对偶空间简史

冯丽霞　著

中国工信出版集团
電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

对偶空间简史

冯丽霞　著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京・BEIJING

内容简介

对偶空间理论是泛函分析的核心内容之一，是泛函分析历史的重要篇章之一。本书通过历史分析和文献考证的方法，以“积分方程的求解”为主线，对对偶空间理论形成的历史脉络进行了较为深入与细致的研究。全书在相关原始文献和研究文献的基础上，对希尔伯特、里斯、黑利、汉恩和巴拿赫等重要数学家的相关工作进行了详细的重构还原和恰当的分析论证，挖掘了孕育在这些数学家工作中的深邃思想，如希尔伯特求解积分方程的代数化方法，里斯具体对偶空间的产生，黑利、汉恩、巴拿赫抽象对偶空间理论的形成等，探究了这一理论产生过程中重要数学家之间的思想传承和突破。

本书可供大学数学专业的师生、科学史工作者和数学爱好者阅读与参考。

图书在版编目（CIP）数据

对偶空间简史/冯丽霞著. —北京：电子工业出版社，2019.4
ISBN 978-7-121-36057-2

Ⅰ.①对… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①对偶空间—历史 Ⅳ.①O151.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 035372 号

策划编辑：谭海平
责任编辑：谭海平　　特约编辑：王　崧
印　　刷：北京京师印务有限公司
装　　订：北京京师印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：720×1 000　1/16　印张：10.75　字数：187.2 千字
版　　次：2019 年 4 月第 1 版
印　　次：2019 年 4 月第 1 次印刷
定　　价：59.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。
本书咨询联系方式：（010）88254552。

前　言

19 世纪末 20 世纪初，探寻积分方程求解的一般理论大大推动了数学的发展. 希尔伯特在弗雷德霍姆第二型积分方程工作基础上研究积分方程的求解理论，他借助内积这个数学工具将积分方程问题转化为无穷线性方程组的求解问题，借用代数方法处理分析中的问题，其方法蕴含着泛函分析中无限维空间的对偶思想. 希尔伯特有关积分方程求解的一系列论文中蕴含着深刻的泛函思想，被认为是泛函分析思想的开端，为泛函分析的发展奠定了坚实基础.

里斯充分吸收了希尔伯特积分方程工作中的思想精髓，将代数化方法推广到勒贝格平方可积函数空间、p 次可积函数空间上积分方程的求解，在此过程中，产生了具体的对偶空间，其中 L^p 与 L^q 的对偶在数学史上具有划时代意义. 里斯这些深邃的思想吸引了众多数学家对对偶空间理论的探索.

在 20 世纪数学更加抽象化和统一化思潮驱使下，顺应结构数学发展的趋势，产生了用统一的一般观点考虑所有这些具体对偶空间的必要性，希尔伯特和里斯的具体对偶空间思想与方法引起了一大批追随者的兴趣. 这些思想方法经过奥地利数学家黑利、汉恩和波兰数学家巴拿赫等人的进一步抽象，逐步建立了抽象的对偶空间.

对对偶空间理论的历史进行研究有重要意义. 首先，对偶空间是函数空间的推广，是泛函分析中的核心概念之一，对偶空间理论也是泛函分析的重要内容，对其历史进行研究有助于理解泛函分析发展的历史进程. 其次，对希尔伯特、里斯、黑利、汉恩和巴拿赫等重要数学家原始文献的解读，有助于厘清数学家之间的思想传承以及他们的数学思想对近现代数学的影响. 最后，这一梳理为积分方程和泛函分析的教学提供历史背景，使数学专业的学生理解抽象数学概念、数学理论背后的具体问题来源，从而促进学生更深刻地理解相关数学知识.

本书以“积分方程的求解”为主线，详细梳理了 20 世纪初起始的对偶空间形

成过程中重要数学家的工作，探讨了如何由具体问题逐步产生抽象数学概念的过程，以及概念形成后随着新的数学理论的产生与引入如何进行更高一级抽象的过程，由此理解重要数学概念、数学理论和数学分支形成的历史脉络.

本书结构清晰、层次分明、表述准确、论述有力、内容丰富，可作为数学类专业高年级本科生和研究生学习泛函分析和泛函分析史的参考用书，也可作为科学史工作者和数学爱好者的参考用书.

衷心感谢导师李文林研究员及西北大学曲安京教授对本书的指导和帮助，感谢家人对我的关心、支持和帮助，感谢国家自然科学基金（11471189）及山西师范大学数学与计算机科学学院的资助.尽管作者对书稿进行了多次校对，由于水平有限，不足之处在所难免，敬请各位读者批评指正.

目　录

第 1 章 绪　论

1.1 背景及意义

19 世纪以来，数学的发展进入了一个新的阶段．由于欧几里得第五公设的研究，引出了非欧几何这门新兴学科；对于代数方程求解问题的一般思考，创立了群论；对数学分析的进一步研究又建立了集合论等．19 世纪的数学已经呈现出千姿百态的多样性①，到了 19 世纪末 20 世纪初，“出现了用统一的观点来理解 19 世纪数学各个分支所积累的大量实际材料的必要性．”②在这样的观点下，“泛函分析的基本概念从不同的方面和不同的联系中产生了．”③可以说，分析、代数、几何与拓扑中数学思想方法的交融是泛函分析得以发展壮大的力量之源．

首先，集合论是泛函分析形成的基础．当 19 世纪在分析中建立严密性成为必然趋势时，数学家们不得不面对有关无穷集合的许多问题．尤其是在对不连续函数研究时，需要考虑使函数不连续或者使收敛问题困难的点集，由此导致了集合论的建立．在这个过程中，贡献最大的是德国数学家康托尔（Georg Cantor，1845—1918 年）的工作．他在研究函数的三角级数表达式唯一性问题时开始接触无穷点集，认识到建立集合论重要的是把数的概念从有穷数推广到无穷数④，在德国数学家狄利克雷（Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet，1805—1859 年）和黎曼（Bernhard Riemann，1826—1866 年）等人工作的基础上系统发展了一般点集理论．泛函分析是研究无穷维函数空间的学科，有了无穷点集理论，各种具体和抽象函数空间的形成才有了根基．可以说，没有无穷点集理论，就不会有泛函

① 胡作玄．近代数学史[M]．济南：山东教育出版社，2006: 202.

② A. D. 亚历山大洛夫等著．数学——它的内容、方法和意义（第三卷）[M]．北京：科学出版社，2001: 218.

③ A. D. 亚历山大洛夫等著．数学——它的内容、方法和意义（第三卷）[M]．北京：科学出版社，2001: 218.

④ 李文林．数学史概论（第 2 版）[M]．北京：高等教育出版社，2002：255-258.

分析学科的诞生，甚至不会有现代分析的整座数学大厦.

其次，勒贝格积分理论是泛函分析发展的助推器. 在19世纪中后期，分析学上的一个重要课题是“不连续函数的可积性问题”. 通过对黎曼积分的研究发现，不仅在有限处不连续的函数是黎曼可积的，而且许多数学家们构造出了很多在无限处不连续的可积函数，这就引出了“如何衡量点集大小”的问题. 在这个过程中，数学家们重新审视“实数轴”这个看似已很熟悉的研究对象，在极限思想指导下，进一步建立起完备的实数理论，如确界原理、区间套定理、柯西收敛定理等. 在此基础上，取得突破进展的是法国数学家勒贝格（Henri Léon Lebesgue，1875—1941 年），他创造性地把关于集合的代数和外测度的概念结合起来，建立了勒贝格测度理论. 在其论文“积分、长度与面积”[①]中，他第一次叙述了关于测度和积分的思想，建立了以测度为基础的勒贝格积分理论，他的工作替代了 19 世纪的创造[②]. 在这个全新理论支持下，黎曼可积性的问题便迎刃而解，即黎曼可积函数是几乎处处（即除去一个零测集外）连续的. 当然勒贝格积分理论可以应用到更广泛的函数空间（本书第 3 章和第 4 章中都有体现）以及级数理论等其他数学分支. 虽然该理论像集合论一样在初期遭到许多数学家的强烈反对，但它在解决积分方程问题中的成功应用大大促进了泛函分析学科的诞生. 事实上，没有勒贝格积分理论，函数空间的研究是无法想象的[③]. 法国数学家和数学史家迪厄多内（Jean Alexandre Eugène Dieudonné，1906—1992 年）也认为：“如果没有勒贝格积分，泛函分析的发展进程可能会缓慢下来.”[④]

第三，代数学为泛函分析提供了强有力的研究方法. 随着 18 世纪行列式的广泛应用，行列式本身成为独立的研究对象，19 世纪数学家们得到了更丰富的行列式理论及其相关理论，如二次型理论、矩阵理论和线性变换理论以及线性空间理论等. 它们不仅为解决代数学问题提供了实用的工具，促使代数学独立，而且由此引出了一系列新领域. 19 世纪 90 年代，关于无限维矩阵的研究直接导致泛函

① Lebesgue H. Intégrale, longueur, aire [J]. Annali di matematica pura ed applicata, 1902, 7(1): 231-359.

② [美]莫里斯・克莱因著. 邓东皋，张恭庆等译. 古今数学思想（第四册）[M]. 上海：上海科学技术出版社，2002: 123.

③ Pietsch A. History of Banach spaces and linear operators [M]. Springer Science & Business Media, 2007: 614.

④ Dieudonné J. History of functional analysis [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Company, 1981: 120.

分析的诞生[①]. 积分方程求解理论质的飞跃是积分方程的代数化，同时线性空间与集合论的结合促进了无限维函数空间的产生，线性变换及其特征值理论是算子及其谱理论的原型，而这些是泛函分析的基本研究内容. 总之，代数学为泛函分析提供了强有力的方法. 19 世纪代数学的发展已比较系统完善，其方法较简单，操作性强，代数方法在分析学中的应用，会使分析中的问题变得简单.

第四，拓扑结构促进了泛函分析的抽象化发展. 拓扑学是现代分析的抽象基础，它将分析从实数轴推广到一般空间. 拓扑结构是一类重要的数学结构，为我们提供了一种对空间的邻域、极限及连续性等直观概念的抽象的数学描述[②]，它反映出一个集合各个元素间亲疏远近的关系. 由于想要把康托尔的集合论和函数空间的研究统一起来，法国数学家弗雷歇（Maurice Fréchet，1878—1973 年）在 1906 年开创了抽象空间的研究[③]，他推广了距离概念，引进了度量空间，为函数空间的统一化奠定了基础. 后来，数学家们在函数空间中引入范数概念，通过范数又引入了拓扑结构. 拓扑结构的引入打开了泛函分析抽象化的大门，促成了泛函分析成为一门独立的学科，推动了泛函分析学科向更高深度不断发展延伸.

20 世纪二三十年代，集代数、几何、分析和拓扑的观点方法于一身的泛函分析学科创立. 经过一个多世纪的发展，泛函分析已成为现代数学的一个基础学科，是现代分析数学的重要分支之一，被当今科学界喻为“20 世纪的微积分”[④]，几乎每位数学家都需对它有所了解[⑤].

从其名称我们看到，泛函分析就是关于“泛函”的分析. 由此可看到“泛函”在泛函分析创立之初的核心地位. 实际上，泛函分析的创立确实始于“泛函”抽象概念的建立.

1887 年意大利数学家沃尔泰拉（Vito Volterra，1860—1940 年）在狄利克雷关于函数综合概念思想的影响下，认识到一些数值，与函数不一样，不是与某一

① 胡作玄. 近代数学史[M]. 济南：山东教育出版社，2006: 391.
② 胡作玄，邓明立. 20 世纪数学思想[M]. 济南：山东教育出版社，1999: 90.
③ [美]莫里斯・克莱因著. 邓东皋，张恭庆等译. 古今数学思想（第四册）[M]. 上海：上海科学技术出版社，2002: 262.
④ 定光桂. 关于《泛函分析》课程教学改革的试探[J]. 高等理科教育, 2001, (3): 8-10, 17.
⑤ 季理真. Great mathematics books of the twentieth [M]. 北京：高等教育出版社，2013: 166.

或有限的数值相关，而是与一系列连续变化的数值相关，即与一个函数或若干函数相关，由此给出了“（线）函数的函数”——泛函的定义，并试图建立与函数微积分理论相应的一套理论，开创了“泛函”理论的研究，并得到法国数学家阿达玛（Jacques Solomon Hadamard，1865—1963 年）的重视.

之后，弗雷歇受其导师阿达玛的影响在连续线性泛函表示方面做了深入研究，并使之得以传承发扬. 里斯（Frigyes Riesz，1880—1956 年）在发展希尔伯特（David Hilbert，1862—1943 年）积分方程理论的过程中，建立起连续线性泛函表示与积分方程之间的关系. 经过黑利（Eduard Helly，1884—1943 年）、汉恩（Hans Hahn，1879—1934 年）和巴拿赫（Stefan Banach，1892—1945 年）等人的进一步抽象，提出并解决了一般赋范线性空间上连续线性泛函的存在性问题，建立起连续线性泛函的空间理论，此即为对偶空间理论.

对偶空间即为一个赋范线性空间上所有连续线性泛函构成的空间，它的出现是泛函分析中的重要事件之一. 泛函分析学科的确立就以空间理论、算子谱理论和对偶空间理论的形成为标志.

对偶空间的出现，对数学学科及其他学科都有很大的推动.

直观而言，任何希尔伯特空间都有正交基，有了它，就可在希尔伯特空间中建立直角坐标系，可借用代数方法研究分析中的问题. 但是一般巴拿赫空间中并不能保证正交基的存在，也就无法建立坐标系，关于这个空间的研究就会变得很复杂，因为很难将几何问题转化成代数问题从而借助代数方法处理[①]. 一个巴拿赫空间上全体连续线性泛函组成的空间（即对偶空间）实际上充当了坐标的角色，由此不难理解对偶空间的重要性.

数学史上，对偶空间一词经历了 polarer Raum[②]、transponierter Raum[③]、espace conjugué[④]、adjoint space[⑤]等名称的变迁. 1938 年布尔巴基提出 dual space[⑥]，该词被多数数学家接受至今.

---

① http://blog.sciencenet.cn/blog-40247-594715.html.

② Hahn H. Über Folgen linearer operationen [J]. Monatshefte für Mathematik, 1922, 32(1): 3-88.5.

③ Schauder J. Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen [J]. Studia Mathematica, 1930, 1(2): 183-196.

④ Schauder J. Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen [J]. Studia Mathematica, 1930, 1(2): 183-196.

⑤ Alaoglu L. Weak topologies of normed linear spaces [J]. Annals of Mathematics, 1940: 252-267.

⑥ Bourbaki N. Sur les espaces de Banach [M]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1938, 206: 1701-1704.

由其名称演变可看出对偶空间的双重性，即它不仅是一个巴拿赫空间，而且因为其是某一空间上连续线性泛函构成的空间而具有超越一般巴拿赫空间基本属性的特有性质，如对偶空间中的弱*紧定理．这种双重性使得对偶空间理论不仅在其形成之初在积分方程和线性方程组求解问题中起到重要作用，如里斯等人通过对偶空间定义积分算子的对偶算子，而且在形成之后促进了对原空间性质的研究．特别是在之后泛函分析的进一步发展中，通过对巴拿赫代数，C^*代数在其对偶空间单位球上的表示，不仅促进了对这类代数的深刻认识，而且通过这种表示促进了对自伴算子、正规算子等特殊算子谱理论的深入研究．

同时，对偶空间在应用数学领域和其他领域应用广泛，为其他学科提供了理论依据和技术支持．微分几何中切空间的概念与泛函分析中对偶空间的概念有密切联系①．小波分析理论中，可利用对偶空间研究小波空间结构，如对双正交小波与多分辨分析的研究，得出了许多有价值的结论．在遥感领域，可通过投影变换，分别将直线的灰度级标准差及其边缘梯度矢量均值映射到相应的对偶空间，进而在对偶空间上根据直线的标准差和边缘梯度矢量的峰谷分布规律检测道路目标②．在理论力学中，量子矩阵力学和波动力学建立后，海森堡学派和薛定谔学派起初都难以容忍对方的理论，但薛定谔（Erwin Schrödinger，1887—1961 年）后来证明，虽然矩阵力学与波动力学出发点不同，形式也完全相异，但二者可导出同样的结果，两者在物理上完全等价③．其实就是因为它们各自一切可能的状态构成一个希尔伯特空间，而这两个希尔伯特空间互为对偶空间．还有，在计算机通信技术领域，在物理空间和信息空间之间实现人机交互的原理就依赖于它们间存在的对偶关系，从而可利用对偶空间将问题转化．又如，在经济学中，美籍匈牙利数学家冯·诺依曼（John von Neumann，1903—1957 年）于 1947 年将对偶的思想引入经济学，在经济学中提出并创立了对偶理论，主要研究经济学中的相互确定关系，如经济学中典型的产出与成本的对偶、效用与支出的对偶等，为经济学的研究提供了全新而强有力的技术支持．当然，对偶空间的思想还体现在其他许多方面．

---

① 徐西安．“泛函分析”教学方法探讨[J]．高等数学研究, 2008, 11(1): 73-75.

② 谢凤英，姜志国，秦世引．对偶空间上的高分辨率遥感影像道路提取[J]．宇航学报，2006, 27(5): 1034-1038.

③ 刘国钰．对偶空间在理论力学中的应用[J]．技术物理教学, 2013, 21(2): 6-8.

由上分析可知，对偶空间理论是泛函分析的重要内容之一，在理论与应用中都有重要作用，研究对偶空间理论的创立及思想演变，无论是从数学史角度还是从科学史角度，都有重要的理论价值及现实意义.

1.2 问题提出

对偶空间理论是泛函分析史乃至数学史上的一段精彩篇章，对其历史的探讨在目前有关泛函分析各方面历史研究的著述中都有所涉及，下面我们分类举例说明.

第一类，有关泛函分析历史专著中对对偶空间理论的研究.

荷兰乌得勒支大学数学教授莫纳（A. F. Monna）1973 年出版的《历史观点下的泛函分析》[①]一书是数学史上第一本描述泛函分析发展历史的著作，作者用四章的篇幅简要描绘了泛函分析的发展历史. 它的目的有两个：一是概括发展；二是突出被忽略的一些先驱者的工作[②]. 第一章从无穷线性方程组、积分方程、矩量问题、希尔伯特与黑利和里斯工作的补充说明、公理化以及算子理论这几方面概括了泛函分析的发展；第二章主要通过捷克数学家波尔查诺（Bernard Bolzano，1781—1848 年）、法国数学家拉盖尔（Edmond Nicolas Laguerre，1834—1886 年）、德国数学家格拉斯曼（Hermann Gunther Grassmann，1809—1877 年）和意大利数学家皮亚诺（Giuseppe Peano，1858—1932 年）的观点说明线性空间概念的发展；第三章对意大利学派和法国学派有关一般分析的工作做了述评，意大利学派主要讨论了平凯莱（Pincherle Salvatore，1853—1936 年）的工作，法国学派简要介绍了波莱尔（Emile Borel，1871—1956 年）和弗雷歇的工作；第四章讨论了现代泛函分析中有影响力的一些主题，如维尔斯特拉斯定理、巴拿赫代数、哈尔测度、函数的产生、非阿基米德分析、经典问题及泛函分析中的基本定理等.

布尔巴基学派创始人之一法国数学家和数学史家迪厄多内的《泛函分析史》[③]一

① Monna A. F. Functional analysis in historical perspective [M]. Utrecht, The Netherlands Publishing Company Oosthoek, 1973.

② Aupetit B. Functional analysis in historical perspective by A. F. Monna. Utrecht (Oosthoek Publishing Co). 1973. 17S p [J]. Historia Mathematica, 1976(No.1): 93-95.

③ Dieudonné J. History of functional analysis [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Company, 1981.

书“以翔实的材料详细探讨了泛函分析的历史和发展，以拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange，1736—1813 年）和丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoull，1700—1782 年）的工作为开端，通过 20 世纪前期弗雷德霍姆（Ivar Fredholm，1866—1927 年）、希尔伯特和里斯的思想传承，一直到 20 世纪 60 年代结束.”①

该书共九章，包括线性微分方程和斯图姆-刘维尔问题、“密码”方程、振动弦方程、无穷的思想、希尔伯特空间的重要发展时期和定义、对偶和赋范空间的定义、1900 年之后的谱理论、局部凸空间和分布理论，以及泛函分析在微分和偏微分方程中的应用等内容. 前三章可以视为泛函分析的前史. 该书系统地介绍了如何从求解方程问题到希尔伯特空间、赋范线性空间和谱理论的形成，在此基础上进一步探讨了分布理论，最后探讨这些抽象理论的具体应用，其中直接涉及对偶空间理论的是第六章，第一节给出了阿达玛、弗雷歇和里斯的相关连续线性泛函表示的结果，第二节简要陈述了里斯关于 L^p 和 l^p 空间的工作，并探讨了 L^p 和 L^q（$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$）的对偶，第三节介绍赋范线性空间和泛函延拓定理的诞生，第四节介绍“驼峰”和“贝尔纲”方法.

德国耶拿弗里德里希·席勒大学数学史家皮特施（Albrecht Pietsch，1934—）的《巴拿赫空间和线性算子理论历史》②是一本有关巴拿赫空间和线性算子理论的历史巨著，洋洋洒洒，共 877 页. 作者在序言中就说，莫纳的《历史观点下的泛函分析》和迪厄多内的《泛函分析史》主要致力于介绍 20 世纪 50 年代前的泛函分析，而他愿意冒险去探索整个泛函分析的发展史，也考虑了 20 世纪 50 年代后泛函分析的发展. 作者 1958 年获得硕士学位时，正是巴拿赫空间理论鼎盛之时，经历了 50 年代后期泛函分析的发展历程，有机会收集详细材料，从而给他的研究提供了便利. 作者使用集合论、拓扑、代数、组合数学、概率理论和逻辑等工具，从整体的角度将巴拿赫空间作为数学的一部分，而不是作为孤立的学科来呈现. 作者认为从科学的观点而言，重要的不是“谁证明了这个定理”，而是“为什么以及如何证明一个定理”. 因此这本书“以数学的历史”而非“数学家的历史”呈现内容，由于作者涉及的历史事件数量众多，时间跨度大，不能详尽描述每一历史事件的产生发

① http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dieudonne.html.

② Pietsch A. History of Banach spaces and linear operators[M]. Springer Science & Business Media, 2007.

展及各个数学家之间的思想传承，但也给我们提供了一定的研究线索和空间.

以上这几本著作或多或少都涉及了相关数学家的研究工作，如希尔伯特、里斯和黑利的工作，且都提到了里斯的 L^p 空间与 L^q 空间的对偶工作.

第二类，与泛函分析史相关的专题论文中对于对偶空间理论的研究.

在此列举一些有代表性的。

贝恩科普夫（Michael Bernkopf）的“以积分方程为起源的函数空间的发展”①这篇文章从积分方程理论角度探讨函数空间的发展，是一种百科全书式的描述②，共五章. 第一章从代数和分析两方面探讨函数空间思想的萌芽；第二章讨论希尔伯特的积分方程和无限二次型理论；第三章介绍弗雷歇有关抽象度量空间的工作；第四章探讨希尔伯特之后函数空间理论的发展，如美国数学家摩尔（Eliakim Hastings Moore，1862—1932 年）的工作、德国数学家施密特（Erhard Schmidt，1876—1959 年）在希尔伯特序列空间引入几何结构、里斯-费舍尔定理的发现、里斯引入 L^p 空间、希尔伯特空间的公理化等工作；第五章讨论关于巴拿赫空间及其对偶空间的发现，主要有除巴拿赫以外的其他数学家对巴拿赫空间的研究、巴拿赫创立巴拿赫空间、对偶空间的发现.

哈佛大学数学系教授伯克霍夫（Garrett Birkhoff，1911—1996 年）的“泛函分析的创立”③一文列举了泛函分析发展史上的重要事件，并简要概述了一些重要数学家的工作，如意大利学派的一些先驱工作、希尔伯特和里斯的积分方程工作、“泛函分析”一词出现后该学科的发展情况.

“泛函分析简史”④一文通过概述泛函分析发展史上一些具体而重要的历史事件来概括泛函分析学科的发展，文中简要提到了里斯关于平方可积函数空间的工作，黑利、汉恩和巴拿赫的赋范线性空间工作.

“泛函分析的起源和早期历史”⑤一文首先介绍 18 世纪和 19 世纪由于常微分

① Bernkopf M. The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory [J]. Archive for History of Exact Sciences, 1966, 3(1): 1-96.

② Aupetit B. Functional analysis in historical perspective By A. F. Monna. Utrecht (Oosthoek Publishing Co). 1973. 17S p [J]. Historia Mathematica. 1976 (No.1): 93-95.

③ Birkhoff G., Kreyszig E. The establishment of functional analysis [J]. Historia mathematica, 1984, 11(3): 258-321.

④ Neal L. Carothers. A Brief History of Functional Analysis. BGSU Colloquium, October 15, 1993.

⑤ Lindström J. On the origin and early history of functional analysis [R]. Technical Report UUDM Projrect Report 2008: 1, Uppsala Universitet, 2008.

方程和偏微分方程的研究促进了函数概念和极限概念的发展；其次详细介绍了积分方程理论的发展，在此基础上研究弗雷德霍姆的积分方程理论和希尔伯特的积分方程工作与谱理论；最后探讨空间概念的发展和紧算子理论的形成．这篇文章通过较长篇幅从空间和算子的角度探讨泛函分析学科 1918 年之前的发展．

“里斯表示定理的形成”①一文以很长的篇幅讨论 $C[a,b]$ 上连续线性泛函表示定理的形成历史，作者认为表示定理的出现统一了长期以来函数中存在的“综合”观点和“解析”观点的矛盾．详细介绍了沃尔泰拉的泛函思想、阿达玛和里斯关于 $C[a,b]$ 上的泛函表示工作．

还有一些专门讨论某一数学家历史贡献的论文，如“莫里斯・弗雷歇的研究”②和“作为泛函分析先驱的里斯”③等，它们对弗雷歇和里斯个人的数学工作进行研究，对他们在连续线性泛函表示方面的工作有所陈述．

第三类，泛函分析史的学位论文中有关对偶空间理论的研究．

“20 世纪 50 年代前泛函分析历史研究”④一文对泛函分析发展过程中的主要数学家及主要事件做了概述，并简要介绍了泛函分析在中国的发展．“里斯在泛函分析中的两个重要定理”⑤一文讨论了里斯-费舍尔定理和里斯表示定理的形成．“弗雷歇对泛函分析及一般拓扑所做的贡献”⑥一文讨论了弗雷歇在泛函表示和度量空间方面的工作．“里斯对泛函分析的贡献”⑦一文概述了里斯在泛函分析创始期和独立发展期的贡献，文中讨论了里斯关于 L^p 空间的对偶工作．“希尔伯特的积分方程理论”⑧和“积分方程之巴拿赫空间理论的研究”⑨分别探讨了希尔伯特的特征值理论和巴拿赫空间理论的形成，且文中都提及了 L^p 空间与 L^q 空间的对偶．

① Gray, J. D. The shaping of the riesz representation theorem: A chapter in the history of analysis [J]. Archive for History of Exact Sciences, 1984, 31(2): 127-187.

② Taylor, A. E. A study of Maurice Frechet: I. His early work on point set theory and the theory of functional [J]. Arch. Hist. Ex. Sc. 1982, 27(3): 233-295.

③ Kreyszig E. Friedrich Riesz als Wegbereiter der Funktionalanalysis [J]. Elemente Mathematik, 1990, Vol. 45: 117-130.

④ 付琳．20 世纪 50 年代前泛函分析历史研究[D]．济南：山东大学，2010.

⑤ 王丹丹．里斯在泛函分析中的两个重要定理[D]．西安：西北大学，2013.

⑥ 王冰霄．弗雷歇对泛函分析及一般拓扑所做的贡献[D]．西安：西北大学，2013.

⑦ 范丹丹．里斯对泛函分析的贡献[D]．石家庄：河北师范大学，2014.

⑧ 李亚亚．希尔伯特的积分方程理论[D]．西安：西北大学，2015.

⑨ 李威．积分方程之巴拿赫空间理论的研究[D]．西安：西北大学，2015.