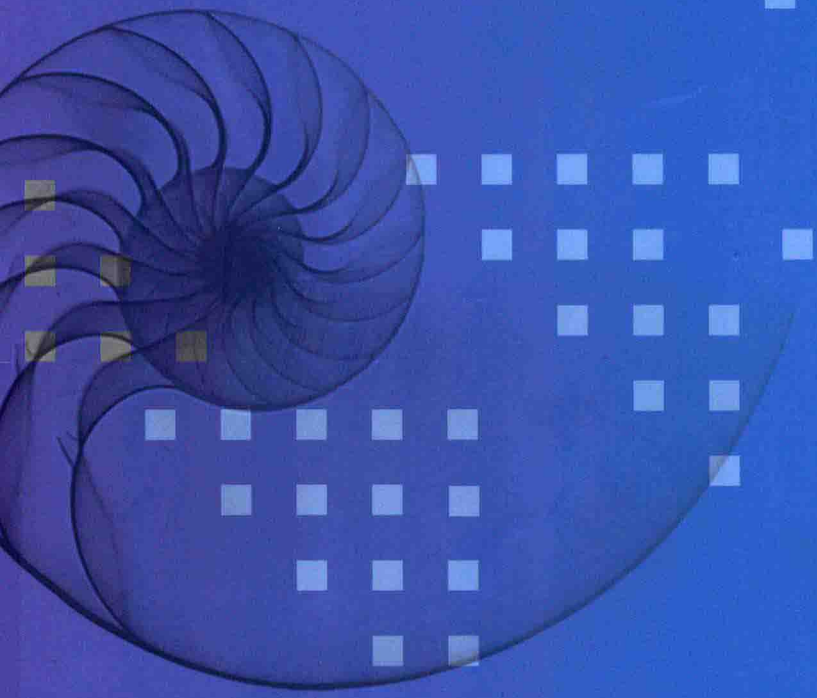
微分方程基础教程

（下册）

郑志明　郭定辉
李翠萍　彭临平　编



高等教育出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

微分方程基础教程

Weifen Fangcheng Jichu Jiaocheng

（下册）

郑志明　郭定辉　李翠萍　彭临平　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本套教材包含微分方程的基础内容。教材分上、下册。上册主要内容为常微分方程理论基础，包括绪论、初等积分法、高阶微分方程、线性微分方程组、基本定理、定性与稳定性理论初步和离散动力系统简介等。下册主要内容为偏微分方程理论，包括绪论、一阶偏微分方程、二阶线性偏微分方程的经典解法、偏微分方程解的性质、广义函数及 Sobolev 空间、偏微分方程的基本解及其应用、偏微分方程的广义解及其正则性和非线性偏微分方程的典型解法。

本套教材可作为高等学校数学专业微分方程课程的教材，也可供相关专业的教师、学生以及研究人员参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

微分方程基础教程．下册／郑志明等编．-- 北京：高等教育出版社，2019.1

ISBN 978-7-04-049235-4

Ⅰ．①微… Ⅱ．①郑… Ⅲ．①微分方程－高等学校－教材 Ⅳ．①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 002379 号

策划编辑 李冬莉	责任编辑 李冬莉	封面设计 王 鹏	版式设计 张 杰
插图绘制 尹文军	责任校对 刁丽丽	责任印制 陈伟光	

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	北京佳顺印务有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787 mm×960 mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	16.25		
字 数	300 千字	版 次	2019 年 1 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印 次	2019 年 1 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	31.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 49235-00

前　言

微分方程是带有未知函数及其导数的等式。它是数学理论与其他数学分支、科学和工程实践相结合的桥梁，其目标是利用数学理论解决来源于科学和工程实践的实际问题。

在现行数学课程中，微分方程常常以常微分方程和偏微分方程两门课程出现。常微分方程基本上只涉及含有未知函数的单变元的导数的微分方程，而偏微分方程则涉及含有未知函数及其偏导数的微分方程。经过长期发展，常微分方程和偏微分方程两门课程各自都有了较成熟的教材。然而，大多数常微分方程教材和偏微分方程教材自成体系，很少有作者将两者的内容统一起来，相互呼应和借鉴。但从常微分方程和偏微分方程的分类方法不难看出，它们之间存在千丝万缕的联系。例如，Fourier 变换和 Laplace 变换之类的积分变换方法以及 Fourier 级数之类的级数方法既可以用于常微分方程问题也可以用于偏微分方程问题。另外，很多偏微分方程问题可以通过数学方法转换为常微分方程问题来求解。

为了避免课程之间的重复讲授，同时也为了加深学生对微分方程的整体理解与融会贯通，我们决定把常微分方程与偏微分方程作统一处理，尝试将它们结合起来。经过近 5 年的教学实践，我们对微分方程课程进行了多次优化与提炼，将使用多年的讲义编写成教材。

本书是整套教材的下册，主要内容涉及偏微分方程部分。即基于上册常微分方程部分的内容，介绍偏微分方程的建立及偏微分方程的各种基本解法，然后通过引入广义函数、连续半群以及 Sobolev 空间等现代数学理论，借助偏微分方程的先验估计以及能量方法等现代方法，介绍广义解及其正则性理论。

具体来说，在本书第 1 章中，首先利用物理原理导出经典偏微分方程，然后结合具体偏微分方程，介绍相关的基本概念和基本问题，最后介绍比较简单而且普遍适用的偏微分方程理论。期望通过这一章的学习，读者能对偏微分方程有比较形象的了解，并在脑海中建立适合偏微分方程领域的语言。而且，这一章借助数学分析等基础知识来介绍偏微分方程的简单理论，目的是让读者对偏微分方程理论感觉不是很陌生，从而方便后续内容的学习。

接下来,第2章和第3章分别介绍一阶偏微分方程和二阶偏微分方程的典型问题的各种经典求解方法。在这两章中,我们注重内容的实用性,注重基本原理和基本方法的阐述,力求做到重点突出、思路清晰、脉络分明、便于理解。而且还尽量联系问题的应用背景,引入各种形式的例题来说明经典求解方法的应用。

第4章集中介绍各类偏微分方程解的适定性质。将这些内容集中在一起的想法是让读者能够清楚地了解各类偏微分方程问题之间的联系和区别,了解讨论解的适定性方法的共性和个性,为以后在实践中更好地选择使用它们做准备。

第5章引入广义函数及Sobolev空间等现代数学理论,其内容简明扼要。这部分内容着眼于解决偏微分方程问题,为读者展示现代数学理论在偏微分方程问题中的作用和意义,提供进一步深入了解有关领域的线索。

第6章借助广义函数概念介绍基本解方法和Green函数法。它一方面展示了新方法在偏微分方程问题讨论中的强大作用,另一方面也通过Green函数法展示新工具与经典方法如何结合,便于读者比较自然地认识广义函数,并理解涉及广义函数的那些方法的本质。

第7章和第8章分别介绍了Sobolev空间上的偏微分方程理论以及非线性偏微分方程的基本解法。通过这些内容,希望可以让读者建立对现代偏微分方程理论的认识,并且比较全面地了解现代偏微分方程理论的概貌。

使用本教材所需的教学时长最好在64学时左右。本教材内容涉及的范围和深度有一定的弹性,教学学时可根据学生的实际情况安排。

此外,郭定辉老师的女儿郭洪杉在大学期间学习偏微分方程课程时参考了初稿,提出了十分中肯的意见和建议;研究生蔡黎帮助选择了大部分习题,并制作了与初稿配套的电子课件。在此,向他们表示由衷的感谢!

本书是将常微分方程和偏微分方程内容进行结合的初次尝试,在选材和内容的叙述方面难免会有不当之处,诚请广大读者和同行提出宝贵意见。

编　者

2017年6月

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　绪论 …… 1
§ 1.1　经典偏微分方程 …… 1
§ 1.2　偏微分方程的基本概念 …… 8
§ 1.3　偏微分方程的解以及定解问题 …… 17
§ 1.4　线性偏微分方程解的叠加原理与齐次化原理 …… 28
习题 1 …… 30
第 2 章　一阶偏微分方程 …… 34
§ 2.1　一阶拟线性偏微分方程 …… 34
§ 2.2　完全非线性一阶偏微分方程 …… 39
§ 2.3　一阶偏微分方程组 …… 43
习题 2 …… 46
第 3 章　二阶线性偏微分方程的经典解法 …… 48
§ 3.1　Fourier 变换法 …… 48
§ 3.2　Laplace 变换法 …… 74
§ 3.3　球面平均法 …… 80
§ 3.4　分离变量法 …… 95
习题 3 …… 108
第 4 章　偏微分方程解的性质 …… 113
§ 4.1　二阶双曲型偏微分方程解的性质 …… 113
§ 4.2　二阶抛物型偏微分方程解的性质 …… 120
§ 4.3　二阶椭圆型偏微分方程解的性质 …… 128
§ 4.4　Harnack 不等式 …… 130
习题 4 …… 134
第 5 章　广义函数及 Sobolev 空间 …… 137
§ 5.1　广义函数 …… 137
§ 5.2　Sobolev 空间论 …… 153
§ 5.3　涉及时间的函数空间 …… 161

习题 5 …… 164
第 6 章　偏微分方程的基本解及其应用 …… 167
§ 6.1　一般常系数线性偏微分方程的基本解法 …… 167
§ 6.2　具有初始条件的定解问题的基本解 …… 176
§ 6.3　边值问题与混合问题的基本解方法——Green 函数法 …… 180
习题 6 …… 196
第 7 章　偏微分方程的广义解及其正则性 …… 198
§ 7.1　二阶椭圆型偏微分方程的广义解及其正则性 …… 198
§ 7.2　二阶抛物型偏微分方程的广义解及其正则性 …… 206
§ 7.3　二阶双曲型偏微分方程的广义解及其正则性 …… 216
§ 7.4　线性发展方程的 Cauchy 问题 …… 225
习题 7 …… 235
第 8 章　非线性偏微分方程的典型解法 …… 237
§ 8.1　行波法 …… 237
§ 8.2　Bäcklund 变换法 …… 238
§ 8.3　Lax 对和反散射方法 …… 241
§ 8.4　分离变量法 …… 245
习题 8 …… 248
参考文献 …… 249

第 1 章

绪　论

众所周知,方程是含有未知数的等式.而微分方程则是含有未知函数的导数的等式.本章内容主要涉及包含多个自变量的函数的微分方程,即偏微分方程的相关问题.我们将介绍一些偏微分方程的实际背景,研究偏微分方程的求解问题,探讨解的相关性质等.

经典偏微分方程的典型代表有波动方程、热传导方程、Laplace 方程、Poisson 方程和 Helmholtz 方程等.这些偏微分方程是在研究数学物理问题时提出来的,因此也被称为数学物理方程.随着科学技术的不断发展,偏微分方程的研究对象不断增多.现代偏微分方程不仅描述物理学、力学等工程过程,也涉及化学、生物学、经济学等领域.

研究偏微分方程的最初方法是微积分,而迅速发展的泛函分析、拓扑学、群论等其他数学分支也为深入研究偏微分方程提供了有力的工具.

本章首先介绍一些经典偏微分方程,特别是波动方程、热传导方程(或称扩散方程)和 Laplace 方程等的来源;其次,介绍偏微分方程理论的一些基本概念和最一般方法.具体来说,§1.1 引入几个经典偏微分方程;§1.2 介绍偏微分方程的基本概念以及线性偏微分方程的基本类型和二阶线性偏微分方程的分类方法;§1.3 介绍偏微分方程的解以及定解问题;而 §1.4 介绍线性偏微分方程解的叠加原理和线性偏微分方程的齐次化原理.

§1.1　经典偏微分方程

本节利用物理知识定量地给出描述一些经典物理现象的经典偏微分方程.

这里详细介绍的方程包括波动方程、热传导方程和调和方程.

1.1.1 波动方程

波动方程是描述波的传播规律的数学模型.波存在多种表现形式,如水波、机械波、电磁波等,描述它们的波动方程也因此具有不同的形式.本节介绍描述弦振动的弦振动方程、描述电流传输规律的传输线方程以及描述电磁波的 Maxwell 方程,它们是波动方程的典型代表.

(1) 弦振动方程

弦振动方程是描述弦振动之类的物理现象的数学模型.假设一根长度为 l 的均匀细长而且柔软的弦,先紧绷于 x 轴上 O,l 两点之间,弦的线密度为 $\rho(x)$.在垂直于弦线的外力作用下,让弦离开平衡位置($y=0$),在平面 xOy 内作垂直于 x 轴的微小横振动.设 $y=u(x,t)$ 是横坐标为 x 的弦上的点在 t 时刻的横向位移.在弦上任取一微元 $\overset{\frown}{PQ}$(图 1.1 所示),其两个端点分别对应于 x 点和 $x+\Delta x$ 点的函数值 $u(x,t)$ 和 $u(x+\Delta x,t)$,使得该微元弦长足够小,以至于可以把它看成是质点.该微元弦的弧长为

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + u_x^2}\,\mathrm{d}x.$$

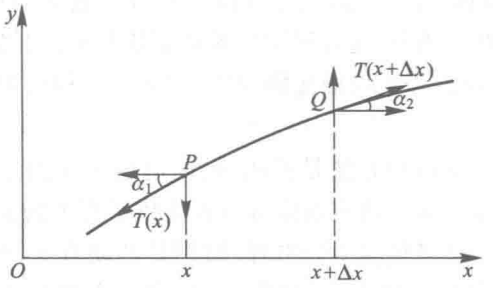


图 1.1

由于假定弦仅在平衡位置附近作微小振动,可以认为在微小振动过程中这段弦并未伸长.因而,由弹性力学的 Hooke 定律可以得出:在微小振动过程中弦上每一点所受张力与时间无关.又由于假定弦是柔软的,故只受到切向张力的作用,而没有法向应力.因此,可以将 P 点处的张力设为 $T(x)$,其方向总是沿着弦在 P 点处的切线方向.同时,由弦是细长弦的假定而可以略去重力的作用.

由以上分析可知,所述微元弦作为质点(不妨看成 x 点)在水平方向所受到的力为

$$-T(x)\cos\alpha_1+T(x+\Delta x)\cos\alpha_2,$$

在垂直方向受到的力为

$$-T(x)\sin\alpha_1+T(x+\Delta x)\sin\alpha_2. \tag{1.1}$$

对于弦的横振动,其在水平方向没有加速度产生,因而水平方向受到的力应为0,即 $T(x)\cos\alpha_1=T(x+\Delta x)\cos\alpha_2$.在微小横振动的假设下,因为 $\cos\alpha_1\approx\cos\alpha_2$,所以 $T(x)\approx T(x+\Delta x)$.弦的横向运动可以由 Newton 第二定律表示如下:

$$\begin{aligned}\rho(x)\Delta x u_{tt}(x,t)&=-T(x)\sin\alpha_1+T(x+\Delta x)\sin\alpha_2\\&\approx T(x)(\tan\alpha_2-\tan\alpha_1)\\&\approx T(x)[u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)],\end{aligned} \tag{1.2}$$

(1.2)式两边同除以 Δx 和 $\rho(x)$ 并令 $\Delta x\to 0$ 可得

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0\quad(a^2=T(x)/\rho(x)). \tag{1.3}$$

等式(1.3)描述了弦在自由振动时,不同时刻弦上各点的运动规律,因此被称为**弦振动方程或波动方程.**

此外,当弦在振动过程中受到密度为 $F(x,t)$ 的外作用力时,对应于(1.2)式的式子变为

$$\rho(x)\Delta x u_{tt}(x,t)\approx T(x)[u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)]+\Delta x F(x,t),$$

上式两边同除以 Δx 和 $\rho(x)$ 并令 $\Delta x\to 0$ 可得

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), \tag{1.4}$$

等式(1.4)描述了受迫振动时不同时刻弦上各点的运动规律.(1.4)式中 $f(x,t)=F(x,t)/\rho(x)$ 被称为**自由项**.自由项恒等于零的方程(1.3)称为**齐次波动方程**,而(1.4)式称为**非齐次波动方程.**

(2) 传输线方程

传输线方程是描述电流传输规律的波动方程.对于频率较高但又没有高到能显著地辐射电磁波的电路,由于电路中导线的自感和电容效应的作用,同一支路中电流一般不再相等.为了描述这种现象,考虑具有分布参数的导体,令其电流强度与电压分别为位置参数 x 和时间参数 t 的函数,记作 $I(x,t)$ 与 $V(x,t)$.以 R 表示每一回路单位的串联电阻、L 表示每一回路单位的串联电感、C 表示每单位长度的分路电容,而 G 表示每单位长度的分路电导.根据 Kirchhoff 第一定律和第二定律,在长度为 Δx 的传输线中,电压降应等于电动势之和,而流入节点 x 的电流应等于流出该节点的电流,即

$$\begin{cases}V-(V+\Delta V)=\Delta x\cdot R\cdot I+\Delta x\cdot L\cdot I_t,\\I=(I+\Delta I)+C\cdot\Delta x\cdot V_t+G\cdot\Delta x\cdot(V+\Delta V).\end{cases}$$

在两个等式两边都除以 Δx 并取极限 $\Delta x\to 0$ 得

$$\begin{cases}V_x+L\cdot I_t+R\cdot I=0,\\I_x+C\cdot V_t+G\cdot V=0.\end{cases} \tag{1.5}$$

要从方程组(1.5)中消去 V,即对方程组(1.5)的第二个方程求关于 x 的微分,将第一个方程两端乘以 C 后再求关于 t 的微分,并把两个结果相减,得

$$I_{xx}=LCI_{tt}+(RC+GL)I_t+GRI, \tag{1.6}$$

这就是电流 I 满足的微分方程.类似地可以得到消去 I 的方程:

$$V_{xx}=LCV_{tt}+(RC+GL)V_t+GRV. \tag{1.7}$$

方程(1.6)和(1.7)都称为**传输线方程**.

(3) Maxwell 方程

根据电磁场理论,若假设电场强度为 $\boldsymbol{E}$、磁场强度为 $\boldsymbol{H}$、电感应强度为 $\boldsymbol{D}$ 以及磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$,则有 Maxwell 方程,

$$\text{rot}\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\boldsymbol{D}_t,\text{rot}\ \boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}_t,\text{div}\ \boldsymbol{B}=0,\text{div}\ \boldsymbol{D}=\rho, \tag{1.8}$$

其中 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E},\boldsymbol{J}$ 为传导电流的面密度、ρ 为电荷的体密度、ε 是介质的介电常数、μ 是导磁率、σ 为导电率,rot 表示旋度运算,div 表示散度运算.对(1.8)式中第一个和第二个方程两端求旋度并考虑 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 之间的关系得

$$\text{rot rot}\ \boldsymbol{H}=-\varepsilon\mu\,\boldsymbol{H}_{tt}-\sigma\mu\,\boldsymbol{H}_t,$$

再将公式 rot rot $\boldsymbol{H}$=grad div $\boldsymbol{H}-\Delta\boldsymbol{H}$ 及 div $\boldsymbol{H}=\mu^{-1}$div $\boldsymbol{B}=0$ 代入上式,得到

$$\Delta\boldsymbol{H}=\varepsilon\mu\,\boldsymbol{H}_{tt}+\sigma\mu\,\boldsymbol{H}_t, \tag{1.9}$$

其中 Δ 被称为 **Laplace 算子**.另一方面,从(1.8)式中消去 $\boldsymbol{H}$,得到 $\boldsymbol{E}$ 所满足的方程为

$$\Delta\boldsymbol{E}=\varepsilon\mu\,\boldsymbol{E}_{tt}+\sigma\mu\,\boldsymbol{E}_t, \tag{1.10}$$

因此,如果介质不导电($\sigma=0$),则方程(1.9)和(1.10)分别简化为

$$\boldsymbol{H}_{tt}=(\varepsilon\mu)^{-1}\Delta\boldsymbol{H}, \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{E}_{tt}=(\varepsilon\mu)^{-1}\Delta\boldsymbol{E}. \tag{1.12}$$

这就是微分形式下的 Maxwell 方程,具有波动方程(1.4)的典型形式.

1.1.2 热传导方程

热传导方程是描述热量在介质中的传导规律的偏微分方程.另外,热的传导与一种物质在另一种物质中的扩散具有类似的特征,因而热传导方程也可以描述这种扩散现象,因此热传导方程也被称为**扩散方程**.

考虑物体 G 中一点在一定时刻的温度.为了数学描述的方便,将物体 G 置于三维直角坐标系中,G 中(x,y,z)点在 t 时刻的温度记为函数 $u(x,y,z;t)$.在物体 G 中任取一小部分作为微元 Ω,其边界记为$\partial\Omega$,如图 1.2 所示.

由 Fourier 实验定律可知,流过微元 Ω 的边界$\partial\Omega$的热量 $\mathrm{d}Q$ 与微元 Ω 的温度 u 沿边界$\partial\Omega$的法方向导数成正比,即

$$\mathrm{d}Q=-k(x,y,z)\partial_n u\mathrm{d}S\mathrm{d}t,\quad \partial_n u=(\mathbf{grad}\ u)\cdot\boldsymbol{n}, \tag{1.13}$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

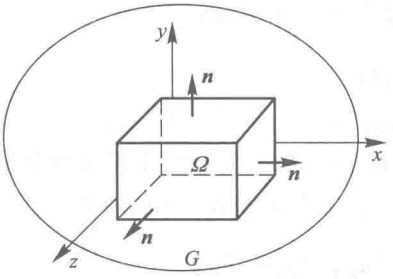


图 1.2

其中 $\boldsymbol{n}$ 为边界 $\partial\Omega$ 上点 (x,y,z) 处的单位外法向量，$\mathrm{d}S$ 为边界 $\partial\Omega$ 的面积，式中的负号表示热量流向与温度梯度方向相反，而 $k(x,y,z)$ 为 (x,y,z) 点的热传导系数. 由(1.13)式可得，从时刻 t_1 到时刻 t_2 流过微元 Ω 的全部热量为

$$Q=\int_{t_1}^{t_2}\iint_{\partial\Omega}k(x,y,z)\,\partial_n u\mathrm{d}S\mathrm{d}t.$$

根据热平衡方程可知，该热量等于微元 Ω 的温度变化所需要的热量，即

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_{\partial\Omega}k(x,y,z)\,\partial_n u\mathrm{d}S\mathrm{d}t=\iiint_{\Omega}c(x,y,z)\rho(x,y,z)[u(x,y,z;t_2)-u(x,y,z;t_1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{1.14}$$

其中 $c(x,y,z)$ 和 $\rho(x,y,z)$ 分别表示物体 G 的比热和密度. 由(1.14)式和 Green 公式可知

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\iint_{\partial\Omega}k(x,y,z)\,\partial_n u\mathrm{d}S\mathrm{d}t&=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_{\Omega}[(ku_x)_x+(ku_y)_y+(ku_z)_z]\mathrm{d}V\right\}\mathrm{d}t\\&=\iiint_{\Omega}c\rho\int_{t_1}^{t_2}u_t\mathrm{d}t\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{1.15}$$

由于 G 中的微元 Ω 和时刻 t_1 与时刻 t_2 可以任意取，所以由(1.15)式可以推出 G 中的每一点满足

$$c\rho u_t-(ku_x)_x-(ku_y)_y-(ku_z)_z=0.$$

在 k 为常数的情况下，令(1.15)式中 $a^2=k/(c\rho)$，可得

$$u_t-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0, \tag{1.16}$$

称其为**齐次热传导方程**.

如果 G 单位体积、单位时间内产生的热量为 $F(x,y,z;t)$，则(1.15)式变成

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_{\Omega}[(ku_x)_x+(ku_y)_y+(ku_z)_z]\mathrm{d}V\right\}\mathrm{d}t$$

$$= \iiint_{\Omega} c\rho \int_{t_1}^{t_2} u_t \mathrm{d}t\mathrm{d}V + \iiint_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} F\mathrm{d}t\mathrm{d}V.$$

因此,与(1.16)式同理可得

$$u_t - a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) = f(x,y,z;t) \quad (k \text{ 为常数}), \tag{1.17}$$

其中 $a^2 = k/(c\rho)$, $f = F/(c\rho)$. (1.17)式称为**非齐次热传导方程**.非齐次热传导方程也可以借助 Laplace 算子 Δ 来表示成 $u_t - a^2\Delta u = f(x,y,z;t)$.

1.1.3 Laplace 方程与 Poisson 方程

Laplace 方程又称为**调和方程**,它与 Poisson 方程都具有广泛的应用背景,例如,静电学中的电势以及牛顿万有引力理论中的引力势均满足这类方程(在静电学和引力理论中分别被称为静电场方程和静态引力场方程).又例如,若导热物体内的热源分布和边界条件不随时间变化,则经过相当长时间后,物体内部温度分布将达到稳定状态而不随时间变化.故热传导方程中对时间的偏微分项为零,从而热传导方程变成 $\Delta u = 0$ 或 $\Delta u = f(x,y,z)$,前者被称为 **Laplace 方程**,后者被称为 **Poisson 方程**.

另外,在上述 Maxwell 方程(1.8)中,注意到 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$,并在其两边求散度得

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{D} = \varepsilon \mathrm{div}\, \boldsymbol{E} = \rho.$$

而电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与电位 u 之间存在关系 $\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\ u$,因此有

$$\mathrm{div}(\mathbf{grad}\ u) = \Delta u = -\rho/\varepsilon, \tag{1.18}$$

此为 **Poisson 方程**.如果静电场是无源的,即 $\rho = 0$,则得到

$$\Delta u = 0, \tag{1.19}$$

即为 **Laplace 方程**.

Laplace 方程的另一个实例来自牛顿万有引力理论.根据牛顿万有引力理论,位于点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处、质量为 m 的质点对位于点 $P(x,y,z)$ 处、具有单位质量的质点的引力为

$$\boldsymbol{F}_{P_0P} = \frac{m}{r^2}\left(\frac{x-x_0}{r}, \frac{y-y_0}{r}, \frac{z-z_0}{r}\right),$$

其中 $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.该向量函数 $\boldsymbol{F}_{P_0P}$ 通常被称为**引力场函数**.如果引进标量函数 $u_{P_0P} = m/r$ 作为势函数,那么引力场函数 $\boldsymbol{F}_{P_0P}$ 显然可以表示为相应势函数 u_{P_0P} 关于 x,y,z 的梯度函数,即 $\boldsymbol{F}_{P_0P} = -\nabla u_{P_0P}$.因此,考察质量密度为函数 $\rho(x,y,z)$ 的物体 Ω 上所有点对点 P 所产生的引力场,势函数应为

$$u(x,y,z) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}},$$

当质量密度函数 $\rho(x,y,z)$ 满足 Hölder 连续性条件时,通过简单计算可以得到,

势函数在 Ω 之外满足 $\Delta u=0$，而在 Ω 上满足 $\Delta u=-4\pi\rho$，即满足 Laplace 方程或 Poisson 方程.

1.1.4 其他典型偏微分方程举例

前面只是简单地介绍了几个经典的偏微分方程的来源，实际上还有许多其他的偏微分方程，它们来源于科学和技术的各个领域.

例 1（量子力学中的**定态 Schrödinger 方程**） 在势能为 $V(x,y,z)$ 的场中，质量为 m 的单个运动质点的运动状态的波函数 $u(x,y,z)$ 所满足的方程为

$$-\frac{h^2}{2m}\Delta u(x,y,z)+V(x,y,z)u(x,y,z)=Eu(x,y,z), \tag{1.20}$$

其中 $h=2\pi\hbar$，$\hbar$ 是 Planck 常数，E 表示质点的定态能量. 如果令 $\lambda=2m(E-V)/h^2$，则(1.20)式变为

$$\Delta u+\lambda u=0, \tag{1.21}$$

称为 **Helmholtz 方程**. 而当系数 $\lambda=0$ 时，Helmholtz 方程(1.21)退化为 Laplace 方程.

例 2（**Tricomi 方程**） 在研究平面 xOy 上的跨音速流时，用到两个很重要的偏微分方程：$u_{xx}=xu_{yy}$ 和 $u_{xx}=yu_{yy}$. 它们就是所谓的 **Tricomi 方程**.

例 3（不可压缩液体黏性流的 **Navier-Stokes 方程**） 如果用向量函数 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 表示不可压缩液体黏性流在时刻 t 以及坐标系 (x_1,x_2,x_3) 下的速度，则该速度的各个分量与该流体的压力 $P(x_1,x_2,x_3)$ 之间的关系可以表示为

$$\begin{cases}\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0,\\ \partial_t u_i+\boldsymbol{u}\nabla u_i+\rho^{-1}\partial_{x_i}P=\mu\Delta u_i, \quad i=1,2,3,\end{cases} \tag{1.22}$$

该偏微分方程组就是描述不可压缩液体黏性流的运动规律的 **Navier-Stokes 方程**，式中 ρ 是密度，而 μ 表示运动流体的黏性系数.

例 4（**空气动力学方程**） 在研究空气流动时，如果假设向量函数 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 表示气流在时刻 t 以及坐标系 (x_1,x_2,x_3) 下的速度，则根据热力学知识，$\boldsymbol{u}$ 满足方程组

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})=0,\\ \partial_t(\rho E)+\sum\limits_{j=1}^{3}\partial_j(\rho u_jE+Pu_j)=0,\\ \partial_t(\rho u_i)+\sum\limits_{j=1}^{3}\partial_j(\rho u_iu_j+\delta_{ij}P)=0, \quad i=1,2,3,\end{cases} \tag{1.23}$$

其中 $\rho(t;x_1,x_2,x_3)$ 表示气体的密度，P 为压力，$E(t;x_1,x_2,x_3)$ 为内能. 该方程通常称为**气体的状态方程组**.

例 5(KdV 方程)　为了描述浅水波现象,Korteweg 和 de Vries 首次提出方程

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0, \tag{1.24}$$

其中函数 $u(t;x)$ 表示浅水波幅度.人们将该方程简称为 **KdV 方程**.

例 6(图像处理中的偏微分方程)　如果将要进行图像处理的灰度图像作为初始条件,即零时刻的图像 $u(0;x,y)=u_0(x,y)$,则通过对该初始图像施加方程

$$u_t=-\Delta^2[c(|\Delta^2 u|)\Delta^2 u] \quad (c(\cdot)\text{为预定函数})$$

那样的演化,可以实现某些图像处理的目的,处理结果就是该方程的解 $u(t;x,y)$.

§1.2　偏微分方程的基本概念

本节将介绍偏微分方程定义以及线性偏微分方程的基本类型,以便于在以后的学习过程中对一般偏微分方程进行分类研究.

1.2.1　一般偏微分方程的基本概念

偏微分方程主要借助于未知函数及其导数来刻画客观世界的物理量的一般变化规律.

定义 1.1　一般将含有未知函数 $u(\boldsymbol{x})$ 以及各阶偏导数的等式

$$F\left(\boldsymbol{x},u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\cdots,\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)=0 \tag{1.25}$$

称为**偏微分方程**,(1.25)式中未知函数 $u(\boldsymbol{x})$ 表示客观世界的物理量.$u(\boldsymbol{x})$ 一般随时间和空间位置变化而变化,即自变量 $\boldsymbol{x}$ 表示时间变量和空间变量,一般记成向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$;$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{N}^n$ 被称为多重指标,$|\boldsymbol{\alpha}|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$.

为了方便,简记 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$,$\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$.因此(1.25)式可以简写成

$$F(\boldsymbol{x},u,\partial_{\boldsymbol{x}}u,\cdots,\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}u)=0. \tag{1.26}$$

定义 1.2　(1.26)式中的函数 F 和 $u(\boldsymbol{x})$ 均是向量函数时,相应的偏微分方程称为**偏微分方程组**.

例如,Cauchy-Riemann 方程

$$u_x-v_y=0, \quad u_y+v_x=0 \tag{1.27}$$

是偏微分方程组.

定义 1.3　按照方程(1.26)中所出现的未知函数的偏导数的最高阶的阶数 $|\boldsymbol{\alpha}|$,将(1.26)式的偏微分方程称为 **$|\boldsymbol{\alpha}|$ 阶偏微分方程**.

定义 1.4 如果方程(1.26)关于未知函数及其各阶导函数都是线性的,则称它为**线性偏微分方程**,否则称为**非线性偏微分方程**.

例如,描述浅水波现象的 KdV 方程

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.28}$$

是三阶非线性偏微分方程,而 Cauchy-Riemann 方程组(1.27)为一阶线性偏微分方程组.

m 阶线性偏微分方程一般可以写成

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(\boldsymbol{x})\partial^\alpha u(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),$$

或简写成

$$P(\boldsymbol{x},\partial)u(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}). \tag{1.29}$$

定义 1.5 对于非线性偏微分方程,如果方程(1.26)关于未知函数 $u(\boldsymbol{x})$ 的最高阶偏导数是线性的,则称其为**拟线性偏微分方程**;而当方程(1.26)中的函数 F 是未知函数及其各阶导数的线性组合且其中至少有一项是未知函数的最高阶导数的复合线性函数时,称对应的偏微分方程为**半线性偏微分方程**.

例如,上述 KdV 方程既是拟线性偏微分方程,也是半线性偏微分方程.但 p-Laplace 方程

$$u_t-\Delta_p u=0 \tag{1.30}$$

(其中 $\Delta_p u=\operatorname{div}(|\partial u|^{p-2}\partial u)$,$p>2$,而 $\partial u=(\partial_{x_1}u,\partial_{x_2}u,\cdots,\partial_{x_n}u)$)为拟线性偏微分方程而非半线性偏微分方程.

一般地,根据定义,m 阶拟线性偏微分方程可以表示为

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(\boldsymbol{x},u,\partial_x u,\cdots,\partial_x^\gamma u)\partial^\alpha u(\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{x},u,\partial_x u,\cdots,\partial_x^\beta u)=0, \tag{1.31}$$

其中 $\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{N}^n$ 均为多重指标,且 $|\boldsymbol{\gamma}|$,$|\boldsymbol{\beta}|<m$.而半线性偏微分方程可以表示为

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(\boldsymbol{x})\partial^\alpha u(\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{x},u,\partial_x u,\cdots,\partial_x^\beta u)=0, \quad |\boldsymbol{\beta}|<m. \tag{1.32}$$

定义 1.6 半线性和拟线性之外的非线性偏微分方程称为**完全非线性偏微分方程**.

例如,图像处理方程

$$u_t=-\Delta^2[c(|\Delta^2 u|)\Delta^2 u] \tag{1.33}$$

就是完全非线性偏微分方程.

1.2.2 线性偏微分方程的基本概念

定义 1.7 (1.29)式中的算子 $P(\boldsymbol{x},\partial)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(\boldsymbol{x})\partial^\alpha$ 称为 **m 阶线性偏微分算子**,而

$$P_m(\boldsymbol{x},\partial)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(\boldsymbol{x})\partial^\alpha \tag{1.34}$$

称为线性偏微分算子 $P(\boldsymbol{x},\partial)$ 的**主部**;将由

$$P(\boldsymbol{x},\partial)^*v=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\partial^\alpha(a_\alpha(\boldsymbol{x})v) \tag{1.35}$$

所定义的线性偏微分算子 $P(\boldsymbol{x},\partial)^*$ 称为算子 $P(\boldsymbol{x},\partial)$ 的**共轭算子**;当 $P(\boldsymbol{x},\partial)^*=P(\boldsymbol{x},\partial)$ 时,称算子 $P(\boldsymbol{x},\partial)$ 为**自共轭算子**.

定义 1.8 多项式

$$P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}^\alpha(\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n) \tag{1.36}$$

称为算子 $P(\boldsymbol{x},\partial)$ 的**象征**,而将其中的最高阶多项式

$$P_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}^\alpha \tag{1.37}$$

称为算子 $P(\boldsymbol{x},\partial)$ 的**主部象征**.

定义 1.9 对于线性偏微分方程(1.29),若 $f(\boldsymbol{x})=0$,则称方程(1.29)为**齐次方程**,否则称其为**非齐次方程**.

接下来,我们对二阶线性偏微分方程

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2}a_\alpha(\boldsymbol{x})\partial^\alpha u(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}) \tag{1.38}$$

进行更详细的分类,以方便进行更好的研究.

定义 1.10 若二阶线性偏微分方程(1.38)的主部象征在 $\boldsymbol{x}$ 点满足

$$P_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\sum_{|\alpha|=2}a_\alpha(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}^\alpha\neq 0,\quad \forall\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n, \tag{1.39}$$

即 $P_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 为关于 $\boldsymbol{\xi}$ 的正定或负定二次型,则称偏微分方程(1.38)在 $\boldsymbol{x}$ 点为**二阶椭圆型偏微分方程**;若偏微分方程(1.38)在区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中的所有点 $\boldsymbol{x}$ 处都是二阶椭圆型偏微分方程,则称偏微分方程(1.38)为 Ω 上的二阶椭圆型偏微分方程.

如果将(1.38)式中的系数写成系数矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}(\boldsymbol{x}))_{n\times n}$ 的形式,则根据高等代数理论知,当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值同号且均不为零时,对应的偏微分方程为二阶椭圆型偏微分方程.例如,n 维 Laplace 方程 $\Delta u=0$ 的主部象征是 $\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2$,为正定二次型.因而,Laplace 方程 $\Delta u=0$ 为椭圆型偏微分方程.

定义 1.11 若二阶线性偏微分方程(1.38)的主部象征

$$P_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\sum_{|\alpha|=2}a_\alpha(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}^\alpha,\quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n \tag{1.40}$$

在 $\boldsymbol{x}$ 点是不定二次型且符号差为 $n-2$ 或 $2-n$,则称对应的线性偏微分方程在该点为**二阶双曲型偏微分方程**.如果该二次型的标准型在 $\boldsymbol{x}$ 点至少有两项的系数与其他至少两项的系数异号,则称对应的线性偏微分方程为**二阶超双曲型偏微**

需要全本请访问 www.ertongbook.com