

105. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax - a \sin x}{x(1 - \cos ax)}$ .

106. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{\frac{1}{2x-1}} - e^{\frac{1}{2x+1}})$ .