大学公共数学系列教材

# 高等数学（第二版）

下册

武汉大学数学与统计学院
主编 齐民友

高等教育出版社

● 大 学 公 共 数 学 系 列 教 材

# 高等数学（第二版）

## 下册

武汉大学数学与统计学院
主编　齐民友
编者（以编写章节排序）
胡新启　湛少锋
董　明　杨丽华　桂晓风

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是2009年出版的武汉大学数学与统计学院齐民友主编《高等数学》的修订本，分为上、下两册。本次修订在保持原有框架、内容和风格不变的前提下，贯彻教学改革新精神，融入现代教学手段，对部分章节进行了调整、增删和改写，对部分思考题采取网络导学的方式加以解答，并补充部分网上阅读材料，使其更便于教师课堂教学和学生自主学习，对习题及其答案中的错误进行了修正。

下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、含参变量积分、无穷级数等。

本书延续了第一版结构严谨、层次分明、叙述清晰、例题丰富、便于教学的特点，可作为高等学校工科类各专业和其他非数学类专业的教材和参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学. 下册/齐民友主编. -- 2版. -- 北京：高等教育出版社，2019.8

ISBN 978-7-04-051839-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①齐… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第081004号

策划编辑 张彦云　　责任编辑 张彦云　　封面设计 于文燕　　版式设计 杜微言
插图绘制 于 博　　责任校对 胡美萍　　责任印制 刘思涵

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | | http://www.hep.com.cn |
| 邮政编码 | 100120 | 网上订购 | http://www.hepmall.com.cn |
| 印　　刷 | 山东百润本色印刷有限公司 | | http://www.hepmall.com |
| 开　　本 | 787 mm×960 mm 1/16 | | http://www.hepmall.cn |
| 印　　张 | 24.25 | 版　　次 | 2010年1月第1版 |
| 字　　数 | 440千字 | | 2019年8月第2版 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 印　　次 | 2019年8月第1次印刷 |
| 咨询电话 | 400-810-0598 | 定　　价 | 44.80元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 51839-00

# 目　　录

# 第 8 章　向量代数与空间解析几何

本章由向量代数与空间解析几何两部分内容构成. 如同平面解析几何是学习一元微积分的必不可少的基础一样, 空间解析几何知识对于多元微积分的研究也是不可或缺的.

本章的第一部分建立了空间直角坐标系, 引入向量并介绍了向量的运算. 向量是对自然界中一类既有大小又有方向的物理量的抽象, 它是以几何形式给出的, 在建立了空间直角坐标系后, 向量又可以用坐标来表示. 这样, 借助于向量这个工具, 就可以将代数运算引入到几何中, 利用代数方法研究几何问题. 向量代数方法的建立还为物理及工程技术提供了有力的工具, 同时给出了线性代数中向量空间的一个三维模型.

本章的第二部分介绍了空间解析几何基础知识, 主要是研究空间几何图形及其方程, 包括空间平面与直线及其方程以及空间曲面、曲线的方程. 在空间曲面方程中, 我们着重讨论了柱面、旋转曲面及二次曲面的方程. 读者在学习中应能体会向量在建立有关方程及在讨论有关几何量的位置关系中的作用.

## 第 1 节　向量及其线性运算

### 1.1　向量的概念

现实生活中有许多物理量只有大小、多少之分, 如体积、质量、距离、时间等, 因此只需用数字刻画这类量, 处理这类量的规则也与实数的运算规则相当, 称这类量为**纯量**或**标量**. 然而, 在客观世界中还存在另一类物理量, 这类物理量不仅有大小之分, 还有方向之异, 如力、速度、加速度等, 单纯用数字不足以描述它们. 人们把这类既有大小、又有方向的量称为**向量**.

数学上用一条有方向的线段(即有向线段)来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以 $M_1$ 为起点, $M_2$ 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$. 有时也用一个小写黑体字母或上面加有箭头的字母表示向量, 如向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 或 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 等. 本书中单个字母表示的向量用黑体字母表示, 两个字母表示的向量在上面加箭头表示.

向量的大小称为向量的**模**或**长度**，也称为向量的**范数**. 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$与 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作$|\overrightarrow{M_1M_2}|$与$|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**，本书中记为 $\boldsymbol{e}$. 模等于 0 的向量称为**零向量**，并记作 $\boldsymbol{0}$，规定：零向量的方向是任意的.

在直角坐标系中，以坐标原点为起点，向点 $M$ 引向量，这个向量$\overrightarrow{OM}$称为点 $M$ 对于原点 $O$ 的**向径**，常用 $\boldsymbol{r}$ 表示.

在数学上，我们只研究自由向量，即若两个有向线段的长度相等，方向相同，则不论它们的起点是否相同，我们就认为它们表示同一向量. 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的大小相同，方向一致，则称**向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 相等**，并记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

由于自由向量可在空间自由平移，因此可规定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角如下：将 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的起点重合后，它们所在的射线之间的夹角 $\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**，记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，则称这两个向量**平行**，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的，因此可认为零向量与任意向量都平行.

两向量平行时，若将它们的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在同一直线上. 因此，两向量平行，又称两向量**共线**.

类似地，还有向量共面的概念. 设有 $k\ (k\geqslant 3)$个向量，若将它们的起点放在同一点，这 $k$ 个终点和公共起点都在一个平面上，则称这 $k$ 个向量**共面**.

## 1.2 向量的线性运算

1. 向量的加减法

如果向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$与向量 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$在同一直线上，那么，规定它们的和是这样一个向量：

当$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的方向相同时，和的方向与原来两向量相同，其模等于两向量的模之和；当$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的方向相反时，和向量的模等于两向量的模之差，其方向与模值大的向量方向一致.

根据物理学知识，两个力、两个速度均能合成，得到合力与合速度，且合力与合速度都可根据平行四边形法则求出. 从此实际背景出发，我们对向量规定加法运算如下：

如图 8.1 所示，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，以$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$为边作一平行四边形 $OACB$，取对角线向量$\overrightarrow{OC}$，记 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和，并记作

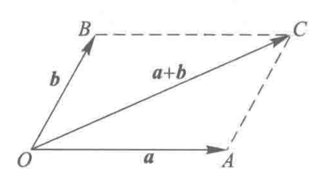



图 8.1

$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

这种用平行四边形的对角线向量来规定两个向量之和的方法称为向量加法的平行四边形法则.

由于平行四边形的对边平行且相等，可以这样来作出两向量的和向量：

如图 8.2，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，以$\overrightarrow{OA}$的终点 $A$ 为起点作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连接 $OC$ 得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}.$$

称这一法则为向量加法的三角形法则.

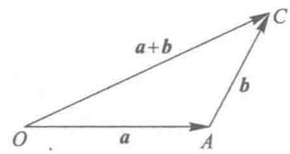


图 8.2

根据向量的加法运算的定义，可以证明向量加法满足下列运算规律：

(1) **交换律**　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) **结合律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

由向量加法的三角形法则与上述运算律，可得 $n$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加的法则如下：

作$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_1,\overrightarrow{A_2A_3}=\boldsymbol{a}_2,\cdots,\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=\boldsymbol{a}_n$（图 8.3），最后作$\overrightarrow{A_1A_{n+1}}=\boldsymbol{a}$，则

$$\overrightarrow{A_1A_{n+1}}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作$-\boldsymbol{a}$. 规定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为向量：$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，这种运算称为向量的减法.

特别地，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由三角形法则可看出：要从 $\boldsymbol{a}$ 减去 $\boldsymbol{b}$，只要把与 $\boldsymbol{b}$ 长度相同而方向相反的向量$-\boldsymbol{b}$ 加到向量 $\boldsymbol{a}$ 上去. 由平行四边形法则，可按图 8.4 作出向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$：即向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是由 $\boldsymbol{b}$ 的终点向 $\boldsymbol{a}$ 的终点所引的向量.

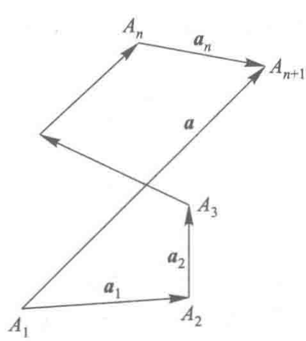


图 8.3

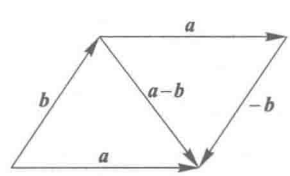


图 8.4

**思考题：**

8.1.1 题解答

8.1.1　证明三角形不等式：$\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big| \leqslant |\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

2. 向量与数的乘法

对任意实数 $\lambda$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，可定义 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda$ 的乘积(简称数乘)为一向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模与方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

特别地，取 $\lambda=-1$，则向量 $(-1)\cdot\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，而方向相反，由负向量的定义知 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

由上述定义，不难推出数乘向量运算满足下列运算规律：

(1) **结合律**　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

显然，向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$，$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的方向相同，且

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu|\cdot|\boldsymbol{a}|,$$

故 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(2) **分配律**　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

同样由向量与数的乘积的定义也可证明(略).

设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，用 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量. 由于 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{e}_a$ 方向相同，从而 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向也相同，而且

$$\big||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a\big|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{e}_a|=|\boldsymbol{a}|,$$

因此 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$，从而 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

这表明：任意非零向量与它的模的倒数的数乘是一个与原向量同方向的单位向量.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此常用向量的数乘来判定两个向量的平行(共线)关系，即有如下定理：

**定理 1.1**　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 $\lambda$，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

**证**　显然由数乘的定义可证充分性成立，以下证必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则取 $\lambda=0$，即有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$；若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot$

$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，即

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}. \tag{1.1}$$

如果另有实数 $\mu$，满足 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，将以上两式相减，得 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，即 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$，但 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$. 因此满足条件的 $\lambda$ 是唯一的. ∎

由(1.1)式知，若向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，则必有

$$\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_a. \tag{1.2}$$

设有数轴 $Ou$，其原点为 $O$，将与 $Ou$ 轴的正向同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{e}_u$，$P$ 为轴上任意一点，其坐标为 $u$，则 $u=\pm|\overrightarrow{OP}|$（$\overrightarrow{OP}$与 $\boldsymbol{e}_u$ 同向时取正,反向时取负），如图 8.5.

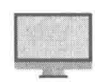

图 8.5

由(1.2)式，$\overrightarrow{OP}=\pm|\overrightarrow{OP}|\boldsymbol{e}_u=u\boldsymbol{e}_u$，从而得以下推论：

**推论**　对数轴上任意一点 $P$，轴上有向线段$\overrightarrow{OP}$都可唯一地表示为点 $P$ 的坐标与轴上单位向量 $\boldsymbol{e}_u$ 的乘积：$\overrightarrow{OP}=u\boldsymbol{e}_u$.

**思考题：**

8.1.2　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，试给出$\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件.



8.1.2 题解答

类似于两个向量平行的充分必要条件，对于向量共面，有如下的充分必要条件：

**定理 1.2**　三个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是其中一个向量可以表示成其余两个向量的线性组合.

**证**　若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中有两个向量共线，则结论显然成立. 因此只需证明 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中任意两个向量不共线的情形.

充分性. 不妨设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，任取一点 $M$，作$\overrightarrow{MA}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{MB}=\mu\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{c}$ 就是以 $MA$，$MB$ 为邻边的平行四边形的对角线 $MC$ 所对应的向量$\overrightarrow{MC}$，因此三个向量$\overrightarrow{MA}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{MB}=\mu\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{c}$ 共面，又因为 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，$\mu\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，从而 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面.

必要性. 若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面，则总可将它们平移使其共起点 $M$，如图 8.6 所示，设 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$，且$\overrightarrow{MA'}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{MB'}=\boldsymbol{b}$，过点 $C$ 分别作$CA/\!/MB'$交 $MA'$

于 $A$，$CB /\!/ MA'$ 交 $MB'$ 于 $B$，则四边形 $MACB$ 为平行四边形，因此有

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BC}=\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AC}=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b},$$

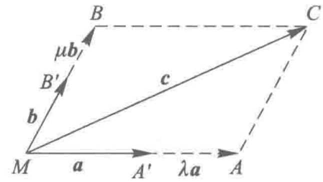


图 8.6

记 $\lambda=\dfrac{|\overrightarrow{BC}|}{|\boldsymbol{a}|}$，$\mu=\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{b}|}$，得

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}+\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$ ∎

由定理 1.2 不难得到

**推论**　三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的数 $k_1$，$k_2$，$k_3$，使得

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

## 习题 8-1

### A　类

1. 设 $A$，$B$，$C$ 为三角形的三个顶点，求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

2. 已知 $\triangle ABC$ 中 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，若 $D$ 是 $AC$ 的中点，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{CD}$ 和 $\overrightarrow{BD}$.

3. 已给正六边形 $ABCDEF$（字母顺序按逆时针方向），记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}$ 和 $\overrightarrow{CB}$.

4. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

### B　类

1. 将 $\triangle ABC$ 的 $BC$ 边五等分，设分点依此为 $D_1$，$D_2$，$D_3$，$D_4$，再将各分点与点 $A$ 连接，试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

2. 试证明：

（1）两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的数 $k_1$，$k_2$，使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

（2）三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的数 $k_1$，$k_2$，$k_3$，使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

部分思考题解答

第 8 章第 1 节

# 第 2 节　点的坐标与向量的坐标

## 2.1　空间直角坐标系

过空间一定点 $O$，作三条互相垂直的数轴，它们都以 $O$ 为原点，且具有相同的长度单位，这三条轴分别叫 $x$ 轴(横轴)，$y$ 轴(纵轴)，$z$ 轴(竖轴)，且统称为坐标轴.

通常把 $x$ 轴，$y$ 轴配置在水平面上，而 $z$ 轴则是该水平面的铅垂线，它们的正方向要符合右手规则：右手握住 $z$ 轴，当右手的四个指头从 $x$ 轴的正向以 $90°$ 角度转向 $y$ 轴正向时，竖起的大拇指的指向就是 $z$ 轴正向(图 8.7). 三条坐标轴就组成了一个**空间直角坐标系**，称为 $Oxyz$ 直角坐标系，点 $O$ 称为坐标原点.

取定空间直角坐标系之后，就可以建立空间点与有序数组之间的对应关系.

设 $M$ 为空间的一已知点，过点 $M$ 分别作垂直于 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴的三个平面，它们与 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴的交点依次为 $P$，$Q$，$R$，这三点在 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴的坐标依次为 $x$，$y$，$z$. 于是，空间点 $M$ 就唯一地确定了一个有序数组 $x$，$y$，$z$.

反过来，任意给定一个有序数组 $x$，$y$，$z$，我们可以在 $x$ 轴上取坐标为 $x$ 的点 $P$，在 $y$ 轴上取坐标为 $y$ 的点 $Q$，在 $z$ 轴上取坐标为 $z$ 的点 $R$，然后过 $P$，$Q$，$R$ 分别作垂直于 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的平面，这三个平面的交点 $M$ 就是有序数组 $x$，$y$，$z$ 确定的唯一的点(图 8.8).

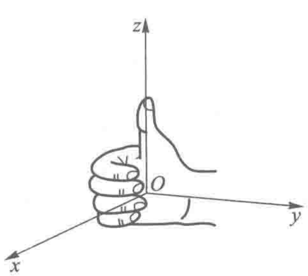



图 8.7

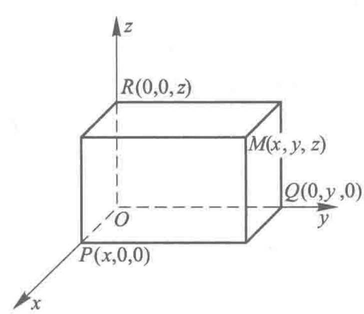



图 8.8

这样，通过空间直角坐标系，我们建立了空间点 $M$ 和有序数组 $x$，$y$，$z$ 之间的一一对应关系. 这组数 $x$，$y$，$z$ 就称为点 $M$ 的坐标. 依次称 $x$，$y$，$z$ 为点 $M$ 的横坐标、纵坐标和竖坐标，并可将点 $M$ 记作 $M(x,y,z)$.

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为**坐标面**. 由 $x$ 轴与 $y$ 轴所决定的坐标面称为 $xOy$ 面，类似地还有 $zOx$ 面与 $yOz$ 面. 这三个坐标面把空间分成了八个部分，每一部分称为一个卦限，如图 8.9 所示，八个卦限分别用罗马字母Ⅰ,Ⅱ,…,Ⅷ表示. 第一、二、三、四卦限均在 $xOy$ 面的上方，按逆时针方向确定，其边界含有 $x$ 轴、$y$ 轴与 $z$ 轴正半轴的那个卦限是第一卦限. 第五、六、七、八卦限均在 $xOy$ 面的下方，也按逆时针方向确定，它们依次分别在第一至四卦限的下方.

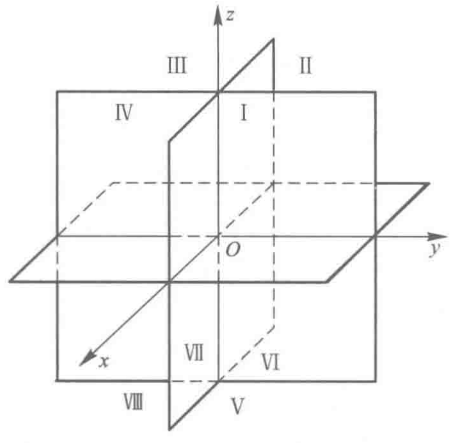


图 8.9

**思考题：**

8.2.1 试确定空间直角坐标系的各个卦限中点的坐标的符号.

类似于平面解析几何，在空间中也可以用点的坐标计算两点间的距离. 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中的两点，过 $M_1$，$M_2$ 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 $M_1M_2$ 为对角线的长方体，如图 8.10 所示. 可见此长方体各棱的长度分别是

$$|x_2-x_1|,\quad |y_2-y_1|,\quad |z_2-z_1|,$$

从而得对角线 $M_1M_2$ 的长度，亦即空间中两点 $M_1$，$M_2$ 间的距离公式为

$$d=|M_1M_2|$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (2.1)$$

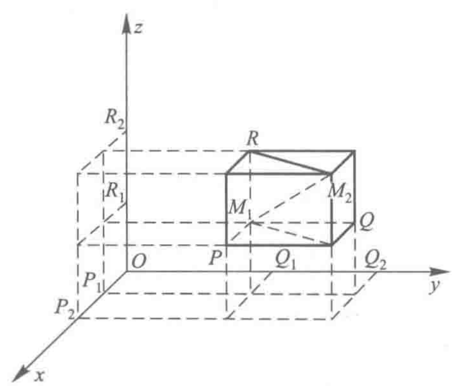


图 8.10