分析力学及理论力学札记

Notes on Analytical Mechanics and Theoretical Mechanics

梅凤翔　著

科学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

分析力学及理论力学札记

Notes on Analytical Mechanics and Theoretical Mechanics

梅凤翔　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为作者这30多年来在《力学与实践》上发表的40篇教育研究文章的汇编，包括分析力学札记30篇，理论力学札记9篇，及另1篇. 这些内容对分析力学和理论力学的基本概念、基本原理、运动方程、积分方法等提出了一些见解，并对分析力学和理论力学的名著给出评介.

本书可作为高等院校力学、物理学、数学等专业的大学生和教师的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

分析力学及理论力学札记/梅凤翔著. —北京: 科学出版社, 2019.7

ISBN 978-7-03-061811-5

Ⅰ. ①分… Ⅱ. ①梅… Ⅲ. ①分析力学-文集 ②理论力学-文集

Ⅳ. ①O316-53②O31-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 137116 号

责任编辑: 刘信力 / 责任校对: 邹慧卿

责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京凌奇印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 7 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2019 年 7 月第一次印刷 印张: 12 1/8

字数: 236 000

POD定价: 88.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

札记，即劄记，为读书时摘记的要点和心得. 作者从事分析力学和理论力学的教学和科研工作数十载，对这两门学科中的基本概念、基本原理、基本方程、积分方法等有了一些心得，写下了一些札记. 这些札记发表在《力学与实践》教育研究栏目，计 40 篇，其中分析力学札记 30 篇，理论力学札记 9 篇，及另 1 篇. 将这些札记汇集成册，相信对关心分析力学和理论力学的读者会有些帮助.

理论力学和分析力学，作为两门学科或作为两门课程，有共性，也有个性. 这两门学科同属一般力学 (动力学与控制) 的分支，同属非量子非相对论的经典力学，研究对象都是质点系，都研究静力学和动力学. 理论力学侧重矢量，分析力学侧重标量；理论力学侧重力，分析力学侧重能量. 理论力学的基础是牛顿运动定律，分析力学的基础是变分原理. 理论力学有关于内力的公理，分析力学有关于约束的公理. 理论力学通过力的性质可以导出有明显物理意义的动量守恒律、动量矩守恒律和机械能守恒律. 分析力学通过拉格朗日函数的性质可以导出广义动量守恒律和广义能量守恒律. 近年发展起来的对称性与守恒量研究表明，用对称性方法不仅可以导出广义动量守恒律、广义能量守恒律，还可导出没有明显物理意义的守恒律.

全书分为两章. 第一章分析力学札记，计 30 篇，涉及分析力学的基本概念、基本原理、基本方程、对称性与守恒量、梯度系统及其他、名著评介、学科评介等. 第二章理论力学札记，计 9 篇，及另 1 篇，涉及理论力学的基本概念、基本原理、守恒量、其他等.

作者感谢《力学与实践》期刊编辑部的大力支持，感谢关心力学教育研究的同事们. 感谢陈菊博士在整理资料、校对文本中付出的辛劳，特别感谢科学出版社刘信力同志的精心组织与安排.

梅凤翔

2019 年 3 月

目　　录

前言

第一章　分析力学札记 ····· 1

§1.1　对不稳定的约束实位移不是虚位移中的一个吗? ····· 1

§1.2　小议 Kane 方程 ····· 5

§1.3　关于虚位移与虚位移原理——分析力学札记之一 ····· 7

§1.4　关于非完整系统的 Paradoxical 行为——分析力学札记之二 ····· 10

§1.5　关于力学的作用量原理——分析力学札记之三 ····· 14

§1.6　关于力学系统的守恒量——分析力学札记之四 ····· 18

§1.7　关于 Lagrange 系统的 Lie 代数——分析力学札记之五 ····· 22

§1.8　分析力学由广义坐标到作用-角变量——分析力学札记之六 ····· 26

§1.9　非力学系统的对称性与守恒量 (I)——分析力学札记之七 ····· 31

§1.10　非力学系统的对称性与守恒量 (II)——分析力学札记之八 ····· 36

§1.11　关于经典 Appell-Hamel 例——分析力学札记之九 ····· 41

§1.12　关于非完整系统的 Lagrange 型方程——分析力学札记之十 ····· 45

§1.13　关于 Emden 方程的对称性——分析力学札记之十一 ····· 51

§1.14　关于对称性的注释——分析力学札记之十二 ····· 54

§1.15　同一类型对称性可生成不同类型守恒量——分析力学札记之十三 ··· 58

§1.16　关于 Lindelöf 方程——分析力学札记之十四 ····· 63

§1.17　关于非完整系统的线性积分——分析力学札记之十五 ····· 66

§1.18　关于 Birkhoff 方程和 Lagrange 方程——分析力学札记之十六 ····· 70

§1.19　关于一阶 Lagrange 系统——分析力学札记之十七 ····· 73

§1.20　关于梯度系统——分析力学札记之十八 ····· 77

§1.21　关于 Whittaker 方程和 Hojman-Urrutia 方程——分析力学札记之十九 ····· 80

§1.22　关于理想约束和虚位移原理——分析力学札记之二十 ····· 83

§1.23　关于 Еругин 函数——分析力学札记之二十一 ····· 88

§1.24　关于 δq 与 δp 的独立性问题——分析力学札记之二十二 ····· 93

§1.25　关于斜梯度系统——分析力学札记之二十三 ····· 96

§1.26　关于分析力学的三本名著——分析力学札记之二十四 ····· 102

§1.27　关于分析力学的定义与内容——分析力学札记之二十五 ····· 107

需要全本请访问 www.ertongbook.com

§1.28　关于非完整力学——分析力学札记之二十六 ····· 116
§1.29　关于 Poisson 的《力学教程》——分析力学札记之二十七 ····· 123
§1.30　关于 Appell 方程——分析力学札记之二十八 ····· 132
第二章　理论力学札记 ····· 146
§2.1　关于机械能守恒律——理论力学札记之一 ····· 146
§2.2　关于动量守恒律和动量矩守恒律——理论力学札记之二 ····· 149
§2.3　关于动力学普遍方程——理论力学札记之三 ····· 153
§2.4　理论力学中的概率问题 ····· 156
§2.5　关于广义动量守恒的物理意义——理论力学札记之四 ····· 160
§2.6　关于实位移、虚位移和能量积分——理论力学札记之五 ····· 163
§2.7　关于达朗贝尔原理——理论力学札记之六 ····· 165
§2.8　关于 Appell 的理论力学——理论力学札记之七 ····· 170
§2.9　关于对动点的动量矩定理——理论力学札记之八 ····· 173
§2.10　关于牛顿力学的力和拉格朗日力学的力——理论力学札记之九 ··· 179
附录 ····· 184

第一章　分析力学札记

§1.1　对不稳定的约束实位移不是虚位移中的一个吗?

关于在不稳定 (非定常) 约束下实位移是否处于无数个虚位移之中的问题, 是分析力学中一个重要问题. 目前, 教材中的叙述不够明确, 比较混乱, 甚至有错误. 因此, 很有必要加以澄清, 并给出正确的叙述.

1. *几种说法*

关于这个问题, 我们举出几种典型的说法:

1) 苏联Н. Н. Бухгольц 的书 [1] 中写道 "因而, 类型 (7)

$$[\text{即}\sum_{v=1}^{n}(a_{\rho v}\mathrm{d}x_v + b_{\rho v}\mathrm{d}y_v + c_{\rho v}\mathrm{d}z_v) + a_\rho \mathrm{d}t = 0]$$

的微分约束在坐标的变更上加上条件:

$$\sum_{v=1}^{n}(a_{\rho v}\delta x_v + b_{\rho v}\delta y_v + c_{\rho v}\delta z_v) = 0$$

$$(\rho = 1, 2, \cdots, r) \tag{8}$$

从这里清楚看出, 当有微分约束在场时, 正像当有非无限小约束在场时那样, 虚位移只有在那种场合下才和实位移相合, 即约束是稳定的, 亦即微分约束具有下列形式:

$$\sum_{v=1}^{n}(a_{\rho v}\mathrm{d}x_v + b_{\rho v}\mathrm{d}y_v + c_{\rho v}\mathrm{d}z_v) = 0 \tag{a}$$

而且 $a_{\rho v}, b_{\rho v}, c_{\rho v}$ 只是坐标的显函数而不是时间的显函数."

Н. Н. Бухгольц 的叙述是十分明确的. 无论有完整约束还是有线性非完整约束, 仅当约束是稳定的情形, 实位移才和虚位移相合.

2) 汪家讶[2] 写道: "对不稳定的约束, 实位移不属于虚位移的一列".

3) 周衍柏 [3] 写道: "但对不稳定约束来讲, 实位移与虚位移并不一致".

4) 王光远 [4] 写道: "但对非稳定系而言, 一般情况下实位移不与任何一个虚位移相重合".

汪、周、王的说法比较一致, 但没有指明约束是完整的还是非完整的.

5) 朱照宣、周起钊、殷金生的书 [5] 中写道: “在非定常约束情况下, 实位移不一定是无数虚位移中的一个”.

2. 正确的说法

Н. Н. Бухгольц 的叙述是明确的, 但是是不正确的. 我们可举出一个例子来说明. 如一质点在平面 Oxy 上运动, 它受到线性非完整约束

$$\dot{y} = ct\dot{x} \tag{b}$$

其中 $\dot{x}, \dot{y}$ 为点的速度分量, c 为某一常数, t 为时间. 显然, 约束 (b) 是不稳定的. 由 (b) 给出实位移应满足条件

$$\mathrm{d}y = ct\mathrm{d}x \tag{c}$$

而约束 (b) 加在虚位移上的条件为

$$\delta y = ct\delta x \tag{d}$$

由 (c)、(d) 知, 实位移是虚位移中的一个. 可见, 在不稳定约束下, 实位移也可能是虚位移中的一个.

汪家诉、周衍柏、王光远等书中的说法的前提不够明确. 如果只是针对完整约束而言, 便是对的; 如果是针对所有约束 (完整的、非完整的) 而言, 便是不正确的.

朱照宣、周起钊、殷金生合编的书中的说法是正确的. 他们的叙述, 既考虑到了完整约束, 又考虑到了非完整约束. 因为, 在不稳定约束下, 实位移可以不是虚位移中的一个, 也可以是虚位移中的一个.

实际上, 实位移是否处于无数个虚位移之中, 关键并不在于约束是稳定的还是不稳定的, 而在于约束方程相对速度是齐次的还是非齐次的.

对于前面提到的类型 (7), 它等价于方程

$$\sum_{v=1}^{n}(a_{\rho v}\dot{x}_v + b_{\rho v}\dot{y}_v + c_{\rho v}\dot{z}_v) + a_\rho = 0$$

$$(\rho = 1, 2, \cdots, r) \tag{e}$$

这些方程对 $\dot{x}_v, \dot{y}_v, \dot{z}_v$ 来说是非齐次的, 因为有非齐次项 a_ρ. 这时, 实位移的确不是虚位移中的一个. 反之, 如果约束方程相对速度是齐次的, 即有形

$$\sum_{v=1}^{n}(a_{\rho v}\dot{x}_v + b_{\rho v}\dot{y}_v + c_{\rho v}\dot{z}_v) = 0$$

$$(\rho = 1, 2, \cdots, r) \tag{f}$$

则实位移满足方程

$$\sum_{v=1}^{n}(a_{\rho v}\mathrm{d}x_v + b_{\rho v}\mathrm{d}y_v + c_{\rho v}\mathrm{d}z_v) = 0$$

$$(\rho = 1, 2, \cdots, r)$$

而虚位移满足方程

$$\sum_{v=1}^{n}(a_{\rho v}\delta x_v + b_{\rho v}\delta y_v + c_{\rho v}\delta z_v) = 0$$

$$(\rho = 1, 2, \cdots, r)$$

显然, 不论 $a_{\rho v}$, $b_{\rho v}$, $c_{\rho v}$ 是否显含时间 t (是否稳定), 实位移总是无数虚位移中的一个.

对于完整约束

$$f_\chi(x_v, y_v, z_v, t) = 0 \quad (\chi = 1, 2, \cdots, k) \tag{g}$$

将它对 t 求导数, 得到

$$\sum_{v=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\chi}{\partial x_v}\dot{x}_v + \frac{\partial f_\chi}{\partial y_v}\dot{y}_v + \frac{\partial f_\chi}{\partial z_v}\dot{z}_v\right) + \frac{\partial f_\chi}{\partial t} = 0$$

$$(\chi = 1, 2, \cdots, k) \tag{h}$$

显然, 如果 f_χ 中显含时间 t (不稳定), 则 (h) 式相对 $\dot{x}_v$, $\dot{y}_v$, $\dot{z}_v$ 是非齐次的. 这时, 实位移不与虚位移相合. 反之, 如果 f_χ 中不显含 t(稳定), 则 (h) 式中 $\partial f_\chi/\partial t = 0$, 而 (h) 式相对 $\dot{x}_v$, $\dot{y}_v$, $\dot{z}_v$ 是齐次的. 这时, 实位移处于虚位移之中. 因此, 对完整约束来说, 稳定与齐次性相一致.

对于非线性非完整约束

$$f_\rho(x_v, y_v, z_v, \dot{x}_v, \dot{y}_v, \dot{z}_v, t) = 0 \quad (\rho = 1, 2, \cdots, r) \tag{i}$$

按虚位移的Чеraев定义 [6,7] 有

$$\sum_{v=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{x}_v}\delta x_v + \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{y}_v}\delta y_v + \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{z}_v}\delta z_v\right) = 0$$

$$(\rho = 1, 2, \cdots, r) \tag{j}$$

如果 (i) 满足条件

$$\sum_{v=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{x}_v}\dot{x}_v + \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{y}_v}\dot{y}_v + \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{z}_v}\dot{z}_v\right) = 0$$

$$(\rho = 1, 2, \cdots, r) \tag{k}$$

则实位移 $\mathrm{d}x_v = \dot{x}_v\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y_v = \dot{y}_v\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}z_v = \dot{z}_v\mathrm{d}t$ 处于虚位移之中. 同时, 如实位移处于虚位移之中, 则条件 (k) 满足. 例如, 对于 Appell 例 [8]

$$\dot{z} = \frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

它是关于 $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ 的一次齐次式, 虚位移满足方程

$$\delta z = \frac{b}{a}\frac{\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

实位移满足方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= \frac{b}{a}\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} \\ &= \frac{b}{a}\frac{\dot{x}\mathrm{d}x + \dot{y}\mathrm{d}y}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\end{aligned}$$

可见, 实位移处于虚位移之中. 对于 Appell 例, 实位移属于虚位移的一列, 并不是因为约束是稳定的, 而是因为约束方程关于速度的齐次性. 对于稳定的、非齐次的非完整约束, 实位移一定不处于虚位移之中.

综上所述, 关于实位移是否处于虚位移之中的问题, 可作如下的正确叙述:

(1) 对于完整约束, 如果是稳定的, 则实位移是无数虚位移中的一个; 如果是不稳定的, 则实位移不是虚位移中的一个.

(2) 在不稳定约束下, 实位移不一定是无数虚位移中的一个 [5].

(3) 对于非完整约束, 实位移处于虚位移中的充要条件是约束方程关于速度的齐次性 [9].

参 考 文 献

[1] H. H. 蒲赫哥尔茨著. 理论力学基本教程 (下册). 钱尚武, 钱敏译. 北京: 高等教育出版社, 1957: 4.

[2] 汪家讦编. 分析动力学. 北京: 高等教育出版社, 1958: 177.

[3] 周衍柏编. 理论力学. 北京: 人民教育出版社, 1979: 265.

[4] 王光远编著. 应用分析动力学. 北京: 人民教育出版社, 1980: 20.

[5] 朱照宣, 周起钊, 殷金生编. 理论力学 (下册). 北京: 北京大学出版社, 1982: 298.

[6] Четаев Н Г. Устоичивость движения . Работы по аналитическои механики, Изд-во АН СССР, 1962.

[7] 梅凤翔. 非完整系统力学的历史与现状. 力学与实践, 1979, 1: 4.

[8] Appell, P. Exemple de mouvement d'un point assujetti à une liaison exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de la vitesse, Rend. Circ. Matem. Palcrmo. t., 1911, 32: 48–50.

[9] Румянцев В В, П. М. М. Т., 1979, 43: 583–590.
(原载《力学与实践》, 1984, 6(5): 51–52)

§1.2 小议 Kane 方程

美国斯坦福大学 T. R. Kane 教授 1961 年提出一种列写系统动力学方程的方法, 称为 "Kane 方法", 动力学方程称为 "Kane 动力学方程" 或简称 "Kane 方程". 以 Kane 为首在美国已形成学派. 自 80 年代初 Kane 访问中国以来, 我国学者对 Kane 方程进行了多方面深入的研究, 并取得一系列重要成果.

本文议论 Kane 方程, 即 "Kane 方程" 是 Kane 第一个发现的吗? Kane 方程是什么? 等问题, 并回顾对这一问题研究的一点儿近代史, 目的是一方面提供一些资料, 另一方面也发点儿小议论.

1. Kane 方程及其研究

1.1 Kane 方程与 Kane 方法的研究

1961 年 T. R. Kane 发表 "非完整系统动力学" 的论文 [1], 后经不断完善成为解动力学问题的 Kane 方法. 80 年代初, Kane 开始使用 "Kane 动力学方程" 的称谓 [2]. Huston 提出的方法是 Kane 方法的具体应用.

在我国, 对 Kane 方程及其推广进行了多方面的研究, 例如陈滨 [3]、戈正铭 [4]、薛克宗 [5]、钟奉俄 [6]、薛纭 [7]、乔永芬 [8]、姚书声 [9]、唐建国 [10]、冯乔生 [11] 等. 将 Kane 方程作为分析力学内容的专著较少; 将 Kane 方程纳入多刚体系统动力学的则较多, 如文献 [12,13].

1.2 议论

文献 [2] 中 "译者的话" 指出, "本书系统地介绍了一种列写系统动力学方程的方法, 通常称为凯恩方法. 该法由凯恩教授于 1961 年提出, 后来又不断完善. 它特别适用于复杂系统, 如果应用得当, 可以简化建立动力学方程的过程, 且所得结果比较简洁, 因而便于上机". 这段文字对 Kane 方法的评述是比较切合实际的.

2. Kane 是第一个发现 "Kane 方程" 的吗?

2.1 比 Kane 方程早 49 年的方程

一位研究经典力学的美国学者 3 年前给本文作者寄来 1912 年出版的一本德文书的复印本, 并夹一纸条, 用法文写道: "所谓 Kane 方程早在 Kane 出生之前就有了". 这本书是 *Robert Marcolongo. Theoretische Mechanik.* Leipzig und Berlin: Druckund Verlag Von BG Teubner, 1912.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

现将书中第 104 页上一段文字译出如下:

c) 最后我们考察非完整系统情形. 在坐标 q_ρ 的变分之间存在一些不可积分的线性关系. 在此情形, 笛卡儿坐标的变分遵从形式

$$\delta u_s = a_1^{(s)}\delta q_1 + a_2^{(s)}\delta q_2 + \cdots + a_w^{(s)}\delta q_w$$

其中 $\delta q_1, \delta q_2, \cdots, \delta q_w$ 是完全任意的. 将这些值代入基本方程 (2) , 或者

$$\sum(\Phi_s - \mu_s\ddot{u}_s)\delta u_s = 0$$

那么可分成形式

$$\sum \mu_s a_\sigma^{(s)}\ddot{u}_s = \sum a_\sigma^{(s)}\Phi_s = Q_\sigma \quad (\sigma = 1, \cdots, w) \qquad (*)$$

以上一段中方程 (*) 就是所谓 “Kane 方程”

2.2　Maggi 方程

1901 年 Maggi O 给出的应用于非完整系统动力学方程的新形式 [14], 基本与方程 (*) 一致. Maggi 指出, 非完整系统的所有运动方程都可由他的方程导出. Maggi 型方程的提法可参见文献 [4].

2.3　议论

(1) Kane 方程并不是 Kane 第一个发现的. (2) Maggi 方程因为是走向非完整系统分析动力学方程的中间结果, 因此, Maggi 方程一般不单独列为非完整动力学方程. 在非完整动力学历史上 Maggi 尚不能认为是奠基人之一. 一般地说, 非完整力学的奠基人有C. A. Чаплыгин, V. Volterra, P. Appell, П В. Воронец, G. Hamel[15].

3. Kane 方程是什么?

3.1　几种说法

(1) Lagrange 方程是 Kane 方程的特殊情况;

(2) Kane 方程与动力学普遍方程完全等效;

(3) 所谓 Kane 方程不过是 Appell 方程不通过 S 函数来表达的显式而已;

(4) Kane 方程是由 D'Alembert-Lagrange 原理导出的不引进动力学函数 G 的 Gibbs-Appell 方程.

3.2　议论

(1) “Kane 方程” 称谓不合理, 如以上 2.3 所述.

(2) 过高评价 Kane 方程的理论意义, 如 3.1 的第 (1), (2), 不甚合理. 因为, 只有动力学普遍方程或 D'Alembert-Lagrange 原理才具有普遍意义.

(3) “Kane 方程” 是由 D'Alembert-Lagrange 原理走向分析动力学方程的一个中间结果, 不应纳入分析力学范畴.

(4) Kane 方法 (Kane's Method) 被列入《力学名词》1993 年版, 这已经是较高评价了.

(5) Kane 方法的实际意义是如果应用得当, 可显示计算的优越性, 它是一种面向计算机的建模方法.

参 考 文 献

[1] Kane T R. Dynamics of nonholonomic systems. Appl Mech, ASME, 1961, 28(4): 574–578.

[2] Kane T R, Levinson D A. Dynamics: Theory and Application. New York: McGraw Hill, 1985; T. R. 凯恩, D. A. 列文松. 动力学: 理论与应用. 贾书惠, 薛克宗译. 北京: 清华大学出版社, 1988.

[3] 陈滨. 关于 Kane 方程. 力学学报, 1984, 16(3).

[4] 戈正铭, 程浥禾. Kane 方程研究. 上海力学, 1983, 4(2): 52–66.

[5] 薛克宗. Kane 方程与离散系统动力学方程探讨. 力学学报, 1986, 18(3): 281–288.

[6] 钟奉俄. 一般非完整系统的 Kane 方程. 力学学报, 1986, 18(4): 376–384.

[7] 薛纭. 有冲击力作用的 Kane 方程. 上海力学, 1986, 7(1): 33–41.

[8] 乔永芬. 变质量力学系统相对运动的万有 Kane 方程. 东北农学院学报, 1988, 19(4): 394–402.

[9] 姚书声. 非线性非完整系统在冲力作用时的 Kane 方程. 上海力学, 1989, 10(2): 20–27.

[10] 唐建国. 多刚体系统的 Kane 方程. 上海力学, 1990, 11(4): 79–85.

[11] 冯乔生. Kane 方程中的递推算法. 北京理工大学学报, 1990, 10(4-I): 96–101.

[12] 刘延柱, 洪嘉振, 杨海兴. 多刚体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 1989.

[13] 袁士杰, 吕哲勤. 多刚体系统动力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1992.

[14] Maggi O. Dialune nuove forme delle equazioni della dinamica, applicabili ai sistem i ano lonom i, Attidella Reale Accademica dei Lincei, Rend iconti della classe discience fisiche, matematiche enaturali, 1901, 10(2): 287–292.

[15] 梅凤翔. 非完整动力学研究. 北京: 北京工业学院出版社, 1987.

(原载《力学与实践》, 1996, 18(6): 59–60)

§1.3 关于虚位移与虚位移原理 ——分析力学札记之一

1. 是否可以不要可能位移的术语

在讨论虚位移时, 不少名著使用 3 个不同的术语: 实位移, 可能位移和虚位

移 [1–6]. 中国大百科全书力学卷虚位移条目也指出 [6], "约束随时间 t 改变的力学系统的位置变量 x_i 在 t_0 (t_0——经指定便为常量) 时的虚位移 δx_i 定义为适合 $t = t_0$ 的约束方程的无限小想象位移. 在约束许可情形下所能产生的位移称为 '可能位移', 用 $\mathrm{d}x_i$ 表示. 对于定常系统, 虚位移和可能位移两者相同, 但对非定常系统, 两者则不同"[6].

Лурье А И 指出, 如果约束不依赖于时间, 而实位移属于虚位移或可能位移的集合. 在非定常约束情形, $\mathrm{d}r_i$ 不属于这个集合. 如果抛弃可能位移的提法, 术语的缺陷 (由此得知 "实位移是不可能的") 便可消除. 今后我们认为虚位移与可能位移是同义的, 因为后一词足够好地表达了法文词 Virtuel 的内容 [7].

看来, Лурье的提议是好的, 不必使用可能位移一词, 也不必区别可能位移与虚位移. 汪家讦先生的书 [8] 没有使用可能位移, 只用了虚位移.

力学词典给出虚位移的简明定义: "在一定位置上, 为约束所允许的假想的无限小位移." 想来, 这个定义较好.

2. 虚位移原理的表述

《力学与实践》编辑部在 80 年代曾组织一批文章讨论虚位移原理.

虚位移原理有如下几种表述:

(1) 有理想约束的质点系平衡的充要条件是, 所有作用在质点组上的主动力在任意虚位移下所做的元功之和等于零 (对不可解约束) 或小于零 (对可解约束)[8].

(2) 一个原为静止的质点系, 如果约束是理想双面定常约束, 则系统保持静止的条件是所有作用于该系统的主动力对作用点的虚位移所做的功的和为零 [6].

(3) 受理想双面定常约束的质点系保持平衡的必要和充分条件是所有作用在质点系上的主动力对其作用点的虚位移所做的虚功之和为零 [9].

看来, 表述 (1) 最简单, 限制最少, 只有一个理想约束条件. 表述 (2) 中的条件没有说明是充要条件, 加了定常约束的限制. 表述 (3) 也加了定常约束的限制.

定常约束的限制是否可以去掉呢?

Гантмахер 表述的虚位移原理是, "为使系统某个 (与约束适合的) 位置是平衡位置, 其充要条件是在此位置上主动力在系统任何虚位移上的功之和等于零"[4]. 接着指出, "虚位移原理通常应用于定常约束. …… 如果约束是非定常的, 而与约束适合意味着, 如果取 $\boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{r}_v^0, \boldsymbol{u}_v = 0$ $(v = 1, \cdots, N)$ 约束在任意 t 都满足"[4].

著作 [5] 在 "定常" 一词后加一小注: "一般说来, 这个条件太强了, 只需 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$ 是 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 之一就可以. 在非定常约束情况下, 虚位移原理也可能局部地成立."

在前面 3 种表述中, 都没有涉及约束是否完整的问题. 在虚位移原理的表述中, 完整约束系统是前提而未注明呢, 还是说不论完整与否都成立?

虚位移原理与 D'Alembert 原理结合而成为动力学普遍方程或 D'Alembert-Lagrange 原理. 如果虚位移原理不适合非定常约束系统或非完整约束系统, 则 D'Alembert-Lagrange 原理也不适合非定常或非完整约束系统. 由此看来, 在虚位移原理中不应加约束定常, 约束完整等的限制. 限制只有一个: 约束是理想的. 因此, 表述 (1) 是全面的, 对双面约束情形表述为: 具有双面理想约束的质点系平衡的充要条件是, 所有作用在质点系上的主动力在任意虚位移上所做虚功之和等于零.

虚位移原理的上述表达使我们对 Lagrange 原来提出的原理有了更深层次的认识.

3. 虚位移原理是否可以不证明

关于虚位移原理的证明, 其必要性很容易; 其充分性证明大多采用 Ampère 的反证法, 要用到实位移是虚位移中的一个的条件. 这大概是虚位移原理表述中限制约束是定常的根源. 当然, 即使约束是定常的, 实位移也不一定是虚位移中的一个.

Бухгольц 指出, "'原理' 这一术语, 我们系指这种公理的 (亦即作为直接给予而不加证明地接受的) 命题, 它具有充分的普遍性而对这门科学来说是基本的, 这就是说所有其余命题都可以作为逻辑的推论从这一命题推出来."[10]

虚位移原理是分析静力学的基础, 也是动力学普遍方程的基础. 这两个基础使虚位移原理可以作为一个公理而不需证明地给出.

4. 议论

(1) 仅保留虚位移, 不用可能位移的术语;

(2) 虚位移原理作为一个公理, 不需证明;

(3) 虚位移原理适合任何双面理想约束系统, 不论约束是否定常, 也不论约束是否完整.

参 考 文 献

[1] Суслов Г К. Теоретическая Механика. Москва: Гостехиздат, 1944.

[2] Никораи Е Л. Теоретическая Механика. II. Москва: ГОНТИ, 1939.

[3] Некрасов А И. Курс Теоретической Механики Москва: Гостехиздат, 1953.

[4] Гантмахер Ф Р. Лекции по Аналитической Механике. Москва: Физматгиз, 1960.

[5] 朱照宣, 周起钊, 殷金生. 理论力学 (下册). 北京: 北京大学出版社, 1982.

[6] 中国大百科全书编辑部. 中国大百科全书 • 力学. 北京: 中国大百科全书出版社, 1985.

[7] Лурье А И. Аналитическая Механика. Москва: ГИФМЛ, 1961.

[8] 汪家讦. 分析动力学. 北京: 高等教育出版社, 1958.

[9] 力学词典编辑部. 力学词典. 北京: 中国大百科全书出版社, 1990.

[10] 蒲赫哥尔茨 H H. 理论力学基本教程 (下册). 钱尚武, 钱敏译. 北京: 高等教育出版社, 1957.

(原载《力学与实践》, 1999, 21(4): 69–70)

§1.4　关于非完整系统的 Paradoxical 行为
——分析力学札记之二

1. 问题的提出

V. I. Arnold 在 *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, 即 *Dynamical Systems III* 中指出 [1]: "我们用两个说明非完整系统 Paradoxical 行为的例子来结束本节."

"例 6　考虑斜面 C 上的冰刀, 有直角坐标 x, y; 假设 y 轴水平, x 轴向下. 令 (x, y) 为 "平衡" 冰刀与斜面接触点的坐标, 令 φ 为由 x 轴量度的转角. 约束方程是 $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$. 适当选取质量、长度和时间单位, 写出 Lagrange 函数为 $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\varphi}^2) + x$. 相应的带乘子的 Lagrange 方程容易积分. 例如, 如果在初始时刻 $y = 0$, 并令冰刀以角速度 $\dot{\varphi}(0) = \omega$ 转动, 那么有

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2\omega^2}\sin^2\omega t \\ y &= \frac{1}{2\omega^2}(\omega t - \frac{1}{2}\sin 2\omega t) \\ \varphi &= \omega t \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

这个解的有趣特点是, 冰刀平均地说不沿斜面下滑 $0 \leqslant x(t) \leqslant \frac{1}{2}\omega^2$."

"再考虑匀质球在铅垂管内的振荡问题. 似乎自然期望球沿螺线增加斜度地下降. 然而, 实际上 (如果球心初速不是铅垂的) 球在两固定水平面间作谐和振动".

这就是 Arnold 等所说的 Paradoxical 行为. Paradoxical 有佯谬的、似非而是的、反常的等涵义. 如果这个词在此理解为 "似非而是" 就没有问题的; 如果理解为反常的、奇怪的, 就有问题了.

郭仲衡先生 1993 年春天在 MMM-V 徐州会议上发表 "从冰橇问题谈起"[2] 的论文, 指出, Chetaev 解 (a) 不符合牛顿运动定律, 并给出符合牛顿定律的解

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t^2 \\ y &= vt \quad (v = \text{const.}) \\ \varphi &= \arctan\frac{v}{gt\sin\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

1993 年夏天在 ICNM-II 上的报告 "非完整动力学的约束 —— 约束力分析方法"[3] 中指出, Arnold 把冰刀不能沿斜面下滑的现象称为 "怪" 行为. 但他没有进一步回答为什么, 文献 [3] 又一次给出解 (b).

文献 [1] 给出问题的微分方程为

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\varphi} = t^2\sin\varphi\cos\varphi \\ &\dot{x} = t\cos^2\varphi, \quad \dot{y} = t\sin\varphi\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

并指出, 方程 (c) 的几乎所有解当 $t\to\infty$ 时, 趋向于点 $\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in z)$. 实际上, 这个解已由 Kozlov 在 1982 年给出了 [4].

这样, 对同一问题, 有了 3 种不同的解答 (a), (b), (c).

那么, 对斜面上的冰刀 (雪橇) 问题, 哪个解是合理的? 是否可用一种解去否定另一种解?

2. 问题的解释

解 (a) 实际上是 Chetaev 模型在初条件

$$t=0, \quad \varphi=0, \quad \dot{\varphi}=\omega, \quad x=y=\dot{x}=\dot{y}=0 \tag{1}$$

下的解. 方程 (c) 实际上是 Vacco 动力学方程. 解 (b) 似乎非 Chetaev, 非 Vacco 模型在初条件

$$\left.\begin{aligned} &t=0, \quad \varphi=\frac{\pi}{2}, \quad \dot{\varphi}=-\frac{g}{v}\sin\alpha \\ &x=\dot{x}=y=0, \quad \dot{y}=v \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

下的解.

3 个模型的解 (a), (b), (c) 都满足约束方程

$$\dot{x}\sin\varphi-\dot{y}\cos\varphi=0 \tag{3}$$

而满足方程 (3) 的解有无穷多个.

现在来看, 3 个模型是否符合牛顿定律. 由牛顿力学的质心运动定理和相对质心的动量矩定理, 有

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x} = R_x + g\sin\alpha \\ &\ddot{y} = R_y \\ &I\ddot{\varphi} = R_\varphi \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com