豪斯道夫导数模型及其工程应用

Hausdorff Derivative Models with Engineering Applications

陈 文 蔡 伟 梁英杰 等◎著

科学出版社

豪斯道夫导数模型及其工程应用

陈　文　蔡　伟　梁英杰　等　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

复杂介质的力学行为经常表现出“反常”现象，因此不能采用传统的力学模型描述。豪斯道夫导数作为一种新型的建模工具，可以用来模拟复杂介质的流变、扩散等现象。本书主要介绍豪斯道夫导数的建模方法和工程应用。在理论研究方面，本书介绍了豪斯道夫导数的定义及其理论基础，并给出了统计力学解释；在实际应用方面，概述了豪斯道夫导数模型在流体力学、黏弹性力学、振动力学等方面的应用。此外，本书还介绍了求解豪斯道夫导数方程的计算方法和豪斯道夫导数模型的广义形式。本书涵盖了豪斯道夫导数的基本知识、建模方法、统计力学解释、工程应用和数值计算方法。

本书可供从事水文工程、土木工程、交通工程、采矿工程等研究的科技人员参考，亦可作为高等学校工程力学、环境力学、岩土力学等专业的研究生选修课教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

豪斯道夫导数模型及其工程应用/陈文等著．—北京：科学出版社，2019.6
ISBN 978-7-03-061728-6

Ⅰ．①豪…　Ⅱ．①陈…　Ⅲ．①豪斯道夫空间-应用-模型（建筑）-研究　Ⅳ．①O189.11　②TU206

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 122136 号

责任编辑：童安齐 / 责任校对：王万红
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2019 年 6 月第　一　版　开本：B5（720×1000）
2019 年 6 月第一次印刷　印张：7 1/4
字数：130 000

定价：80.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉）
销售部电话 010-62136230　编辑部电话 010-62135397-2047

作者简介

陈文（1967 年 2 月—2018 年 11 月），国家杰出青年基金获得者，第十一届和十二届江苏省政协委员，河海大学教授、博士生导师，民主促进会会员。

1988 年 7 月毕业于华中科技大学工程力学专业，获学士学位；1997 年 2 月毕业于上海交通大学，获博士学位；先后在日本信州大学、挪威奥斯陆大学从事博士后研究。曾任职于镇江市华通集团、上海水下工程研究所和北京应用物理与计算机科学研究所，2006 年 3 月起就职于河海大学工程力学系。先后担任河海大学力学学科主任，土木工程学院副院长，力学与材料学院副院长、院长。同时担任中国力学学会环境力学专业委员会副主任、江苏省力学学会副秘书长、国际自动控制联合会线性控制专业委员会委员等学术职务。

毕生致力于计算力学和环境力学、软物质力学行为的建模，以及统计力学、工业设计等领域的科研、教学工作。围绕应用力学建模、计算力学和工程力学研究，主持和承担了 30 余项各类科研任务，包括国家杰出青年基金 1 项，国家自然科学基金 9 项，水利部公益性行业科研专项基金 1 项，教育部基金 1 项等；发表 SCI 索引论文 250 余篇，SCI 论文他人引用达 3000 余次；授权软件著作权 12 件、发明专利 9 项；出版中文专著 3 部和英文专著 1 部。2014～2017 年连续 4 年入选中国高被引学者榜。兼任 2 个 SCI 源国际期刊的副主编，3 个 SCI 源国际期刊的编委，3 个国际期刊的副主编，1 个 EI 源期刊和 3 个国内核心期刊的编委等。

2012 年获江苏省特聘教授（重点资助）、江苏省“333 人才工程”中青年科技领军人才、教育部“新世纪优秀人才支持计划”。曾受聘德国洪堡基金会高级研究员、澳大利亚管理人才奖研究员、日本学术振兴会外国人特别研究员。曾获得“南京市十大科技之星”、中国侨界贡献奖（创新人才）、杜庆华工程计算方法奖等人才计划和学术奖励。

自入职河海大学以来，主持首届“教育部来华留学英语授课品牌课程”1 门和“江苏高校省级外国留学生英文授课精品课程”1 门。培养的博士研究生有 4 人获得江苏省优秀博士论文奖励，2 人获得宝钢特等奖学金，1 人入选“中国大学生年度人物”提名；指导的研究生有 40 余人次到海外进行长、短期学术访问或攻读博士学位。

前　言

随着科学研究的发展，许多“反常”现象无法用传统的非线性模型刻画，而采用分数阶微积分建模时，分数阶导数算子的全局性会消耗大量的计算成本。在此背景下作者提出了豪斯道夫①导数建模方法。豪斯道夫导数，也称为局部分数阶导数（或分形导数），与传统的分数阶导数既有联系又有显著不同。豪斯道夫导数能够描述时间历史依赖问题和空间非局部问题，然而其定义是一种局部算子，可以有助于节省计算成本。尽管目前有很多种分形导数的定义，豪斯道夫导数无疑是一种数学形式简单且易于数值计算的建模方法。

由于时空分数阶导数扩散方程的局限性，陈文引入尺度变换的概念重新度量时空，并于 2006 年首次提出了豪斯道夫导数的概念，同时建立了豪斯道夫导数扩散方程。经过数年的研究，豪斯道夫导数的理论体系和应用研究已经发展较为完善。本书比较了豪斯道夫微积分和分数阶微积分的区别与联系；给出了豪斯道夫导数的定义和统计力学解释，并讨论了其在流体力学、黏弹性力学、振动力学与声波耗散等方面的工程应用及数值算法；给出了豪斯道夫导数的一般形式，即结构导数。豪斯道夫扩散方程描述空间上的伸展高斯分布及时间上的伸展指数松弛，其基本解与非欧几里得距离的概念紧密联系；豪斯道夫黏弹性理论较好地解释了复杂流变行为时间尺度变换的概念和伸展指数松弛分布。

本书的内容主要源自陈文及其课题组近几年关于豪斯道夫导数的研究成果，旨在为相关研究领域的学者提供必要的理论基础，并阐明研究现状、潜在的研究问题和方向。为了保证体系的完整性，书中部分章节也介绍了其他研究学者的相关成果。本书拟阐述到近期为止与豪斯道夫导数相关的研究工作，但仍不可避免地出现遗漏和不足之处，对此深表歉意。

陈文基于已有的研究基础，撰写了全书的大纲，并统筹安排了全书的撰写工作。本书由陈文、蔡伟和梁英杰主持撰写，其中陈文和蔡伟负责撰写第一章，蔡伟和梁英杰负责撰写第二章，杨旭和蔡伟负责撰写第三章，蔡伟和苏祥龙负责撰写第四章，陈文和蔡伟负责撰写第五章，梁英杰和徐伟负责撰写第六章，陈文和王发杰负责撰写第七章，梁英杰、徐伟和杨旭负责撰写第八章。苏祥龙和徐伟负

---

① 豪斯道夫（Felix Hausdorff），1868 年出生于华沙。他是拓扑学的开创者，在集合论和泛函分析领域做出了杰出的贡献。

责全书的修改和排版工作。

本书的部分研究工作得到国家自然科学基金面上项目（项目编号：11702083，11702084，11702085）和中央高校基本科研业务费项目（项目编号：2017B03114，2018B687X14）的支持，特此致谢。

由于作者水平和经验有限，书中难免存在不足，恳请各位同仁批评指正。

作　者

2018 年 9 月

于南京

目　录

第一章　概　　论

1.1　分形导数的发展历史

传统的科学研究和工程设计是以欧几里得几何为基础的，即假设研究对象的空间几何性质是整数维的。但是，自然界中物体的几何结构大多具有不规则的形状且不连续，比如多孔的材料、复杂的植物形态、粗糙的断裂表面等。随着认识水平的不断提高，尤其是大量的新理论、新技术及新研究领域的不断涌现，人们很难再用欧几里得几何来描述这些复杂的研究对象，欧几里得几何的局限性促使人们寻找一个更好的几何描述工具。

自从美国数学家 Mandelbrot 引入分形的概念描述“英国海岸线有多长”的问题以来，分形理论就成为一个研究分形几何特征的重要工具，其自身也发展成为一门新兴的科学分支[1,2]。目前，分形理论已经广泛应用于物理学、材料科学、地质科学、生命科学等众多领域，比如用于湍流的模拟、材料表面的模拟、海岸线轮廓的分析及大脑皮层面积的计算等。研究学者发现，对于分形介质而言，其物理量之间呈现出幂律依赖的现象。例如，分形介质的面积与长度之间的关系可以表示[3]为

$$S = L^D \tag{1.1}$$

式中，L 为以长方形盒子测量分形岛的纵横尺寸的最大值；S 为分形岛的面积；D 为分形维数。又如，分形介质的质量满足如下幂律关系[4]：

$$M(R) = kR^D \quad D < 3 \tag{1.2}$$

式中，M 为分形介质的质量；R 为立方体边长或者球半径。

分形方法是描述不规则几何结构的一个强有力的数学工具，但是分形描述还不能满足许多工程和科学研究的精细定量要求，因此分形研究至今仍停留在理论层次，并未在实际工程中得到广泛应用。要精确地描述和解决力学和物理问题必需采用微积分方法进行定量描述。经典力学和物理理论成立的前提就是连续整数维数的假设，并用传统的微积分做相应的定量描述。当对象为不连续的分形介质时，经典理论便不再成立，如何对非连续性介质进行精细地分析和描述，成为现阶段科学研究的一个难题。

经典的牛顿力学理论是基于时间和空间均处处连续的，因此基本的物理量（如速度、加速度等）由整数阶微分算子来定义。随着科学研究的发展，众多科学家发现越来越来多的现象无法用传统的力学理论进行解释，如反常扩散（anomalous diffusion）现象中粒子的均方位移与时间的幂律依赖关系[5,6]；黏弹性材料的非德拜（non-Debye）型应力松弛现象[7]等。因此，需要发展新型的建模方法解决此类问题。

分数阶微积分作为一种新的数学力学方法，近年来受到广泛的关注，并且在“反常”现象尤其是幂律依赖现象方面取得了显著的成果[8,9]。分数阶微积分的历史最早可以追溯到300多年前Leibniz和L'Hospital的信件往来中，随后经过Euler、Abel、Liouville、Caputo 等数学家和物理学家的研究而发展成熟。分数阶微积分方法能够描述非连续性介质的历史依赖特性和空间非局部性，目前该方法已在反常扩散[6]、复杂黏弹性材料的力学行为[10]、幂律依赖的声波衰减现象[11]、振动和系统控制[12]，以及生物医学[13]等方面有着广泛的应用。

值得注意的是，分数阶导数算子的定义中包含卷积积分，是一个全局算子。数学家发展了许多数值方法用以求解由分数阶导数算子构成的微分方程，如差分法、有限元法和谱方法等。计算结果表明，在求解分数阶导数微分方程时需要消耗大量的存储空间和时间成本，尤其是在计算区域大或时间历程长的情况下[14,15]。

为了既能够刻画时间依赖性和空间非局部性，又可以减少计算成本，分形导数（fractal derivative）也称为局部分数阶导数（local fractional derivative）应运而生。在分形导数的发展历史中，一些学者从不同的角度发展了分形导数的定义。这些定义虽然在某些方面具有其独特的优势，但是并没有一个统一的形式。本书将主要介绍豪斯道夫分形导数的理论基础及其实际应用。

1.2　几种分形导数的定义

目前分形导数的定义有许多种，每种定义的表达式和性质各不相同。下面将介绍几种比较常见的分形导数的定义。

Jumarie[16,17]基于传统布朗运动的表达式，将其推广到一般分数次阶数，进而提出了一种分数阶差分形式，其表达式为

$$f^{(\alpha)}(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\Delta^{\alpha}\left[f(x)-f(x_0)\right]}{(x-x_0)^{\alpha}} \tag{1.3}$$

式中，$\Delta^{\alpha}[f(x)-f(x_0)]\cong\Gamma(1+\alpha)\Delta[f(x)-f(x_0)]$。Yang[18,19]从数学上对这种定义做了详细讨论（如傅里叶变换等），并将其应用于不同的数学问题中。其他学者也提出了一些与式（1.3）类似的定义，如 Kolwankar 和 Gangal [20,21]提出的定义

$$D^{q}f(y)=\lim_{x\to y}\frac{\mathrm{d}^{q}\left[f(x)-f(y)\right]}{\mathrm{d}(x-y)^{q}} \tag{1.4}$$

Ben Adda 和 Cresson[22]提出的局部分数阶导数的定义也有相似的形式

$$\mathrm{d}_{\sigma}^{\alpha} f(x)=\Gamma(1+\alpha)\lim_{y\to x^{\sigma}}\frac{\sigma\left[f(y)-f(x)\right]}{\left|y-x\right|^{\alpha}} \tag{1.5}$$

Li 和 Ostoja-Starzewski [23]根据分形介质中物体的质量、坐标与长度之间的关系，提出了一种分形导数的定义

$$\nabla_{k}^{D}=\frac{1}{c_{1}^{(k)}}\frac{\partial}{\partial x_{k}}(\cdot) \tag{1.6}$$

式中，D 为分形维数，与整数阶导数类似，且不需要对 k 进行累加。根据分形距离的映射，$\mathrm{d}l_{D}=c_{1}\mathrm{d}x;\ \mathrm{d}S_{D}=c_{2}\mathrm{d}S;\ \mathrm{d}V_{D}=c_{3}\mathrm{d}V$，式（1.6）可以写为

$$\nabla_{k}^{D}=\frac{\partial}{\partial l_{D}^{k}}(\cdot) \tag{1.7}$$

式中，$\dfrac{1}{c}=\lambda\left|\boldsymbol{R}\right|^{3-D}$，$\lambda=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)}{2^{D-3}\Gamma\left(\dfrac{D}{2}\right)}$，$\boldsymbol{R}$ 为位置向量。

Parvate 和 Gangal[24]在其研究中指出，如果 F 是一个 α 完备集，则函数 f 的 F^{α} 导数定义为

$$D_{F}^{\alpha}[f(x)]=\begin{cases}\lim\limits_{y\to x}\dfrac{f(y)-f(x)}{S_{F}^{\alpha}(y)-S_{F}^{\alpha}(x)} & \text{如果 } x\in F\\ 0 & \text{如果 } x\notin F\end{cases} \tag{1.8}$$

式中，$S_{F}^{\alpha}(x)$ 是一个阶梯函数，即

$$S_{F}^{\alpha}(x)=\begin{cases}\gamma^{\alpha}(F,a_{0},x) & \text{如果} x\geqslant a_{0}\\ -\gamma^{\alpha}(F,x,a_{0}) & \text{如果} x<a_{0}\end{cases} \tag{1.9}$$

$$\gamma^{\alpha}(F,a,b)=\lim_{\delta\to 0}\inf_{\{P_{[a,b]}:|P|<\delta\}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_{i})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\theta(F,[x_{i},x_{i+1}]) \tag{1.10}$$

随后，Golmankhaneh 和 Baleanu[25]对该定义进行了修正。

近期研究比较多的是由 Khalil 等[26]提出的充裕导数（comfortable derivative），其定义为

$$f^{(\alpha)}(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} \tag{1.11}$$

为了完善定义式（1.11）的不足，Katugampola[27]提出了一种新的局部分数阶导数定义

$$f^{(\alpha)}(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t\mathrm{e}^{\varepsilon t^{-\alpha}})-f(t)}{\varepsilon} \tag{1.12}$$

较之于式（1.11），该定义具有分数阶导数定义无法满足的一些经典性质。

Chen[28]从反常扩散中均方位移的幂律现象出发，提出了一种能够表征尺度变换的豪斯道夫导数模型，即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x^p}&=\lim_{x_1\to x}\frac{u(x_1)-u(x)}{x_1^p-x^p}\\ \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t^q}&=\lim_{t_1\to t}\frac{u(t_1)-u(t)}{t_1^q-t^q}\end{aligned}\tag{1.13}$$

式中，p 和 q 分别为空间和时间上的分形维数。需要指出的是，豪斯道夫导数有一种变形形式，以空间豪斯道夫导数为例，即

$$\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x^p}=\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x^p}=\frac{1}{px^{p-1}}\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\tag{1.14}$$

该变形形式与 Tarasov[29]提出的导数形式类似，区别在于式（1.14）对位置参数 x 未加绝对值。式（1.14）也可与分形介质中的连续流体模型联系在一起[30,31]。

He[32]在豪斯道夫导数定义（1.13）的基础上，根据分形介质的几何特性，提出了一种分形导数为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\lim_{\Delta x\to L_0}\frac{u(A)-u(B)}{kL_0^\alpha}\tag{1.15}$$

式中，k 为常数；α 为分形维数；不连续空间中两点的距离表示为 $\mathrm{d}s=kL_0^\alpha$。需要注意的是，在定义中 Δx 不趋向于 0，而是趋向于两点之间的最短距离 L_0。

Borges[33]也提出了一种变形的分形导数定义，其具体表达式为

$$D_q f(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(x)-f(y)}{x\Theta_q y}=[1+(1-q)x]\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\tag{1.16}$$

式中，Θ_q 为一种变形算子，其定义可写为 $x\Theta_q y=\dfrac{x-y}{1+(1-q)y}\left(y\neq\dfrac{1}{q-1}\right)$。

上述几种定义的表达式虽然不同，但其核心形式都是传统一阶导数的变形体。研究表明[34]，Jumarie、Borges 和 Khalil 等提出的导数与豪斯道夫导数本质上具有一致性。尽管目前有很多种分形导数的定义，豪斯道夫导数无疑是一种数学形式简单且易于数值计算的建模方法。

1.3　豪斯道夫导数的科学与工程应用

近年来，一些“反常”的物理现象引起了广泛的关注，这些复杂现象的共同特点是具有幂律特征。传统的整数阶模型，如非线性模型，无法较好地刻画此类幂律现象，而传统的分数阶导数模型，虽然能够刻画此类现象，但是其本身是一个全局算子，模型求解过程中需要消耗大量的计算成本。因此，豪斯道夫导数模

型作为一个可供选择的建模方式，既能够描述空间非局部行为，也可以刻画时间历史依赖或记忆过程，且作为局部算子可以节省计算成本，因此豪斯道夫导数模型正逐渐引起研究者的广泛关注。

目前豪斯道夫分形导数已成功用于水利学、黏弹性材料、非牛顿流体、核磁共振、反常扩散、经济学等问题[35-38]，涌现出了一系列豪斯道夫导数模型，如豪斯道夫导数流变模型[39]和豪斯道夫导数扩散模型[40]等。

1. 复杂黏弹性材料的力学行为建模

黏弹性材料的力学性质与弹性材料的力学性质有本质的区别，其蠕变、松弛、长期强度效应等都是工程人员关注的问题，因为这方面的研究对实际工程的安全性和稳定性具有重要意义。目前，一方面伸展指数松弛现象已经在实际工程中被广泛检测到；另一方面复杂黏弹性材料的蠕变行为难以用简单的黏弹性模型（如麦克斯韦模型和 Kelvin-Voigt 模型等）描述，而采用多元件黏弹性模型势必会引入更多的模型参数，导致模型结构复杂、参数众多、拟合效果差等问题。豪斯道夫导数模型能够很好地解决上述问题，其详细阐述见第四章。

2. 反常扩散问题的建模

许多环境力学的研究领域中涉及反常扩散问题，如河床底部的泥沙扩散、污染物在地层中的迁移问题等。这些扩散现象往往表现出“反常”的幂律依赖现象，即粒子迁移的均方位移与时间的幂函数成正比。传统的扩散方程无法描述此种现象，而分数阶反常扩散模型因其包含分数阶导数算子而具有计算量大的缺点。豪斯道夫导数模型为描述此类反常扩散问题提供了一种合适的数学工具，详细内容见第三章。

3. 分形多孔介质中的连续流体模型

分形多孔介质中存在大量的孔隙，欧几里得几何不适用于描述此类介质中流体的建模。目前，比较常用的方法之一就是借助于分形理论中分形维度的概念刻画分形介质。研究表明，豪斯道夫导数也适用于研究描述分形多孔介质中的连续流体模型，详细内容见文献[31]。

参考文献

[1] MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature[M]. New York: W. H. Freman, 1982.

[2] 张济忠. 分形[M]. 北京：清华大学出版社，1995.

[3] 葛世荣，朱华. 摩擦学的分形[M]. 北京：机械工业出版社，1995.

[4] TARASOV V E. Fractional hydrodynamic equation for fractal media[J]. Annals of Physics, 2005, 318(2):286-307.

[5] 包景东. 分数布朗运动和反常扩散[J]. 物理学进展，2005，5(4): 259-367.

[6] ZHANG Y, BENSON D A, MEERSCHAERT M M, et al. On using random walks to solve the space-fractional advenction-dispersion equations[J]. Journal of Statistical Physics, 2006, 123(1):89-100.

[7] LUKICHEV A A. Relaxation function for the non-Debye relaxation spectra description[J]. Chemical Physics, 2014, 428: 29-33.

[8] PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. San Diego: Academic Press, 1999.

[9] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations[M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.

[10] 潘文潇，谭文长. 广义 Maxwell 黏弹性流体在两平板间的非定常流动[J]. 力学与实践，2003，25(1)：19-22.

[11] SZABO T L, WU J. A model for longitudinal and shear wave propagation in viscoelastic media[J]. The Journal of Acoustic Society of America, 2003, 114(5):2437-2446.

[12] CHEN Y Q, MOORE K L. Discretization schemes for fractional-order differentiators and integrators[J]. IEEE Transactions on Circuits and System I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(3):363-367.

[13] MAGIN R L. Fractional calculus in bioengineering[M]. Redding: Begell House, 2006.

[14] TREEBY B E, COX B. Modeling power law absorption and dispersion in viscoelastic solids using a split-field and the fractional Laplacian[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2014, 136(4): 1499-1510.

[15] ZHU, T, HARRIS J M. Modeling acoustic wave propagation in heterogeneous attenuating media using decoupled fractional Laplacians[J]. Geophysics, 2014, 79(3): T105-T116.

[16] JUMARIE G. Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann-Liouville derivative for non-differentiable functions[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(3): 378-385.

[17] JUMARIE G. On the representation of fractional Brownian motion as an integral with respect to $(dt)^{\alpha}$ [J]. Applied Mathematics Letters, 2005, 18(7):739-748.

[18] YANG X J. Advanced local fractional calculus and its applications[M]. New York: World Science Publisher, 2012.

[19] YANG X J. Local fractional functional analysis and its applications[M]. Hong Kong: Asian Academic Publisher Limited, 2011.

[20] KOLWANKAR K M, GANGAL A D. Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions[J]. Chaos, 1996, 6(4): 505-513.

[21] KOLWANKAR K M, GANGAL, A D. Local fractional fokker-planck equation[J]. Physical Review Letters, 1998, 80(2): 214-217.

[22] BEN ADDA F, CRESSON J. About non-differentiable functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2001, 263(2): 721-737.

[23] LI J, OSTOJA-STARZEWSKI M. Fractal solids, product measures and fractional wave equations[J]. Proceedings Mathematical Physical and Engineering Sciences, 2009, 465(2108): 2521-2536.

[24] PARVATE A, GANGAL A D. Calculus on fractal subsets of real line-I: Formulation[J]. Fractals. 2009, 17(1): 53-81.

[25] GOLMANKHANEH A K, BALEANU D. Fractal calculus involving gauge function[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016, 37: 125-130.

[26] KHALIL R, AL HORANI M, YOUSEF A, et al. A new definition of fractional derivative[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2014, 264: 65-70.

[27] KATUGAMPOLA U N. A New fractional derivative with classical properties[J]. arXiv Preprint arXiv:1410.6535, 2014.

[28] CHEN W. Time-space fabric underlying anomalous diffusion[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006,28(4): 923-929.

[29] TARASOV V E. Anisotropic fractal media by vector calculus in non-integer dimensional space[J]. Journal of Mathematical Physics, 2014, 55(8): 083510.

[30] BALANKIN A S, ELIZARRARAZ B E. Hydrodynamics of fractal continuum flow[J]. Physical Review E, 2012, 85(2): 025302.

[31] BALANKIN A S, ELIZARRARAZ B E. Map of fluid flow in fractal porous medium into fractal continuum flow[J]. Physical Review E, 2012, 85(5): 056314.

[32] HE J H. A new fractal derivation[J]. Thermal Science, 2011, 15(suppl. 1): 145-147.

[33] BORGES E P. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2004, 340(1-3): 95-101.

[34] WEBERSZPIL J, LAZO M J, HELAYËL-NETO J A. On a connection between a class of q-deformed algebras and the Hausdorff derivative in a medium with fractal metric[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2015, 436: 399-404.

[35] SUN H, MEERSCHAERT M M, ZHANG Y, et al. A fractal Richards' equation to capture the non-Boltzmann scaling of water transport in unsaturated media[J]. Advances in Water Resources, 2013, 52(4): 292-295.

[36] CAI W, CHEN W, XU W. Characterizing the creep of viscoelastic materials by fractal derivative models[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2016, 87: 58-63.

[37] 苏祥龙，许文祥，陈文. 基于分形导数对非牛顿流体层流的数值研究[J]. 力学学报，2017，49(5)：1020-1028.

[38] LIN G. An effective phase shift diffusion equation method for analysis of PFG normal and fractional diffusions[J]. Journal of Magnetic Resonance, 2015, 259: 232-240.

[39] CAI W, CHEN W. Application of scaling transformation to characterizing complex rheological behaviors and fractal derivative modeling[J]. Rheologica Acta, 2018, 57(1): 43-50.

[40] LIANG Y, ALLEN Q Y, CHEN W, et al. A fractal derivative model for the characterization of anomalous diffusion in magnetic resonance imaging[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2016, 39:529-537.

第二章　豪斯道夫导数的定义

2.1　分 形 变 换

扩散现象描述的是粒子随机迁移的过程，其特征可以由粒子的均方位移表征

$$\langle \Delta x^2 \rangle \propto \Delta t^{\eta} \tag{2.1}$$

式中，Δx 为距离；Δt 为时间间隔；$\langle\rangle$ 为随机变量的平均值；η 为一个正的实常数，当 $\eta=1$ 时上式表示的是正常扩散，当 $\eta\neq1$ 时表示的是反常扩散。研究表明，由时间分数阶导数和分数阶导数拉普拉斯算子构成的扩散方程能够描述反常扩散现象[1-3]，如

$$\frac{\partial^{\alpha} s}{\partial t^{\alpha}}+\gamma(-\nabla^2)^{\beta} s=0 \quad 0<\alpha,\ \beta<1 \tag{2.2}$$

式中，s 为相关物理量（如热扩散中的温度）；γ 为对应的扩散系数；$(-\nabla^2)^{\beta}$ 为分数阶拉普拉斯算子；α、β 为实常数。当 $\beta<1$ 时，上式表征的均方位移是发散的。为了解决上述难题，陈文[4]引入尺度变换的概念重新度量时空为

$$\begin{cases}\Delta\hat{x}=\Delta x^{\beta} \\ \Delta\hat{t}=\Delta t^{\alpha}\end{cases} \quad 0<\alpha,\ \beta<1 \tag{2.3}$$

上述尺度变换与经典的豪斯道夫时空维度的定义一致。采用此种变换，在新的时空尺度下，反常扩散的均方位移可以转化为正常扩散的形式为

$$\langle \Delta\hat{x}^2 \rangle \propto \Delta\hat{t} \tag{2.4}$$

式（2.3）所示的变换主要基于以下两个分形尺度下的假设：①在任意分形尺度下，物理定律的形式保持不变；②在反常物理过程中，反常环境对物理过程的影响等价于分形尺度转换所产生的影响[4]。基于这两个假设，可以利用豪斯道夫导数描述分形尺度下的力学过程。

2.2　豪斯道夫导数的定义

基于变换式(2.3)，Chen[4]提出了一种可供选择的建模方法——豪斯道夫导数，其定义为