Mathematical Analysis

经济管理类
数学分析（下册）

张倩伟　张伦传　编著

清华大学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

经济管理类
数学分析（下册）

张倩伟　张伦传　编著

中国科学技术大学
图书馆藏

Mathematical
Analysis

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书根据作者多年来的教学实践，基于当前经济管理等相关专业对数学需求不断提升的现状编写而成. 全书分为上、下两册，本册为下册. 内容包括：级数、多元函数的极限与连续、多元函数微分学、隐函数理论及其应用、多元函数积分学及曲线积分与曲面积分等.

本书可供经济类院校数学专业以及综合类院校经济管理专业对数学要求较高的学生使用，也可供这些专业中学习过高等数学课程的学生自学提高之用.

版权所有，侵权必究. 侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

经济管理类数学分析. 下册/张倩伟，张伦传编著. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-48370-0

Ⅰ. ①经…　Ⅱ. ①张… ②张…　Ⅲ. ①数学分析－高等学校－教学参考资料　Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 216722 号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市吉祥印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：16　　**字　　数**：350 千字
版　　次：2017 年 9 月第 1 版　　**印　　次**：2017 年 9 月第1 次印刷
定　　价：38.00 元

产品编号：062938-01

前言

FOREWORD

本书是在作者长期以来讲授经济管理类专业数学分析、微积分课程的经验基础上，结合经济管理类专业特点和需求而编写的主要面向综合类院校经济管理类专业（特别是对数学要求相对较高的专业，如金融工程、管理科学与工程、统计学等）本科生的数学分析教材，也可作为理工科等其他有关专业的教学参考书.

全书分上、下两册，适合三个学期的讲授. 上册共 7 章内容，以一元函数为研究对象，分别讨论了极限、连续函数与实数连续性定理、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分及定积分等内容. 下册分为 6 章，主要研究多元函数的相关性质，包括级数、多元函数的极限与连续、多元函数微分学、隐函数理论及其应用、多元函数积分学以及曲线积分与曲面积分. 书中着重讲解基本概念、基本理论与方法以及理论方法在经济管理相关领域的应用举例.

经济管理类专业的数学分析不同于数学专业的数学分析，书中略去了不太常用的一些内容和某些定理的严格证明，尽量以通俗易懂的语言描述具体问题，重视理论方法在经济管理领域的应用，注重与经管类相关专业内容的接轨，体现“有所为，有所不为”. 此外，经济管理类专业的数学分析又比现有经管类的微积分教材覆盖面更广、理论层次更深，可以满足学生在专业领域进一步发展提升的需求.

本书力求在内容设置上逻辑严谨、详略得当，难度适宜，深入浅出，融会贯通；在结构编排上形式紧凑、脉络清晰，有助于学生的自主学习和教师的教学使用. 当然，由于作者水平有限，书中难免有不尽如人意之处，殷切期望读者予以批评指正.

作　者

2015 年 1 月于中国人民大学

CONTENTS 目 录

第 8 章 级数 …… 1

8.1 数项级数 …… 1

习题 8.1 …… 8

8.2 正项级数 …… 9

习题 8.2 …… 18

8.3 任意项级数 …… 19

习题 8.3 …… 25

8.4 函数项级数 …… 26

习题 8.4 …… 37

8.5 幂级数 …… 39

习题 8.5 …… 54

第 9 章 多元函数的极限与连续 …… 56

9.1 预备知识 …… 56

习题 9.1 …… 62

9.2 多元函数的概念 …… 62

习题 9.2 …… 66

9.3 二元函数的极限 …… 67

习题 9.3 …… 71

9.4 二元函数的连续性 …… 72

习题 9.4 …… 76

第 10 章 多元函数微分学 …… 77

10.1 方向导数、偏导数与全微分 …… 77

习题 10.1 …… 85

10.2 多元复合函数微分法 …… 85

习题 10.2 …… 88

10.3 高阶偏导数与高阶全微分 …… 89

习题 10.3 …… 97

需要全本请访问 www.ertongbook.com

10.4 多元函数的极值 …… 97
习题 10.4 …… 103
第 11 章 隐函数理论及其应用 …… 105
11.1 隐函数理论 …… 105
习题 11.1 …… 115
11.2 条件极值 …… 116
习题 11.2 …… 123
第 12 章 多元函数积分学 …… 124
12.1 含参变量积分 …… 124
习题 12.1 …… 139
12.2 欧拉积分 …… 140
习题 12.2 …… 144
12.3 二重积分 …… 144
习题 12.3 …… 166
12.4 三重积分 …… 168
习题 12.4 …… 177
12.5 重积分的简单应用 …… 178
习题 12.5 …… 184
第 13 章 曲线积分与曲面积分 …… 186
13.1 第一型曲线积分 …… 186
习题 13.1 …… 192
13.2 第二型曲线积分 …… 193
习题 13.2 …… 201
13.3 格林公式及曲线积分与路径的无关性 …… 202
习题 13.3 …… 212
13.4 第一型曲面积分 …… 212
习题 13.4 …… 219
13.5 第二型曲面积分 …… 220
习题 13.5 …… 227
13.6 奥-高公式与斯托克斯公式 …… 228
习题 13.6 …… 237
习题参考答案 …… 239

第 8 章

级　数

无穷级数是一种特殊数列的极限形式，它分为数项级数和函数项级数两种情形. 数项级数是函数项级数的基础，又可视为函数项级数的特殊情况. 函数项级数是表示函数，特别是非初等函数，研究函数性质以及进行数值计算的重要数学工具，在自然科学、工程技术、经济管理领域都有着广泛的应用. 本章首先讨论数项级数的基本理论，进而分析函数项级数，特别是幂级数的性质及应用.

8.1　数项级数

在实际中，当人们研究数值计算问题时，往往会遇到无限多个量相加的情形，这类情形的解决方法通常是通过一个由近似到精确的逼近来完成.

引例 1　如图 8.1 所示，从点 $P_1(1,0)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线 $y=x^2$ 于点 $M_1(1,1)$. 再从 M_1 作这条抛物线的切线与 x 轴交于点 P_2，然后又从 P_2 作 x 轴的垂线，交抛物线于 M_2. 依次重复上述过程得到一系列点

$$P_1, M_1; P_2, M_2; \cdots; P_n, M_n; \cdots.$$

如何求解 $\overline{P_1M_1}+\overline{P_2M_2}+\cdots+\overline{P_nM_n}+\cdots$ 的和？（其中 $n(n\geqslant 1)$ 为自然数，$\overline{P_iM_i}$ 表示点 P_i 与 M_i 之间的距离.）

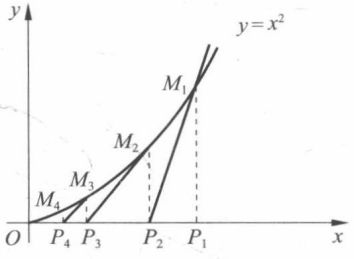

图　8.1

解　由抛物线 $y=x^2$ 知 $y'=2x$. 对任意 $a(0<a\leqslant 1)$，抛物线在点 (a,a^2) 处的切线方程为

$$y-a^2=2a(x-a),$$

切线与 x 轴的交点为 $\left(\frac{a}{2},0\right)$. 由 $\overline{OP_1}=1$ 知

$$\overline{OP_2}=\frac{1}{2}\overline{OP_1}=\frac{1}{2},$$

$$\overline{OP_3}=\frac{1}{2}\overline{OP_2}=\frac{1}{2^2},$$

$$\vdots$$

$$\overline{OP_n}=\frac{1}{2}\overline{OP_{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

由于$\overline{P_nM_n}=(\overline{OP_n})^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$，从而

$$S_\infty=\overline{P_1M_1}+\overline{P_2M_2}+\cdots+\overline{P_nM_n}+\cdots=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}+\cdots.$$

因为

$$S_n=\overline{P_1M_1}+\cdots+\overline{P_nM_n}=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2},$$

所以当$n\to\infty$时，$S_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$，即

$$\overline{P_1M_1}+\overline{P_2M_2}+\cdots+\overline{P_nM_n}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.$$

引例 2 为消除湖泊中的有害污染物，采用上游引入清水稀释污染物，并逐渐从下游排出的方法. 若湖泊中现有污染物的总量为 Q，按照该方法一周可排出污染物残留量的$\frac{1}{3}$. 若时间可以无限推移，按该种方法，可排出的污染物为多少？

解 按照题意，第 n 周的排污量为

$$u_n=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}Q,\quad n=1,2,\cdots.$$

前 n 周的累计排污量为

$$\begin{aligned}Q_n&=u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{1}{3}Q+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)Q+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}Q\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}Q.\end{aligned}$$

若时间可以无限推移，即 $n\to\infty$，则总排污量 $\hat{Q}_\infty$ 为无穷个数量之和，于是

$$\begin{aligned}\hat{Q}_\infty&=\frac{1}{3}Q+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)Q+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}Q+\cdots\\&=\lim_{n\to\infty}Q_n=\frac{1}{3}\cdot 3Q=Q.\end{aligned}$$

即按此种方法，长此以往可以排出全部污染物.

上述两个引例的共同点在于，它们都是计算无穷多个数量的“和”，在计算过程中都是从前 n 项相加出发，讨论当 $n\to\infty$ 时前 n 项和的极限值. 那么，是否所有的无穷多个数量的和都有一个极限值？接下来，我们通过数项级数的定义以及收敛和发散的概念来分析无穷个

数量和的存在性问题.

1. 数项级数收敛与发散的概念

定义 8.1 设有数列$\{u_n\}$,即

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots, \tag{8.1}$$

将数列(8.1)的项依次相加,即

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{8.2}$$

则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为数项级数,简称级数,其中u_n称为级数(8.2)的第n项或通项.

设级数(8.2)的前n项的和为S_n,即

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad 或 \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

称S_n为级数(8.2)的前n项部分和.

显然,对于给定的级数(8.2),其任意前n项部分和S_n都是已知的.从而,级数(8.2)有一个已知的部分和数列$\{S_n\}$.

定义 8.2 对于给定的级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,如果其部分和数列$\{S_n\}$有极限S,即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = S,$$

则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,S是该级数的和,记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$$

若部分和数列$\{S_n\}$没有极限(发散),则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

定义 8.3 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,其和为S,记$r_n = S - S_n$,即

$$r_n = S - S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots,$$

称为收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的n项余和,简称余和.

显然,若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,总有下式成立:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0.$$

从级数的收敛定义可知,级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的敛散性可归结为部分和数列$\{S_n\}$的敛散性,两者

之间可以相互转化. 级数作为有限和的推广，有鲜明的直观性，而不是收敛数列及其极限的简单重复.

例 1 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \tag{8.3}$$

称为几何级数(或等比级数)，其中 $a \neq 0$，q 是公比，讨论该级数的敛散性.

解 (1) 当 $|q| \neq 1$ 时，该级数的前 n 项部分和为

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

① 当 $|q| < 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

因此，当 $|q| < 1$ 时，几何级数收敛，其和为 $\frac{a}{1-q}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

② 当 $|q| > 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \infty.$$

因此，当 $|q| > 1$ 时，几何级数发散.

(2) 当 $|q| = 1$ 时，有两种情况.

① 当 $q = 1$ 时，$S_n = na$，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

② 当 $q = -1$ 时，$S_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数}, \\ a, & n \text{ 为奇数}, \end{cases}$ 即部分和数列 $\{S_n\}$ 发散.

因此，当 $|q| = 1$ 时，几何级数发散.

综上所述，几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 当 $|q| < 1$ 时收敛于 $\frac{a}{1-q}$，当 $|q| \geqslant 1$ 时发散.

例 2 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ 的敛散性.

解 通项 $u_n = \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1}\right)$，则级数的前 n 项和为

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\times 6} + \frac{1}{6\times 11} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \\ &= \frac{1}{5}\left[\left(1 - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{5n+1}\right). \end{aligned}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}$，所以级数收敛，其和为$\frac{1}{5}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}.$$

例 3 证明调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

证明(反证法) 记$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的前$n$项和、前$2n$项和分别为$S_n$，$S_{2n}$. 假设调和级数收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$. 又

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\underbrace{\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}}_{n\text{个}}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

此与$\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$矛盾. 故调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

例 4 判断下面的推导是否正确，并说明理由.

对于级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n$，设$S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n$，于是有

$$S=1+3+9+27+\cdots=1+3(1+3+9+\cdots)=1+3S,$$

从而$S=-\frac{1}{2}$.

解 上述推导错误，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n$是无穷多个正数相加，不可能为负值. 错误的原因在于当$q=3$时，几何级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n$发散，级数的和$S$不存在.

例 4 表明，级数在参与运算时，首先要对级数的敛散性进行判定. 只有在级数收敛的情况下才能按极限的四则运算性质进行计算，否则会出现谬论. 接下来，我们对收敛级数的性质进行讨论.

2. 收敛级数的性质

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性与它的前$n$项和数列$\{S_n\}$的敛散性等价，根据数列$\{S_n\}$的柯西收敛准则：

数列$\{S_n\}$收敛$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，存在正整数$N$，$\forall n>N$及任意正整数$p$，有$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$，可以得到级数的柯西收敛准则.

定理 8.1(柯西收敛准则) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是：

$\forall\varepsilon>0$，存在正整数N，$\forall n>N$及任意正整数p，有$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

柯西收敛准则在理论上十分重要，但用它来判别级数的敛散性问题却往往比较麻烦. 基于柯西收敛准则，可以得出级数的如下几个基本性质，以便判别敛散性.

性质 8.1（级数收敛的必要条件） 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证明 根据定理 8.1 的必要性，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，$\forall n>N$ 及任意正整数 p，有 $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$. 特别地，取 $p=1$，有 $|u_{n+1}|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

在判别级数是否收敛时，通常利用性质 8.1 的逆否命题，即若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必发散.

例如，对于级数

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots,$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1\neq0$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}$ 发散.

注意，性质 8.1 仅为级数收敛的必要条件，而不是充分条件. 也就是说，即使级数的通项满足 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，也不能确定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

例如，几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$，它是收敛的；调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，它却是发散的.

性质 8.2 去掉、增加或改变级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的有限项，不改变级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性.

根据级数的柯西收敛准则，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛仅与第 N 项之后的任意有限项之和（$u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}$）有关，而与第 N 项之前的有限项无关. 因此，对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，去掉、增加或改变有限项均不改变级数的敛散性，但有限项的变动，对于收敛级数而言，其和将有所改变.

根据数列极限的运算法则，可以得到收敛级数的运算性质.

性质 8.3 设 c 是非零常数，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$ 也收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$ 的前 n 项部分和分别为 S_n 和 σ_n，则有

$$\sigma_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n=c(u_1+u_2+\cdots+u_n)=cS_n.$$

由数列极限的性质知，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} cS_n$ 也存在，且有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=c\lim_{n\to\infty}S_n,\quad \text{即}\quad \sum_{n=1}^{\infty}cu_n=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

性质 8.4 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，不改变每项的位置，按原有顺序将某些项加括号，形成的新级数仍然收敛，且收敛于原级数的和.

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项部分和为 S_n，加括号后新的级数前 k 项部分和为 σ_k，则有

$$\begin{aligned}\sigma_k&=(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})\\&=u_1+u_2+\cdots+u_{n_k}=S_{n_k}.\end{aligned}$$

可见，新级数的部分和数列 $\{\sigma_k\}$ 是原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的子列. 显然，若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$，则必有 $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k=S$，性质得证.

此性质表明，收敛级数满足结合律.

注 (1) 与上册中无穷限积分类似，级数也有绝对收敛与条件收敛的概念，此处从略. 对于条件收敛的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，如果交换级数的项，则交换后的新级数可收敛于任意数 a（或发散到 $\pm\infty$）. 只有绝对收敛的级数，任意交换级数的项，得到的新级数依然收敛且收敛的和保持不变. 也就是说，收敛的级数不一定满足交换律，这是有限和与无限和的区别.

(2) 对有限和而言，可以随意加括号或去括号. 但是，对于级数这种无穷和来讲，不能随意去括号. 例如，级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于 0，但去括号之后的级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 却是发散的.

因此，收敛的级数在各项相对位置不变的情况下可以随意加括号，但不能任意去括号.

性质 8.5 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的前 n 项部分和分别为 σ_n，S_n 和 T_n，有

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k\pm v_k)=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)$$

$$= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n)$$
$$= S_n \pm T_n.$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，$\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$，则

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm T_n) = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} T_n = S \pm T,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛，其和为 $S \pm T$.

注 (1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则必有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 发散.

否则，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛，由性质 8.5 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} [(u_n \pm v_n) \mp v_n] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 此与已知矛盾.

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 可能收敛也可能发散. 例如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ 均发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} = 3\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散；$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$ 均发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n}\right)\right] = 0$ 收敛.

习题 8.1

1. 判断下列级数是否收敛，若收敛，求其和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n+4}$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

2. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

3. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛.

4. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，且 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$，$n = 1, 2, \cdots$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛.（提示：应用级数的柯西收敛准则）

5. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geqslant 0)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 反之是否成立？

6. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sin 1)^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+(-1)^n}{5}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{\pi}{3^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\cos a}{n(n+2)}+\dfrac{2}{n}\right]$.

8.2 正项级数

8.1节，我们讨论了一般的数项级数的概念及其相关性质. 一般的数项级数中，各项的符号可以是任意的，即每一项可以是正数，也可以是负数或零. 本节讨论级数中各项符号一致的情形，这种级数，通常称为**保号级数**.

1. 正项级数的概念

定义 8.4 如果级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

的每一项 u_n 都是非负或者非正，那么这类级数称为保号级数. 特别地，若 $u_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是**正项级数**；若 $u_n\leqslant 0(n=1,2,\cdots)$，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是**负项级数**.

负项级数每项乘以 -1 就成为了正项级数，根据8.1节性质8.3知负项级数与该正项级数具有相同的敛散性. 因此，对于负项级数敛散性的分析可以归结为对正项级数敛散性的讨论. 下面我们讨论正项级数敛散性的判别问题.

2. 正项级数敛散性的判别方法

首先，根据正项级数的特点，可以得到正项级数收敛原理.

定理 8.2(正项级数收敛原理) 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

证明 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，则它的部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增，即

$$S_1\leqslant S_2\leqslant\cdots\leqslant S_n\leqslant\cdots.$$

根据“单调有界数列必有极限”可知，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在当且仅当数列 $\{S_n\}$ 有上界，定理得证.

例 1 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}=1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}+\cdots$(其中 $p>0$) 称为 p-级数或广义调和级数，讨论该级数的敛散性.

解 当 $p\leqslant 1$ 时，因为 $\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$，对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的前 n 项和 S_n，有

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

不等式右端是调和级数的前 n 项和，它发散为 $+\infty$，因此 $\{S_n\}$ 无界，从而 $p\leqslant 1$ 时级数发散.

当 $p>1$ 时，如图 8.2 所示，p-级数从第 2 项到第 n 项的和为阶梯形阴影部分的面积之和，而每个小矩形的面积都小于与它同底的曲边梯形的面积，即 $\frac{1}{n^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\,(n\geqslant 2)$，从而

$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}<1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\\&=1+\int_1^n\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}\\&=\frac{p}{p-1}.\end{aligned}$$

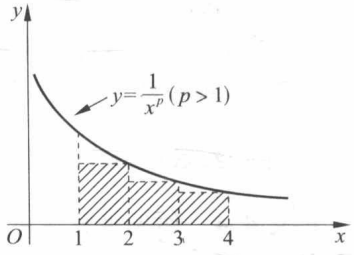

图 8.2

由定理 8.2 知，当 $p>1$ 时，p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

综上所述，p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p\leqslant 1$ 时发散，当 $p>1$ 时收敛.

由例 1 可以看出，具体判定部分和数列是否有界，往往比较困难，因此正项级数收敛原理很少直接用于判定正项级数的敛散性. 但是我们可以另取一个敛散性已知的正项级数与它作比较，从而确定它的部分和数列是否有界（如例 1 中 $p\leqslant 1$ 时的判别思路）. 按照这种思路，可由正项级数收敛原理进一步推得正项级数以下几种常用的敛散性判别法.

定理 8.3（比较判别法） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，且存在正整数 N，$\forall\, n\geqslant N$，有 $u_n\leqslant cv_n$，c 为正常数.

（1）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（2）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

证明 由 8.1 节数项级数的性质 8.2 可知，改变级数前面有限项并不改变级数的敛散性. 因此，不妨设 $\forall\, n$（正整数），有

$$u_n\leqslant cv_n.$$

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的前 n 项部分和分别为 S_n 和 T_n，则有

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant cv_1+cv_2+\cdots+cv_n=c(v_1+v_2+\cdots+v_n)=cT_n.$$

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，根据定理 8.2，数列$\{T_n\}$有上界，从而数列$\{S_n\}$有上界，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则数列$\{S_n\}$无上界，从而数列$\{T_n\}$也无上界，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

例 2 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\ln\left(1+\frac{1}{4^n}\right)$；　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$.

解 (1) 因为 $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$. 根据 p-级数的敛散性，$p=\frac{2}{3}<1$，从而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ 发散，由比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}}$ 发散.

(2) 因为当 $x>0$ 时，$0<\ln(1+x)<x$，所以有

$$0<3^n\ln\left(1+\frac{1}{4^n}\right)<\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

由几何级数的敛散性知，公比 $q=\frac{3}{4}<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 收敛，根据比较判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\ln\left(1+\frac{1}{4^n}\right)$ 收敛.

(3) 因为 $|\sin x|<|x|$，所以 $\left|2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\right|<\pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$. 而 $\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛.

在使用比较判别法时，常常需要将通项放大或缩小，使之成为敛散性已知的级数的通项形式，这种方法使用时需要对被判别的级数做出“预判断”，即如果认为该级数收敛，应放大通项，并保证放大后的级数收敛；如果认为该级数发散，则应缩小通项，并使缩小后的级数发散. 因此，比较判别法有时用起来并不方便，在应用中我们经常运用更为简便的比较判别法的极限形式.

定理 8.4(比较判别法的极限形式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ ($v_n\neq0$)都是正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A\quad(0\leqslant A\leqslant+\infty),$$

则有

(1) 若 $0\leqslant A<+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

需要全本请访问 www.ertongbook.com