


华东交通大学教材（专著）基金资助项目

基于有限元-统计能量混合法的 无砟轨道结构动力特性研究

JIYU YOUXIANYUAN
TONGJI NENGLIANG HUNHEFA DE
WUZHA GUIDAO JIEGOU DONGLI TEXING YANJIU

罗文俊  著

华东交通大学教材（专著）基金资助项目

基于有限元-统计能量混合法的 无砟轨道结构动力特性研究

罗文俊 © 著



西南交通大学出版社

· 成 都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

基于有限元-统计能量混合法的无砟轨道结构动力特性研究 / 罗文俊著. —成都: 西南交通大学出版社, 2017.12

ISBN 978-7-5643-5961-4

I. ①基… II. ①罗… III. ①无砟轨道-结构动力分析 IV. ①U213.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 317855 号

基于有限元-统计能量混合法的无砟轨道结构动力特性研究

罗文俊 著

责任编辑	李伟
特邀编辑	张芬红
封面设计	何东琳设计工作室
出版发行	西南交通大学出版社 (四川省成都市二环路北一段 111 号 西南交通大学创新大厦 21 楼)
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮政编码	610031
网 址	http://www.xnjdcbs.com
印 刷	成都中铁二局永经堂印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm × 230 mm
印 张	11.25
字 数	228 千
版 次	2017 年 12 月第 1 版
印 次	2017 年 12 月第 1 次
书 号	ISBN 978-7-5643-5961-4
定 价	58.00 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前 言

2008年，速度350 km/h的京津城际铁路正式通车运营，标志着我国进入高速铁路时代。当前，我国快速客运专线、高速铁路迎来了前所未有的发展机遇。我国已成为世界上高速铁路里程最长的国家。铁路系统的功能是通过轮轨相互作用实现的，因此如何保持轨道结构平顺稳定，降低高速机车车辆与轨下基础的相互作用，减少养护维修费用，以及新型机车车辆的设计、制造等都是研究的热点，而这些问题都迫切需要掌握轮轨间的相互作用动力特性。所以车辆与轨道结构相互作用的关系一直是车辆动力学和轨道结构振动的研究主题。

安全、可靠、舒适是高速铁路发展的必然前提。而轮轨动力作用是直接影响这一前提的重要因素。铁路运营实践表明，行车速度提高会增大车辆与轨道结构间的动力作用，使轨道结构破坏更加严重。同时，轨道结构破坏又会加大钢轨不平顺，使车辆振动加剧，从而又使轨道结构破坏严重，加剧轨道变形的发展。因此轮轨系统动力学是铁路基础科学技术的核心之一，是影响车辆安全及平稳运行的关键因素。因此，全面深入地研究轮轨相互动力作用规律，进行车辆轨道动力学理论研究十分必要。但由于车辆轨道耦合动力系统的复杂性，同时对轮轨作用关系在耦合动力系统中的影响研究得还不够充分，从而出现了目前多种求解方法、多种模型并存的局面。随着各种数值计算理论与方法以及计算机技术的迅速发展，轮轨动力特性研究一定会发展到一个更高的层次。

高速铁路的发展必然要求轨道结构与之适应变化。当前，高速铁路主要有两种轨道结构类型：有砟轨道和无砟轨道。目前，国内外对有砟轨道动力学的研究已比较成熟，研究已经步入轮轨相互作用的系统动力学阶段，主要以细致地考虑上部机车车辆系统、下部轨道结构系统以及轮轨耦合作用于一体为主要特征，从系统工程角度出发研究车辆-轨道结构相互动力作用已成为轮轨动力特性研究的重要手段，是轮轨动力学发展的必然趋势，并逐渐被大量试验结果所证实。而无砟轨道作为新型轨道结构形式，

国内外对它的设计及动力学理论研究相对较少。我国高速铁路主要采用无砟轨道结构形式，无砟轨道下部结构又分为路基和高架桥梁两种形式。特别是当前我国高速铁路和客运专线无砟轨道应用不断增加，而无砟轨道结构动力学研究还不成熟，远远不能满足当前高速铁路和客运专线无砟轨道的发展。鉴于此种情况，进行无砟轨道-桥梁(路基)结构动力学深入、全面的系统研究迫在眉睫。

本书研究成果得到了华东交通大学雷晓燕教授、同济大学练松良教授的悉心指导。全书共分五章，均由罗文俊撰写。

本书的出版得到了国家自然科学基金(51468021, 51768022)、江西省青年重点基金(20171ACB21037)和华东交通大学教材出版基金的资助，在此一并表示感谢。

限于作者水平，疏漏和不妥之处敬请读者批评指正。

作者

2017年9月

目 录

第 1 章 列车-无砟轨道-桥梁 (路基) 有限元模型	1
1.1 列车-无砟轨道-桥梁耦合系统有限元模型	1
1.1.1 无砟轨道-桥梁单元	1
1.1.2 车辆单元	16
1.1.3 列车-无砟轨道-桥梁系统动力有限元方程	22
1.1.4 模型验证	23
1.2 列车-无砟轨道-路基耦合系统有限元模型	24
1.2.1 无砟轨道-路基单元	24
1.2.2 车辆单元	26
1.2.3 列车-无砟轨道-路基系统动力有限元方程	26
1.2.4 模型验证	26
1.3 本章小结	27
第 2 章 列车-无砟轨道-桥梁 (路基) 混合法模型	28
2.1 FE-SEA 混合法基本原理	28
2.1.1 结构振动方程	29
2.1.2 整体模态振动方程求解	30
2.1.3 求解局部模态方程	33
2.2 简支梁弯曲振动的 FE-SEA 混合法原理	33
2.2.1 简支梁混合法运动方程	33
2.2.2 简支梁混合法模型中修正参数的推导	35
2.2.3 简支梁混合法模型中局部运动方程的求解	36
2.2.4 列车-无砟轨道-桥梁 (路基) 混合法模型	37
2.2.5 列车-无砟轨道-桥梁混合法模型验证	38
2.3 混合法模型计算轨道结构响应具体步骤	39

2.4 本章小结	39
第3章 车辆-无砟轨道-桥梁耦合系统振动特性分析	40
3.1 车辆-无砟轨道-桥梁耦合系统振动的激励源	40
3.1.1 轨道不平顺	40
3.1.2 轨道不平顺的数值模拟方法	43
3.1.3 轨道不平顺的数值模拟结果	46
3.2 轨道不平顺及波长对无砟轨道桥梁振动特性的影响分析	47
3.2.1 无砟轨道-桥梁以及车辆参数的确定	47
3.2.2 不同工况的混合法模型	51
3.2.3 计算结果分析	51
3.3 不同行车速度对无砟轨道桥梁振动特性的影响分析	67
3.3.1 无砟轨道-桥梁以及车辆参数的确定	68
3.3.2 不同工况的混合法模型	68
3.3.3 计算结果分析	68
3.4 不同轨道参数对无砟轨道桥梁振动特性的影响分析	84
3.4.1 轨下垫板刚度的影响	84
3.4.2 轨下垫板阻尼的影响	94
3.4.3 CA 砂浆刚度系数的影响	103
3.4.4 CA 砂浆阻尼系数的影响	111
3.4.5 桥梁支承刚度系数的影响	119
3.4.6 桥梁支承阻尼系数的影响	128
3.5 本章小结	136
第4章 车辆-无砟轨道-路基耦合系统振动特性分析	140
4.1 车辆-无砟轨道-路基耦合系统振动的激励源	140
4.2 轨道不平顺及波长对无砟轨道-路基振动特性的影响分析	140
4.2.1 无砟轨道-路基以及车辆参数的确定	140
4.2.2 不同工况的混合法模型	141
4.2.3 计算结果分析	142
4.3 本章小结	154

第 5 章 高速列车诱发无砟轨道结构及桥梁振动的现场测试	156
5.1 某高速铁路轨道结构及桥梁振动现场测试分析	156
5.1.1 测试测序	156
5.1.2 测试方法及测点布置	156
5.1.3 测试工况	158
5.2 测试结果分析	159
5.2.1 测试结果时域统计分析	159
5.2.2 功率谱分析	162
5.2.3 Z 振级分析	164
5.3 理论模型预测结果与测试结果比较	165
5.3.1 计算参数	165
5.3.2 无砟轨道-桥梁结构振动加速度时程的理论预测与测试结果对比	166
5.3.3 无砟轨道-桥梁结构振动 Z 振级理论预测与测试结果对比	168
5.3.4 无砟轨道-桥梁结构加速度频谱理论预测与测试结果对比	168
5.4 本章小结	169
参考文献	171

第 1 章 列车-无砟轨道-桥梁（路基）有限元模型

我国高速铁路主要采用无砟轨道结构形式，无砟轨道下部结构又分为路基和高架桥两种形式。本章针对两种形式分别建立列车-无砟轨道-桥梁（路基）耦合系统有限元模型。

1.1 列车-无砟轨道-桥梁耦合系统有限元模型

列车在轨道桥梁上行驶时，车桥系统是耦合振动的。有限元法在车桥动力分析中应用较为普遍。本书根据列车-轨道桥梁系统运动的特点，在文献[1]车辆单元轨道单元模型的基础上，结合车辆-无砟轨道-桥梁四层梁模型^[2]，提出了以梁振动精确模态函数为插值函数的轨道-桥梁单元和动轮单元有限元模型。本书模型中针对轮轨竖向动力特性进行研究，整个耦合系统沿线路方向左右对称，因此研究取一半结构。整个列车-无砟轨道-桥梁耦合系统分解为两个单元，即上部车辆单元和下部无砟轨道-桥梁单元。轮对与钢轨弹性接触，用线性弹簧来模拟轮对与轨道间的关系，认为车轮不悬空（轮对始终与钢轨接触），即钢轨与轮对接触面为轮对的竖向运动轨迹。因此，车桥耦合垂向振动系统几何相容条件为：轮对的位移等于轮轨接触处钢轨位移与轨道不平顺幅值之间的差值。车辆轨道之间的轮轨作用力根据轮轨接触刚度和轮对位移的乘积求得。

基于有限元方法和 Lagrange 方程，本章推导了两种单元的刚度、质量、阻尼矩阵，建立了车辆-无砟轨道-桥梁耦合系统的显式时变耦合运动方程，采用直接积分法求解运动方程。该模型具有程序编制容易、自由度少、计算效率高的特点。

1.1.1 无砟轨道-桥梁单元

1. 无砟轨道-桥梁单元

无砟轨道-桥梁结构四层梁单元模型分别由钢轨、轨道板、混凝土底座板和桥梁组成^[3]，如图 1.1 所示。考虑轮轨间为弹性接触。 k_{y1} 、 c_{y1} 分别为轨下垫层支承弹性、阻尼系数； k_{y2} 、

c_{y2} 分别为CA砂浆层的支承弹性、阻尼系数； k_{y3} 、 c_{y3} 分别为混凝土底座板下桥梁的支承弹性、阻尼系数。因为直接运用无砟轨道-桥梁有限元模型时自由度很多，计算量很大。为减少计算自由度，本书在建立无砟轨道-桥梁有限元单元模型时采用了模态综合技术。同时，由于轨道板、混凝土底座板、桥梁的振动频率相对于钢轨要低，尤其是桥梁可采用相对较少的自由度即可获得满意的计算精度，因此模型中钢轨、轨道板、混凝土底座板、桥梁采用不同的自由度数^[4]。

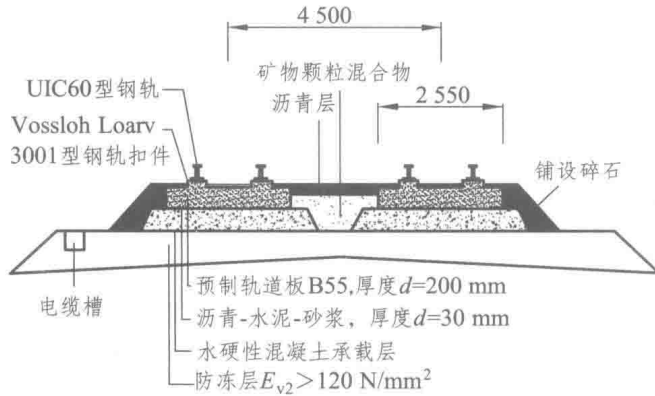


图 1.1 直线段桥上 CRTS II 型无砟轨道断面图

以多结点的一个新型梁单元对长度为 L 的无砟轨道-桥梁结构进行离散，如图 1.2 所示。用角标 r 、 s 、 f 、 b 分别表示钢轨、轨道板、混凝土底座板、桥梁，自由度数分别为 N_r 、 N_s 、 N_f 、 N_b 。轨道单元总自由度为 $N_z = N_r + N_s + N_f + N_b$ 。轨道桥梁单元中每一层梁在 x 处的位移可表示为

$$U(x, t) = q_1(t) \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) + q_2(t)x \left(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right) + q_3(t) \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) + q_4(t) \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) + \sum_{n=5}^N q_n(t) \varphi_n(x)$$

式中， $q_1(t)$ 、 $q_3(t)$ 为梁单元两端的结点位移； $q_2(t)$ 、 $q_4(t)$ 为梁单元两端的扭转角。

式中除前四项，其他为无结点位移项^[5, 6]，以下推导中将其处理为单元的虚拟结点，与实际结点类似， $q_n(t)$ 为第 n 个结点的位移，而 $\varphi_n(x)$ 则为对应的插值函数。

无砟轨道-桥梁单元的结点位移向量为

$$\mathbf{a}^e = \left\{ q_{r1} \quad q_{r2} \quad \cdots \quad q_{rN_r} \quad q_{s1} \quad q_{s2} \quad \cdots \quad q_{sN_s} \quad q_{f1} \quad q_{f2} \quad \cdots \quad q_{fN_f} \quad q_{b1} \quad q_{b2} \quad \cdots \quad q_{bN_b} \right\}_{(1 \times N_z)} \quad (1.1)$$

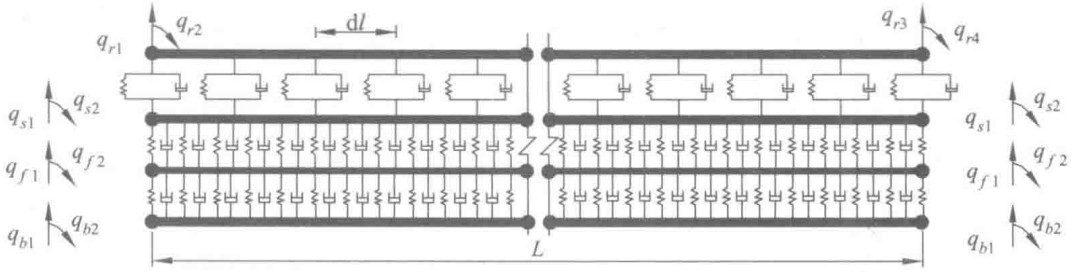


图 1.2 CRTS II 无砟轨道-桥梁单元模型

对应的无砟轨道-桥梁单元的插值函数为

$$\Phi(\mathbf{x}) = \left\{ \varphi_{r1}(x) \dots \varphi_{rN_r}(x) \quad \varphi_{s1}(x) \dots \varphi_{sN_s}(x) \quad \varphi_{f1}(x) \dots \varphi_{fN_f}(x) \quad \varphi_{b1}(x) \dots \varphi_{bN_b}(x) \right\}_{(1 \times N_z)} \quad (1.2)$$

式 (1.1) 中, $q_{rn} (n=1, \dots, N_r)$ 、 $q_{sn} (n=1, \dots, N_s)$ 、 $q_{fn} (n=1, \dots, N_f)$ 、 $q_{bn} (n=1, \dots, N_b)$ 分别对应钢轨、轨道板、混凝土底座板、桥梁的结点位移。式 (1.2) 中, $\varphi_{rn}(x) (n=1, \dots, N_r)$ 、 $\varphi_{sn}(x) (n=1, \dots, N_s)$ 、 $\varphi_{fn}(x) (n=1, \dots, N_f)$ 、 $\varphi_{bn}(x) (n=1, \dots, N_b)$ 分别对应钢轨、轨道板、混凝土底座板、桥梁的插值函数。

根据文献[4], 钢轨的长度只要选取大于 100 m, 模态阶数取大于 90 阶, 这样即可取得较为满意的结果。在文献[4]中, 杨广军详细研究了在弹性支承上的钢轨的多跨连续梁本征值问题, 将钢轨模拟为弹性地基上的 Euler 梁, 研究表明其振型函数和相同结构简支梁的各阶振型函数完全相同。其固有频率 $\omega_k = \sqrt{\bar{\omega}_i^2 + \frac{K}{m}}$ 比简支梁的固有频率有所提高, 其中 $\bar{\omega}_i = \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$ 为简支梁的固有频率; K 为轨下离散支承的等效刚度。取 $K = k_{y1} / dl$ ($k_{y1} = 51 \text{ MN/m}$, $dl = 0.65 \text{ m}$), 得出 160 m 钢轨 5 000 Hz 以下的固有频率 (见图 1.3), 其值与文献[7]基本吻合。

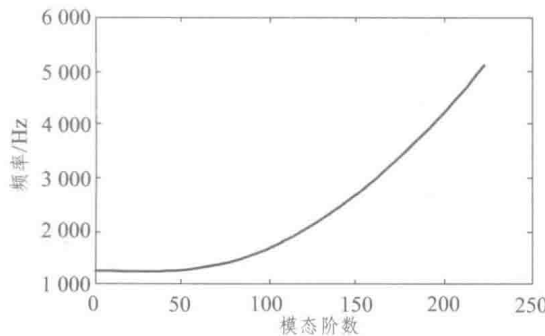


图 1.3 钢轨模态与固有频率

同时, 对于连续型预制轨道板, 其长厚比大于 25, 混凝土底座板、桥梁都视为梁模型,

模态函数可参考文献[8]。由于弹性地基上 Euler 梁的振型函数和相同结构简支梁的各阶振型函数完全相同，所以钢轨的插值函数 $\varphi_m(x)$ 取可为： $\varphi_{r1}(x) = 1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^2}x^3$ ， $\varphi_{r2}(x) = x - \frac{2}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3$ ， $\varphi_{r3}(x) = \frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^2}x^3$ ， $\varphi_{r4}(x) = -\frac{1}{l}x^2 + \frac{1}{l}x^3$ ， $\varphi_m(x) = \sin\frac{(n-4)\pi x}{L}$ ， $(n=5,6,\dots,N_r)$ 。将钢轨插值函数表达式中的角标 r 替换为 s 、 f 、 b ，即分别为轨道板、混凝土底座板、桥梁的对应的插值函数，其中轨道板、混凝土底座板、桥梁采用不同的自由度数^[4]。

建立单元的有限元方程，可运用 Hamilton 原理，即

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial L}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial \dot{a}} = 0 \quad (1.3)$$

其中， $L = T - \Pi$ ，为 Lagrange 函数， T 表示系统动能， Π 表示系统势能， R 表示系统耗散能。

2. 无砟轨道-桥梁单元的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵的推导

(1) 无砟轨道-桥梁单元的动能。

无砟轨道-桥梁单元的动能包括钢轨、预制轨道板、混凝土底座板以及桥梁的弯曲动能。

① 钢轨的质量矩阵。

钢轨上任意一点的速度：

$$\dot{v}_r = \sum_{n=1}^{N_r} \dot{q}_m(t) \varphi_m(x) = [\varphi_{r1} \quad \varphi_{r2} \quad \dots \quad \varphi_{rN_r}] \dot{q}_r = N_r^T \dot{q}_r \quad (1.4)$$

钢轨的弯曲动能：

$$T_r = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_r \dot{v}_r^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_r (N_r^T \dot{q}_r)^T (N_r^T \dot{q}_r) d\Omega = \frac{1}{2} \dot{q}_r^T \int_L \rho_r A_r N_r N_r^T dx \dot{q}_r = \frac{1}{2} \dot{q}_r^T M_r \dot{q}_r \quad (1.5)$$

其中， $M_{r(N_r \times N_r)} = \int_0^L \rho_r A_r N_r N_r^T dx$ 。

$$M_r = \rho_r A_r \begin{bmatrix} \frac{156L}{420} & \frac{-22L^2}{420} & \frac{54L}{420} & \frac{13L^2}{420} & M_r(1,5) & \dots & M_r(1,j) & \dots & M_r(1,N_r) \\ & \frac{4L^3}{420} & \frac{-13L^2}{420} & \frac{-3L^3}{420} & M_r(2,5) & \dots & M_r(2,j) & \dots & M_r(2,N_r) \\ & & \frac{156L}{420} & \frac{22L^2}{420} & M_r(3,5) & \dots & M_r(3,j) & \dots & M_r(3,N_r) \\ & & & \frac{4L^3}{420} & M_r(4,5) & \dots & M_r(4,j) & \dots & M_r(4,N_r) \\ & & & & M_r(5,5) & \dots & & & M_r(5,N_r) \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & M_r(N_r,N_r) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

其中：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_r[1, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{r1}(x) \varphi_{r(n+4)}(x) dx = \int_0^L \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 \mathbf{M}_r[2, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{r2}(x) \varphi_{r(n+4)}(x) dx = \int_0^L x \left(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 \mathbf{M}_r[3, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{r3}(x) \varphi_{r(n+4)}(x) dx = \int_0^L \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 \mathbf{M}_r[4, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{r4}(x) \varphi_{r(n+4)}(x) dx = \int_0^L \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 \mathbf{M}_r[(m+4), (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{r(m+4)}(x) \varphi_{r(n+4)}(x) dx = \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

式 (1.7) 中, $m, n = 1, 2, \dots, (N_r - 4)$ 。

② 轨道板的质量矩阵。

轨道板上任意一点的速度：

$$\dot{\mathbf{v}}_s = \sum_{n=1}^{N_s} \dot{q}_{sn}(t) \varphi_{sn}(x) = [\varphi_{s1} \quad \varphi_{s2} \quad \dots \quad \varphi_{sN_s}] \dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{N}_s^T \dot{\mathbf{q}}_s \tag{1.8}$$

轨道板的弯曲动能：

$$T_s = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \rho_s \dot{\mathbf{v}}_s^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \rho_s (\mathbf{N}_s^T \dot{\mathbf{q}}_s)^T (\mathbf{N}_s^T \dot{\mathbf{q}}_s) d\Omega = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_s^T \int_L \rho_s A_s N_s N_s^T dx \dot{\mathbf{q}}_s = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_s^T \mathbf{M}_s \dot{\mathbf{q}}_s \tag{1.9}$$

其中, $\mathbf{M}_{s(N_s \times N_s)} = \int_0^L \rho_s A_s N_s N_s^T dx$ 。

$$\mathbf{M}_s = \rho_s A_s \begin{bmatrix} \frac{156L}{420} & \frac{-22L^2}{420} & \frac{54L}{420} & \frac{13L^2}{420} & \mathbf{M}_s(1,5) & \dots & \mathbf{M}_s(1,j) & \dots & \mathbf{M}_s(1,N_s) \\ & \frac{4L^3}{420} & \frac{-13L^2}{420} & \frac{-3L^3}{420} & \mathbf{M}_s(2,5) & \dots & \mathbf{M}_s(2,j) & \dots & \mathbf{M}_s(2,N_s) \\ & & \frac{156L}{420} & \frac{22L^2}{420} & \mathbf{M}_s(3,5) & \dots & \mathbf{M}_s(3,j) & \dots & \mathbf{M}_s(3,N_s) \\ & & & \frac{4L^3}{420} & \mathbf{M}_s(4,5) & \dots & \mathbf{M}_s(4,j) & \dots & \mathbf{M}_s(4,N_s) \\ & & & & \mathbf{M}_s(5,5) & & \dots & & \mathbf{M}_s(5,N_s) \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & \mathbf{M}_s(N_s, N_s) \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

其中：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_s[1, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{s1}(x) \varphi_{s(n+4)}(x) dx = \int_0^L \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 \mathbf{M}_s[2, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{s2}(x) \varphi_{s(n+4)}(x) dx = \int_0^L x \left(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 \mathbf{M}_s[3, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{s3}(x) \varphi_{s(n+4)}(x) dx = \int_0^L \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 \mathbf{M}_s[4, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{s4}(x) \varphi_{s(n+4)}(x) dx = \int_0^L \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 \mathbf{M}_s[(m+4), (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{s(m+4)}(x) \varphi_{s(n+4)}(x) dx = \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

式中， $m, n = 1, 2, \dots, (N_s - 4)$ 。

③ 混凝土支承层的质量矩阵。

混凝土支承层任意一点的速度：

$$\dot{\mathbf{v}}_f = \sum_{n=1}^{N_f} \dot{q}_{fn}(t) \varphi_{fn}(x) = [\varphi_{f1} \quad \varphi_{f2} \quad \dots \quad \varphi_{fN_f}] \dot{\mathbf{q}}_f = \mathbf{N}_f^T \dot{\mathbf{q}}_f \tag{1.12}$$

混凝土支承层的弯曲动能：

$$\begin{aligned}
 T_f &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \rho_f \dot{\mathbf{v}}_f^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \rho_f (\mathbf{N}_f^T \dot{\mathbf{q}}_f)^T (\mathbf{N}_f^T \dot{\mathbf{q}}_f) d\Omega \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_f^T \int_L \rho_f A_f \mathbf{N}_f \mathbf{N}_f^T dx \dot{\mathbf{q}}_f = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_f^T \mathbf{M}_f \dot{\mathbf{q}}_f
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

其中， $\mathbf{M}_f (N_f \times N_f) = \int_0^L \rho_f A_f \mathbf{N}_f \mathbf{N}_f^T dx$ 。

$$\mathbf{M}_f = \rho_f A_f \begin{bmatrix} \frac{156L}{420} & \frac{-22L^2}{420} & \frac{54L}{420} & \frac{13L^2}{420} & \mathbf{M}_f(1,5) & \dots & \mathbf{M}_f(1,j) & \dots & \mathbf{M}_f(1,N_f) \\ & \frac{4L^3}{420} & \frac{-13L^2}{420} & \frac{-3L^3}{420} & \mathbf{M}_f(2,5) & \dots & \mathbf{M}_f(2,j) & \dots & \mathbf{M}_f(2,N_f) \\ & & \frac{156L}{420} & \frac{22L^2}{420} & \mathbf{M}_f(3,5) & \dots & \mathbf{M}_f(3,j) & \dots & \mathbf{M}_f(3,N_f) \\ & & & \frac{4L^3}{420} & \mathbf{M}_f(4,5) & \dots & \mathbf{M}_f(4,j) & \dots & \mathbf{M}_f(4,N_f) \\ & & & & \mathbf{M}_f(5,5) & \dots & & & \mathbf{M}_f(5,N_f) \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & \mathbf{M}_f(N_f, N_f) \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

其中：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_f[1, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{f1}(x) \varphi_{f(n+4)}(x) dx = \int_0^L \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 \mathbf{M}_f[2, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{f2}(x) \varphi_{f(n+4)}(x) dx = \int_0^L x \left(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 \mathbf{M}_f[3, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{f3}(x) \varphi_{f(n+4)}(x) dx = \int_0^L \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 \mathbf{M}_f[4, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{f4}(x) \varphi_{f(n+4)}(x) dx = \int_0^L \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 \mathbf{M}_f[(m+4), (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{f(m+4)}(x) \varphi_{f(n+4)}(x) dx = \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

式中， $m, n = 1, 2, \dots, (N_f - 4)$ 。

④ 桥梁的质量矩阵。

桥梁上任意一点的速度：

$$\dot{v}_b = \sum_{n=1}^{N_b} \dot{q}_{bn}(t) \varphi_{bn}(x) = [\varphi_{b1} \quad \varphi_{b2} \quad \dots \quad \varphi_{bN_b}] \dot{\mathbf{q}}_b = \mathbf{N}_b^T \dot{\mathbf{q}}_b \tag{1.16}$$

桥梁的弯曲动能：

$$\begin{aligned}
 T_b &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \rho_b \dot{v}_b^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \rho_b (\mathbf{N}_b^T \dot{\mathbf{q}}_b)^T (\mathbf{N}_b^T \dot{\mathbf{q}}_b) d\Omega \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_b^T \int_L \rho_b A_b \mathbf{N}_b \mathbf{N}_b^T dx \dot{\mathbf{q}}_b = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_b^T \mathbf{M}_b \dot{\mathbf{q}}_b
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

其中， $\mathbf{M}_{b(N_b \times N_b)} = \int_0^L \rho_b A_b \mathbf{N}_b \mathbf{N}_b^T dx$ 。

$$\mathbf{M}_b = \rho_b A_b \begin{bmatrix} \frac{156L}{420} & \frac{-22L^2}{420} & \frac{54L}{420} & \frac{13L^2}{420} & \mathbf{M}_b(1,5) & \dots & \mathbf{M}_b(1,j) & \dots & \mathbf{M}_b(1,N_b) \\ & \frac{4L^3}{420} & \frac{-13L^2}{420} & \frac{-3L^3}{420} & \mathbf{M}_b(2,5) & \dots & \mathbf{M}_b(2,j) & \dots & \mathbf{M}_b(2,N_b) \\ & & \frac{156L}{420} & \frac{22L^2}{420} & \mathbf{M}_b(3,5) & \dots & \mathbf{M}_b(3,j) & \dots & \mathbf{M}_b(3,N_b) \\ & & & \frac{4L^3}{420} & \mathbf{M}_b(4,5) & \dots & \mathbf{M}_b(4,j) & \dots & \mathbf{M}_b(4,N_b) \\ & & & & \mathbf{M}_b(5,5) & \dots & & \dots & \mathbf{M}_b(5,N_b) \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & \mathbf{M}_b(N_b, N_b) \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_b[1, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{f1}(x) \varphi_{f(n+4)}(x) dx = \int_0^L \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
\mathbf{M}_b[2, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{f2}(x) \varphi_{f(n+4)}(x) dx = \int_0^L x \left(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
\mathbf{M}_b[3, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{f3}(x) \varphi_{f(n+4)}(x) dx = \int_0^L \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
\mathbf{M}_b[4, (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{f4}(x) \varphi_{f(n+4)}(x) dx = \int_0^L \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
\mathbf{M}_b[(m+4), (n+4)] &= \int_0^L \varphi_{f(m+4)}(x) \varphi_{f(n+4)}(x) dx = \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx
\end{aligned} \tag{1.19}$$

式中, $m, n = 1, 2, \dots, (N_b - 4)$ 。

按照有限元法“对号入座”的原则组成轨道桥梁单元的质量矩阵:

$$\mathbf{M}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_r(N_r \times N_r) & & & \\ & \mathbf{M}_s(N_s \times N_s) & & \\ & & \mathbf{M}_f(N_f \times N_f) & \\ & & & \mathbf{M}_b(N_b \times N_b) \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

\mathbf{M}_r 、 \mathbf{M}_s 、 \mathbf{M}_f 、 \mathbf{M}_b 分别为钢轨、轨道板、混凝土底座板、桥梁部分的单元协调质量矩阵, \mathbf{M}_I 是维数为 $N_z \times N_z$ 的对称阵。

(2) 轨道单元的刚度矩阵。

轨道单元的势能包括钢轨、连续轨道板、混凝土底座板和桥梁的弯曲势能, 同时还有离散支承及连续支承弹簧的势能。

① 钢轨刚度矩阵。

钢轨任意一点的位移:

$$v_r = \sum_{n=1}^{N_r} q_{rn}(t) \varphi_{rn}(x) = [\varphi_{r1} \quad \varphi_{r2} \quad \dots \quad \varphi_{rN_r}] \mathbf{q}_r = \mathbf{N}_r^T \mathbf{q}_r \tag{1.21}$$

钢轨的弯曲势能:

$$\begin{aligned}
\Pi_r &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \sigma \varepsilon d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \frac{1}{E_r} \sigma^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \frac{1}{E_r} \left(\frac{M_y}{I_r} \right)^2 d\Omega \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \frac{1}{E_r} \left(-E_r \frac{d^2 v_r}{dx^2} y \right)^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_L E_r I_r \left(\frac{d^2 v_r}{dx^2} \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{q}_r^T \int_L E_r I_r \left(\frac{d^2 \mathbf{N}_r^T}{dx^2} \right)^T \left(\frac{d^2 \mathbf{N}_r^T}{dx^2} \right) dx \mathbf{a}_r^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}_r^T \mathbf{K}_r \mathbf{q}_r
\end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\mathbf{K}_r = E_r I_r \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \mathbf{K}_r(1,5) & \dots & \mathbf{K}_r(1,j) & \dots & \mathbf{K}_r(1,N_r) \\ & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \mathbf{K}_r(2,5) & \dots & \mathbf{K}_r(2,j) & \dots & \mathbf{K}_r(2,N_r) \\ & & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \mathbf{K}_r(3,5) & \dots & \mathbf{K}_r(3,j) & \dots & \mathbf{K}_r(3,N_r) \\ & & & \frac{4}{L} & \mathbf{K}_r(4,5) & \dots & \mathbf{K}_r(4,j) & \dots & \mathbf{K}_r(4,N_r) \\ & & & & \mathbf{K}_r(5,5) & \dots & \mathbf{K}_r(5,j) & & \mathbf{K}_r(5,N_r) \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & \mathbf{K}_r(N_r, N_r) \end{bmatrix}_{(N_r \times N_r)} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_r[1, (n+4)] &= \int_0^L \left\{ \frac{d^2[\varphi_{r1}(x)]}{dx^2} \right\} \left\{ \frac{d^2[\varphi_{r(n+4)}(x)]}{dx^2} \right\} dx = \int_0^L \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
\mathbf{K}_r[2, (n+4)] &= \int_0^L \left\{ \frac{d^2[\varphi_{r2}(x)]}{dx^2} \right\} \left\{ \frac{d^2[\varphi_{r(n+4)}(x)]}{dx^2} \right\} dx = \int_0^L \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
\mathbf{K}_r[3, (n+4)] &= \int_0^L \left\{ \frac{d^2[\varphi_{r3}(x)]}{dx^2} \right\} \left\{ \frac{d^2[\varphi_{r(n+4)}(x)]}{dx^2} \right\} dx = \int_0^L \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
\mathbf{K}_r[4, (n+4)] &= \int_0^L \left\{ \frac{d^2[\varphi_{r4}(x)]}{dx^2} \right\} \left\{ \frac{d^2[\varphi_{r(n+4)}(x)]}{dx^2} \right\} dx = \int_0^L \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
\mathbf{K}_r[(m+4), (n+4)] &= \int_0^L \left\{ \frac{d^2[\varphi_{r(m+4)}(x)]}{dx^2} \right\} \left\{ \frac{d^2[\varphi_{r(n+4)}(x)]}{dx^2} \right\} dx \\
&= \int_0^L \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right)^2 dx
\end{aligned} \quad (1.24)$$

其中, $m, n = 1, 2, \dots, (N_r - 4)$ 。

② 轨道板的刚度矩阵。

轨道板上任意一点的位移:

$$\mathbf{v}_s = \sum_{n=1}^{N_s} q_{sn}(t) \varphi_{sn}(x) = [\varphi_{s1} \quad \varphi_{s2} \quad \dots \quad \varphi_{sN_s}] \mathbf{q}_r = \mathbf{N}_r^T \mathbf{q}_r \quad (1.25)$$

轨道板的弯曲势能: