Basic Ideas and Didactics of Mathematics

数学基本思想与教学

史宁中 著

创于1897 商务印书馆 The Commercial Press

Basic Ideas and Didactics of Mathematics

数学基本思想与教学

史宁中 著

商务印书馆
创于1897 The Commercial Press
2018年·北京

图书在版编目(CIP)数据

数学基本思想与教学 / 史宁中著 . — 北京 : 商务印书馆 , 2018
ISBN 978-7-100-15839-8

Ⅰ . ①数… Ⅱ . ①史… Ⅲ . ①数学课—教学研究—中小学 Ⅳ . ① G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 028917 号

数学基本思想与教学
史宁中 著

商 务 印 书 馆 出 版
（北京王府井大街 36 号 邮政编码 100710）
商 务 印 书 馆 发 行
艺 堂 印 刷（天 津）有 限 公 司
ISBN 978-7-100-15839-8

2018 年 11 月第 1 版　　开本 710 × 960 1/16
2018 年 11 月第 1 次印刷　　印张 18
定价：48.00 元

目　录

什么是数学基本思想*

在我国数学教育，特别是基础教育阶段的数学教育中，数学基本思想一词已经被广泛使用。《义务教育数学课程标准（2011 年版）》（简称《标准（2011 年版）》）明确指出[①]：

> 通过义务教育阶段的数学学习，使学生能获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验。

什么是数学基本思想呢？为什么要在数学教育的过程中让学生获取数学基本思想呢？如何设计合适的教学过程，让学生感悟和获取数学基本思想呢？

一、什么是数学基本思想

在数学教学中，通常说的等量替换、数形结合、递归法、换元法等，可以称为数学思想方法，但不是数学基本思想。因为在述说这些概念的时候，必然要依附于某些具体的数学内容，因此这些概念在本质上是个案的而不是一般的；此外，这些概念也不是最基本的，比如关于等量替换，人们可以进一步追问：为什么可以在计算的过程中进行等量替

---

* 本文为《数学基本思想 18 讲》绪言，史宁中著。北京师范大学出版社，2016 年版。

① 参见中华人民共和国教育部制定的《义务教育数学课程标准（2011 年版）》，北京师范大学出版社，2012 年版。

换呢？这就意味着，作为一种方法，等量替换可以用其他的更为基本的原理推演出来。为此，需要建立判断数学基本思想的原则。我们建立两个原则：

第一个原则，数学产生和发展所必须依赖的那些思想。

第二个原则，学习过数学的人应当具有的基本思维特征。

根据这两个原则，我们把数学基本思想归结为三个核心要素：抽象、推理、模型。这三者对于数学的作用以及相互之间的关系大体是这样的：

通过抽象，人们把现实世界中与数学有关的东西抽象到数学内部，形成数学的研究对象，思维特征是抽象能力强；通过推理，人们从数学的研究对象出发，在一些假设条件下，有逻辑地得到研究对象的性质以及描述研究对象之间关系的命题和计算结果，促进了数学内部的发展，思维特征是逻辑推理能力强；通过模型，人们用数学所创造的语言、符号和方法，描述现实世界中的故事，构建了数学与现实世界的桥梁，思维特征是表述事物规律的能力强。

当然，针对具体的数学内容，不可能把三者截然分开，特别是不能把抽象与推理、抽象与模型截然分开。在推理的过程中，往往需要从已有的数学知识出发，抽象出那些并不是直接来源于现实世界的概念和运算法则，比如，实数与高维空间的概念、矩阵与四元数的运算法则等，在这个意义上，数学并不仅仅研究那些直接来源于现实世界的东西[①]；在构建模型的过程中，往往需要在错综复杂的现实背景中抽象出最为本质的关系，并且用数学的语言予以表达，比如，用 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 这样的算式表达物体自由降落的规律。反之，抽象的过程往往需要借助逻辑推理，比如，在一类事物中发现共性、分辨差异，抽象出数学的概念；通过推理判断概念之间的关系，判断什么是命题的独立性、什么是命题的相容

---

① 参见史宁中、孔凡哲著，《关于数学的定义的一个注》，《数学教育学报》，2006年第4期，第37—38页。

性，最终抽象出公理体系；在众多个案的运算过程中发现规律，通过推理验证什么是最本质的规律，最终用抽象的符号表达一般性的运算法则。因此，在数学研究和学习的过程中，抽象、推理、模型这三者之间常常是你中有我、我中有你。

抽象。抽象是从许多事物中舍弃个别的、非本质属性，得到共同的、本质属性的思维过程，是形成概念的必要手段。最初的抽象是基于直观的，正如康德所说①：

> 人类的一切知识都是从直观开始，从那里进到概念，而以理念结束。

希尔伯特非常敬佩前辈康德。在出版纪念高斯的文集时，希尔伯特把1898—1899年给学生授课时的讲稿编写成讲义《几何基础》，把康德的这句话作为卷首题词。

对于数学，抽象主要包括两方面的内容：数量与数量关系，图形与图形关系。这就意味着，数学的抽象不仅仅要抽象出数学所要研究的对象，还要抽象出这些研究对象之间的关系。与研究对象的存在性相比，研究对象之间的关系更为本质。正如亚里士多德在《形而上学》中所说②：

> 个体不能同时在多处存在，共相却可以同时存在于众多，所以也不难明白，离开了特殊普遍将不复存在。
>
> ……例如，数学家用抽象的方法对事物进行研究，去掉感性的东西诸如轻重、软硬、冷热，剩下的只有数量和关系，而各种规定

① 参见康德著，《纯粹理性批判》，邓晓芒译，杨祖陶校注。人民出版社，2004年版，第544页。

② 参见苗力田主编，《亚里士多德全集》（第七卷），中国人民大学出版社，1977年版，第185页，第246—247页。

> 都是针对数量和关系的规定。有时研究位置之间的关系，有时研究可通约性，还研究各种比例，等等。……数学家把共同原理用于个别情况，……等量减等量余量相等，这便是一条对所有量都适用的共同原理。对于数学研究而言，线、角或者其他的量（的定义），不是作为存在而是作为关系。

数量与数量关系的抽象。人们把现实生活中的数量抽象为数，形成自然数，并且用十个符号和数位进行表示，得到了自然数集。在现实生活中，数量关系的核心是多与少，人们又把这种关系抽象到数学内部，这就是数的大与小。后来，人们又把大小关系推演为更一般的序关系。

由大小关系的度量产生了自然数的加法，由加法的逆运算产生了减法，由加法的简便运算产生了乘法，由乘法的逆运算产生了除法。因此，数的运算本质是四则运算，这些运算都是基于加法的。通过运算的实践以及对运算性质的研究，抽象出运算法则。为了保证运算结果的封闭性，就实现了数集的扩张。在本质上，数集的扩张是因为逆运算：为了减法运算的封闭，自然数集扩张为整数集；为了除法运算的封闭，整数集扩张为有理数集。

数学还有第五种运算，这就是极限运算，涉及数以及数的运算的第二次抽象。虽然极限的思想古已有之，但极限运算的确立，却是源于牛顿、莱布尼茨于1684年左右创立的微积分，因为微积分的运算基础就是极限。为了合理地解释极限，特别是为了合理地解释函数的连续性，1821年到1860年这一段时间，柯西、魏尔斯特拉斯等数学家创造出了“ε—δ语言”的描述方法。由此也开始构建了现代数学的特征：研究对象符号化、证明过程形式化和逻辑推理公理化。

为了很好地描述极限运算，需要解决实数的运算和连续；为了很好地定义实数，需要解决无理数的定义与运算；为了清晰定义无理数，需要重新认识有理数。这样，小数形式的有理数就出现了，这完全背离了用分数形式表达有理数的初衷。这个初衷就是：有理数是可以用整数表

示的数。这个初衷所表述的现实背景是：部分与整体的关系，或者，线段长度之间的比例关系。

1872 年，基于小数形式的有理数，康托用基本序列的方法，通过有理数列的极限定义了实数，解决了实数的运算问题；戴德金用分割的方法，通过对有理数的分割定义了实数，解决了实数的连续性问题。1889 年，皮亚诺构建算术公理体系，重新定义了自然数。1908 年，策梅洛给出了集合论公理体系，这便是人们通常所说的 ZF 集合论公理体系。借助这一系列的工作，人们终于合理地解释了数和数的运算，合理地解释了微积分，构建了现代数学中关于数及其运算的理论基础。

由此可见，虽然人们在很早以前就抽象出了数以及四则运算，抽象出了数与数之间的关系，甚至建立了基于极限运算的微积分，但直到 20 世纪初，人们才合理地解释了什么是数，以及各种关于数的运算及其法则。

图形与图形关系的抽象。无独有偶，图形与图形关系的抽象也经历了类似的过程。现实世界中的图形都是三维的，几何学研究的对象，诸如点、线、面等都是抽象的产物，这些研究对象集中地表述在欧几里得《原本》这本书中①。欧几里得用揭示内涵的方法给出点、线、面的定义，比如，点是没有部分的那种东西。但是，凡是具体的陈述就必然会出现悖论：按照这样的定义，应当如何解释两条直线相交必然交于一点呢？两条直线怎么能交到没有部分的那种东西上呢？此外，空气是没有部分的，空气是不是点呢？即便如此，欧几里得几何仍然是数学抽象的典范，支撑了数学两千多年的发展，并且成为近代物理学发展的基础，主要表现在伽利略和牛顿的工作中。

---

① 原著共 13 卷，前 6 卷论述平面几何，第 7 卷至第 9 卷论述数的理论，第 10 卷论述无理数，第 11 卷至第 13 卷论述立体几何。后来希普西克勒斯补充第 14 卷，又将晚期的一些评注编为 15 卷，拉丁文本为《欧几里得原本》。中国最早译本的完成时间是明万历三十五年，即 1607 年，是意大利传教士利玛窦和徐光启合作翻译的，这也是中国近代翻译西方数学书籍的开始。他们是根据德国人克拉维乌斯 1574 年拉丁文的《欧几里得原本》翻译的。原书 15 卷，他们翻译了前 6 卷，因为主要是平面几何的内容，因此他们定名为《几何原本》，中文“几何”的名称也就此产生。

随着数学研究的深入，特别是非欧几何以及实数理论的出现，人们需要更加严格地审视传统的几何学。1898 年，希尔伯特在《几何基础》这本书中，重新给出了点、线、面的定义：用大写字母 A 表示点，用小写字母 a 表示直线，用希腊字母 α 表示平面，这完全是符号化的定义，没有任何涉及内涵的话语。那么，完全没有内涵的定义也能成为数学的研究对象吗？事实上，希尔伯特更为重要的工作在于他给出的五组公理，这五组公理限定了点、线、面之间的关系，给出了几何研究的出发点，构建了几何公理体系。希尔伯特几何公理体系的建立，完成了几何学的第二次抽象。在形式上，几何学的研究已经脱离了现实，正如希尔伯特所说的那样①：

> 欧几里得关于点、线、面的定义在数学上是不重要的，它们之所以成为讨论的中心，仅仅是因为公理述说了它们之间的关系。换句话说，无论把它们称为点、线、面，还是把它们称为桌子、椅子、啤酒瓶，最终推理得到的结论都是一样的。

小结。通过上面的讨论可以看到，抽象是数学得以产生和发展的思维基础，并且，与数学的发展同步，数学的抽象也经历了两个阶段。

第一阶段的抽象是基于现实的，人们通过对现实世界中的数量与数量关系、图形与图形关系的抽象，得到了数学的基本概念，这些基本概念包括：数学研究对象的定义、刻画研究对象关系的术语和计算方法。这种基于现实的抽象，是从感性具体上升到理性具体的思维过程。随着数学研究的深入，还必须进行第二阶段的抽象，这个阶段的抽象是基于逻辑的。人们通过第二阶段的抽象，合理解释了那些通过第一次抽象已经得到了的数学概念以及概念之间的关系。第二次抽象的特点是符号

---

① 参见〔美〕康斯坦斯·瑞德著，《希尔伯特——数学世界的亚历山大》，袁向东、李文林译，上海科学技术出版社，2011 年版，第 90 页。

化、形式化和公理化，这是从理性具体上升到理性一般的思维过程。

但是，我们必须看到，虽然第二次抽象使得数学更加严谨，但第一次抽象却是更为本质的，因为第一次抽象创造出了新的概念、运算法则和基本原理，而第二次抽象只是更加严谨地解释这些创造。事实上，如果没有第一次抽象作为铺垫，我们将无法理解第二次抽象的真实含义，就像没有欧几里得几何作为铺垫，我们将无法理解希尔伯特所创造的几何公理体系到底说了些什么。

推理。按照人们的通常理解，主要有三种思维形式：形象思维、逻辑思维和辩证思维。数学主要依赖的是逻辑思维，具体体现就是逻辑推理。人们通过逻辑推理，理解数学研究对象之间的因果关系，并且用抽象的术语和符号描述这种关系，形成数学的命题和运算结果，促进了数学内部的发展。

随着数学研究的不断深入，根据研究问题的不同，数学逐渐形成各个分支，甚至形成各种流派。即便如此，因为数学研究问题的出发点是一致的，逻辑推理规则也是一致的，因此，至少现在的研究结果表明，数学在整体上具有一致性。也就是说，虽然数学各个分支所研究的问题似乎风马牛不相及，但数学各个分支得到的结果却是相互协调的。为此，人们不能不为数学的这种整体一致性感到惊叹：数学似乎蕴含着某种类似真理那样的东西。

推理是对命题的判断，是从一个命题判断到另一个命题判断的思维过程。这里所说的命题，是可供判断的陈述句，如果也用陈述句表述计算结果，那么，数学的所有结论都是命题。进一步，所谓有逻辑的推理，是指所要判断的命题之间具有某种传递性，更形象地说，就是有一条主线能把这些命题串联起来。据此，“凡人都有死，苏格拉底是人，所以苏格拉底有死”，这样的推断是有逻辑的；“苏格拉底是人苏格拉底有死，柏拉图是人柏拉图有死，所以凡人都有死”，这样的推理也是有逻辑的；但是，“苹果是酸的，酸的是一种味道，所以苹果是一种味道”，这样的推理是没有逻辑的。基于上面的述说，本质上只有两种形

式的逻辑推理，一种是归纳推理，一种是演绎推理。

归纳推理。归纳推理是命题的适用范围由小到大的推理，是一种从特殊到一般的推理，比如上述第二个推理。通过归纳推理得到的结论是或然成立的。

归纳推理包括不完全归纳法、类比法、简单枚举法、数据分析等。人们借助归纳推理，从经验过的东西出发推断未曾经验过的东西，因此，除去通过计算得到的结果之外，数学的结论都是通过归纳推理得到的。也就是说，数学的结果是“看”出来的，而不是“证”出来的，虽然看出的数学结果不一定正确，但指引了数学研究的方向。

演绎推理。演绎推理是命题的适用范围由大到小的推理，是一种从一般到特殊的推理，比如上述第一个推理。通过演绎推理得到的结论是必然成立的。

演绎推理包括三段论、反证法、数学归纳法、算法逻辑等。人们借助演绎推理，按照假设前提和规定的法则验证那些通过归纳推理得到的结论，这便是数学的“证明”。通过证明能够验证结论的正确性，但不能使命题的内涵得到扩张。也就是说，演绎推理能保证论述的结论与论述的前提一样可靠，但不能增添新的东西。

小结。数学之所以具有类似真理那样的合理性，或者说，数学之所以具有严谨性，正是因为数学的结论从产生到验证的整个过程，都严格地遵循了上述两种形式的逻辑推理。但是，在我们现行的数学教学中，过分强调了演绎推理而忽略了归纳推理，过分强调了命题的证明而忽略了命题的提出以及对命题的直观理解。我们不能不思考这样的问题，无论是大学的数学教育，还是中小学的数学教育，是不是都应当创造出一些问题的情境，让学生自己发现一些对于他们而言是新的数学结论呢?

模型。数学模型与人们通常所说的数学应用是有所区别的：数学应用涉及的范围相当宽泛，可以泛指应用数学的方法解决实际问题的所有事情；数学模型更侧重用数学创造出来的概念、原理和方法，描述现实世界中的那些规律性的东西。通俗地说，数学模型是用数学的语言讲述

现实世界中与数量、图形有关的故事。数学模型使数学走出了自我封闭的世界，构建了数学与现实世界的桥梁。关于这一点，伽利略的经验之谈是最好的诠释[①]：

> 哲学被写在展现于我们眼前的伟大之书上，这里我指的是宇宙。但是如果我们不首先学会用来书写它的语言和符号，我们就无法理解它。这本书是以数学语言写的，它的符号就是三角形、圆和其他几何图形，没有这些符号的帮助，我们简直无法理解它的片言只语；没有这些符号，我们只能在黑暗的迷宫中徒劳地摸索。

因此，数学模型的出发点往往不是数学，而是将要讲述的现实世界中的那些故事；数学模型的研究手法也不是单向的，需要从数学和现实这两个出发点开始，这就像建筑桥梁一样，在建筑之前必须清楚要把桥梁建筑在哪里，要在此岸和彼岸同时设计桥墩的具体位置。构建数学模型的大体流程是：从两个出发点开始，规划研究路径、确立描述用语、验证研究结果、解释结果含义，从而得到与现实世界相容的、可以用来描述现实世界的数学表达。

在现实世界中，放之四海而皆准的东西是不存在的，因此，一个数学模型必然有其适用范围，这个适用范围通常表现于模型的假设前提、模型的初始值以及对模型中参数的限制。在这个意义上，所有数学的形式，诸如函数、方程等，本身都不是数学模型，而是可以用来构建模型的数学语言。

因为数学模型具有数学和现实这两个出发点，因此，数学模型就不完全属于数学。事实上，大多数应用性很强的数学模型的命名，都依赖于所描述的学科背景。比如，生物学中的种群增长模型、基因复制模型

① 参见〔美〕爱德文·阿瑟·伯特著，《近代物理科学的形而上学基础》，徐向东译，北京大学出版社 2003 年版。

等；医药学中的专家诊断模型、疾病靶向模型等；气象学中的大气环流模型、中长期预报模型等；地质学中的板块构造模型、地下水模型等；经济学中的股票衍生模型、组合投资模型等；管理学中投入产出模型、人力资源模型等；社会学中人口发展模型、信息传播模型等。在物理学和化学中，各类数学模型更是不胜枚举。

小结。数学模型描述的是现实世界的故事，因此，数学模型不仅研究的出发点不是数学本身，就连价值取向也不是数学本身，而是描述现实世界的作用。针对每一个具体的学科，强调的是描述那个学科规律性问题的作用，比如，那些获得诺贝尔经济学奖的数学模型，人们关注的并不是模型的数学价值，而关注的是模型是否能够很好地描述经济学中的某些规律。

总结。人们普遍认为，数学具有三个显著特征：一般性、严谨性和应用的广泛性。事实上，这三个显著特征的形成，依赖于数学的基本思想。

抽象出来的东西必然要脱离具体的表象，因此数学是一般的，特别是经过了第二次抽象，数学的表达实现了符号化，走向了一般化的极致；数学的推理是有逻辑的，通过归纳推理预测结论、通过演绎推理验证结论，因此数学是严谨的，特别是近代数学的证明过程实现了公理体系下的形式化，使得数学的严谨走向极致；模型思想的本质是站在现实的立场上，思考现实世界中规律性的问题，用数学的语言讲述现实世界的故事，用现实的效果评价模型的功效，这样的应用是与现实世界融合的，因此，数学的应用是广泛的。

毋庸置疑，数学的严谨性是极为重要的，严谨性也是人们对数学的一种普遍认识。在现今的数学教育中，人们认真地遵循着这个原则。可是，数学为什么需要严谨性呢？严谨性对数学发展的作用是什么呢？关于这个问题，阿蒂亚有一段精彩的描述①：

---

① 参见〔英〕阿蒂亚著，《数学的统一性》，袁向东编译，大连理工大学出版社，2009 年版，第 35—36 页。

现在你可能会问：什么是严格性？一些人把“严格”定义为“rigormortis”（僵化），相信伴随纯粹数学而来的，是对那些知道如何得到正确答案的人的活动的抑制。我想，我们必须再次记住数学是人类的一种活动。我们的目标不仅是要发现些什么，而且要把信息传下去。……严格的数学论证的作用正在于使得本来是主观的、极度依赖个人直觉的事物，变得具有客观性并能够加以传递。我完全不想拒绝直觉带来的好处，只是强调为了能向他人传播，所获得的发现最终应以如下方式表述：清晰明确，毫不含糊，能被并无开创者那种洞察力的人所理解。……一旦你进入研究的下一阶段，对已得到的结构开始提出更复杂、更精细的问题时，对最初的基础性工作的深入理解就会变得越来越重要。所以，正是你所从事的研究本身，需要严格的论证，如果缺乏牢固的基础，你修建的整座建筑将岌岌可危。

正如前面讨论的那样，数学结论的发现，依赖的并不是一般性，也不是严谨性，而依赖的是主观的个人直觉。只是为了便于他人的理解、便于交流、便于研究的深入，数学的严谨性才变得异常重要。因此，在数学教育的过程中，应当注重严谨性。但是，我们也应当看到，因为严谨性的功能不在于发现知识，而在于解释知识，因此严谨性仅仅是数学思维的一个特征，而不是数学思维的本质。那么，在数学教育中，比严谨性更为重要的是什么呢？

二、在数学教育中体现数学基本思想

任何一件事情，一旦走到了极致就会出现异化，这便是孔子所说的“过犹不及”。数学的严谨性也是如此。在数学教育的过程中，如果过分强调数学的严谨性，数学的概念就会被表示成为一堆符号，数学的推理

就会被表现为一种形式，正如罗素在《西方哲学史》中所说的那样[①]：

> 我应当同意柏拉图的说法，纯粹数学并不是从知觉得来的。纯粹数学包含的都是类似“人是人”这样的同义反复，只不过是更为复杂罢了。要知道，判断一个数学命题是否正确，我们并不需要研究世界，而只需要研究符号的意义；而符号，当我们省略了定义之后，只不过是“或者”“不是”“一切”和“某些”之类的话语，并不指向现实世界中的任何事物。

罗素是哲学家，是数学逻辑主义学派的代表。在罗素的眼中，数学的命题或者数学的结论，就是用一些表示关系的逻辑术语把表示概念的名词连接在一起。如果不顾及概念的实际含义，那么，数学最终就如罗素评述的那样：

> 数学的真理，正如柏拉图所说，与知觉无关，这是一种非常奇特的真理，仅仅涉及符号。

罗素把数学的逻辑推到了极致，因此，不能也不应当用罗素的观点实施数学教育。虽然在现代数学中，结论的最终表述仅仅涉及符号和逻辑术语，平淡乏味，但在事实上，大多数数学结论的内涵是丰富多彩的，结论的形成过程是生机勃勃的。比如，在数量与数量关系的研究中，最具创造力的数学工具微积分的产生与发展；在图形与图形关系的研究中，最具想象力的数学表达黎曼几何的产生与发展。所以，在数学教育的过程中，不能过分沉迷于符号和逻辑术语，过分拘泥于数学的严谨性。完全基于符号化、形式化和公理化的数学教学，必然会掩盖数学

---

① 参见〔英〕伯特兰·罗素著，《西方哲学史》，何兆武、李约瑟译，商务印书馆，1976年版，第203—204页。