高教版 2019

严格按照考研数学最新考试内容、考试要求
和题型结构编写

考研数学

考试解析配套 600 题

（数学一和数学二适用）

全国考研数学配套教材编委会

高等教育出版社

● 最佳搭配：考试解析 + 考试解析配套 600 题

高教版 2019

严格按照考研数学最新考试内容、考试要求
和题型结构编写

考研数学

考试解析配套 600 题

（数学一和数学二适用）

全国考研数学配套教材编委会

高等教育出版社·北京

● 最佳搭配：考试解析 + 考试解析配套 600 题

内容简介

《2019考研数学考试解析配套600题(数学一和数学二适用)》具有如下特色：

1. 在对试题内容的分类和命题规律研究的基础上，按照考试内容对题型和考点进行了分类，每部分内容和练习题后面对这类题型的解题方法和技巧、需要着重掌握的内容、考生答题中丢分的主要因素进行了简明扼要的小结，使读者在练习几道题后对这部分内容的解题要点、常见错误有更深的体会，进而能够获得良好的学习效果；

2. 题目达到或略高于考题的深度和难度，注重数学思考方法的培养、解题方法的掌握和解题技巧的训练，使得考生不但能够熟悉试题的类型，而且能够掌握解决问题的方法；

3. 题目知识点覆盖全面，融入了编者多年从事考研辅导授课经验和积累的丰富资料，某些题目是编者根据命题趋势和阅卷经验有针对性地自行命制，有较高的参考价值；

4. 体例简洁，符合学习规律。

编辑推荐：

《2019考研数学考试解析配套600题》是《2019全国硕士研究生招生考试数学考试解析》的姊妹篇，与《考研数学复习教程》《考研数学基础过关500题》《2019考研数学冲刺模拟5套卷》共同构成考研数学考试大纲配套权威辅导用书系列。

《2019考研数学考试解析配套600题》旨在帮助考生在强化复习阶段强化解题思维训练，培养和快速提高解题能力，为拿下数学高分打下坚实基础。

图书在版编目（CIP）数据

2019考研数学考试解析配套600题：数学一和数学二适用／全国考研数学配套教材编委会编．--北京：高等教育出版社，2018.8
ISBN 978-7-04-050426-2

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第176559号

2019考研数学考试解析配套600题(数学一和数学二适用)
2019 KAOYAN SHUXUE KAOSHI JIEXI PEITAO 600 TI(SHUXUE YI HE SHUXUE ER SHIYONG)

策划编辑 朱丽娜　责任编辑 张耀明　封面设计 李小璐　版式设计 王艳红
责任校对 王　雨　责任印制 耿　轩

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京市密东印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	17.25		
字　数	580千字	版　次	2018年8月第1版
购书热线	010-58581118	印　次	2018年8月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	46.00元

物 料 号　50426-00

修订说明

《2019考研数学考试解析配套600题(数学一和数学二适用)》是《2019全国硕士研究生招生考试数学考试解析(数学一和数学二适用)》的姊妹篇,与《考研数学复习教程(数学一和数学二适用)》《考研数学基础过关500题》《2019考研数学冲刺模拟5套卷(数学一适用)》共同构成考研数学考试大纲配套权威辅导用书系列。

《2019考研数学考试解析配套600题(数学一和数学二适用)》旨在帮助考生在强化复习阶段强化解题思维训练,培养和快速提高解题能力,为拿下数学高分打下坚实基础。为了使读者获得良好的复习效果,在编写过程中《2019考研数学考试解析配套600题》贯彻如下指导思想:

1. 严格按照《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》的内容和要求编写;

2. 内容上力求能够把握命题规律,追踪命题走向,立足考题特点;

3. 风格简约清新,适应学习规律,帮助考生达到高质、高效的学习效果。

按照上述指导思想,本书具有如下特色:

1. 在对试题内容的分类和命题规律研究的基础上,按照考试内容对题型和考点进行了分类,每部分内容和练习题后面对这类题型的解题方法和技巧,需要着重掌握的内容,考生答题中丢分的主要因素进行了简明扼要的小结,使读者在练习几道题后对这部分内容的解题要点、常见错误有更深的体会,进而能够获得良好的学习效果;

2. 达到或略高于考题的深度和难度,注重数学思维方法的培养,解题方法的掌握和解题技巧的训练,使考生不但能够熟悉试题的类型,而且能够掌握解决问题的方法;

3. 题目知识点覆盖全面,融入了编者多年从事考研辅导授课经验和积累的丰富资料,某些题目是编者根据命题趋势和阅卷经验有针对性地自行命制,有较高的参考价值;

4. 体例简洁,符合学习规律。

本书适用于考研数学的数学一和数学二卷种。

在编写过程中,作者参考了许多相关教材,引用了其中的一些例子,恕不一一列出,在此向有关作者表示诚挚的感谢,并致以深深的敬意。

本书仓促付梓,书中的疏漏和不足,敬请同行专家和读者不吝赐教。

编　者

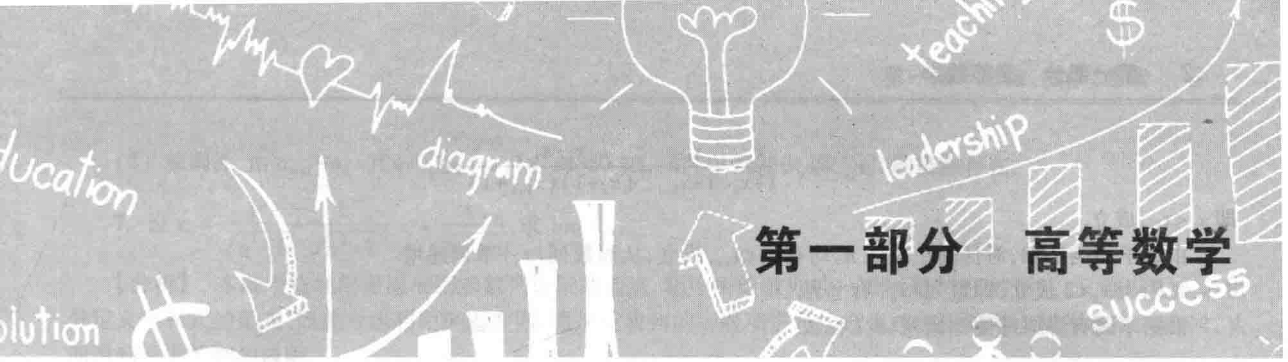
2018年8月

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计



第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

1. 如果数列 $x_n>0, n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a>1$，则数列 x_n(　　)

(A) 有界.　　(B) 趋向于正无穷大.　　(C) 收敛于 a.　　(D) 收敛于 0.

【解】 因为 $a>1$，取常数 r，使得 $a>r>1$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a>r>1.$$

由极限的保号性，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}>r>1, n=N+1, N+2, \cdots,$$

于是得到

$$x_{N+k}>r^k x_N, k=1,2,\cdots.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}r^k=+\infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，应选(B).

2. 设 $f(x+1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-2}\right)^n$，则 $f(x)=$(　　)

(A) e^{x-1}.　　(B) e^{x+2}.　　(C) e^{x+1}.　　(D) e^{-x}.

【解】 应选(C).

$$f(x+1)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2+x}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2+x}}\right]^{\frac{n(2+x)}{n-2}}=e^{2+x}=e^{1+(x+1)},$$

所以 $f(x)=e^{1+x}$，因此选(C).

3. 设常数 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$，$x_1=a, x_n=a^{x_{n-1}}(n=2,3,\cdots)$，证明当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

【证】 因为 $x_1=a>1$，所以 $x_2=a^{x_1}>a=x_1$.

假设 $x_n=a^{x_{n-1}}>x_{n-1}$，则

$$x_{n+1}=a^{x_n}>a^{x_{n-1}}=x_n.$$

由归纳法，$\{x_n\}$ 为单调增加数列.

又 $x_1=a<e$，假设 $x_n<e$，则

$$x_{n+1}=a^{x_n}<a^e<(e^{\frac{1}{e}})^e=e,$$

由归纳法知 $\{x_n\}$ 有上界.

由单调有界准则，数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

4. 设 $x_1=1, x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{x_n+1}, n=1,2,\cdots$，证明当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求其值.

【证】 首先证明数列 $\{x_n\}$ 是单调递增的.

$x_1<x_2$ 显然成立.

假设 $x_{k-1}<x_k$ 成立，则有

$$x_{k+1}-x_k=\frac{x_k}{1+x_k}-\frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}}=\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_k+1)(x_{k-1}+1)}>0,$$

即 $x_k<x_{k+1}$ 成立.

由数学归纳法知,对任何正整数 n,均有 $x_n<x_{n+1}$ 成立,从而数列 $\{x_n\}$ 单调递增.

又因为 $x_n<2$ 成立,即数列 $\{x_n\}$ 有上界.

根据单调有界原理便知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,将 $x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{x_n+1}$ 两边取极限得

$$l^2=l+1.$$

考虑到 $l>0$,解得 $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,

因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

5. 设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

【解】 (1) 由题意

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}.$$

令 $f'(x)=0$,得唯一驻点 $x=1$.

又

$$f''(1)=\left.\frac{2-x}{x^3}\right|_{x=1}=1>0,$$

故 $f(1)=1$ 是极小值,也是最小值.

(2) 由(1)知 $\ln x+\dfrac{1}{x}\geqslant 1$,从而 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\geqslant 1$,于是

$$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<\ln x_n+\frac{1}{x_n},$$

即 $x_{n+1}>x_n$,故 $\{x_n\}$ 为单调增加数列.

又 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$,知 $\ln x_n<1$,故 $x_n<\mathrm{e}$,即 $\{x_n\}$ 有上界,由单调有界准则,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

在不等式 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$ 两边取极限,且设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,有

$$\ln a+\frac{1}{a}<1.$$

又 $\ln a+\dfrac{1}{a}\geqslant 1$,故 $\ln a+\dfrac{1}{a}=1$,得 $a=1$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

6. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数,

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots),$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

【解】 只须证明 a_n 是单调有界数列. 由题设 $f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(k)$, $k=1,2,\cdots$.

(1) 有界性. $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\right]+f(n)\geqslant 0.$

（2）单调性. 由 $a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\,dx\leqslant 0$ 知，$\{a_n\}$ 单调减少，故 $\{a_n\}$ 的极限存在.

7. 设 $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】 本题考查利用夹逼准则求数列极限的方法. 题中所给数列的一般项是“和”的形式，又难以写成定积分定义中和式的形式，因此考虑利用夹逼准则. 通过对数列的一般项进行恰当地放缩得到两个极限相等的数列，从而得到所求数列的极限.

【解】 对一切 n，显然有

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

由夹逼准则，有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

8. 设 $x_n=\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 因为

$$1\leqslant\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{n},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，所以由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(2\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{2}{n}\right)$.

【分析】 本题是数列未定式的极限问题，先利用海涅定理化为函数极限，在利用洛必达法则求出极限.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(2\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^3}}$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-2\cos 2x}{3x^2}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin x+4\sin 2x}{6x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin x}{6x}+\lim_{x\to0}\frac{4\sin 2x}{6x}\\
&=-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\\
&=1.
\end{aligned}$$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=$ ________.

【分析】 这是一个数列未定式，可以利用海涅定理化数列极限为函数极限，再利用洛必达法则.

【解】 设 $\sqrt{n}=x$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}$$

$$=2.$$

11. 设函数$f(x)$在$x=a$可导,且$f(a)\neq 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=$________.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right]^n$

$$=\exp\left\{\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}\frac{1}{f(a)}\right\}$$

$$=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

12. 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)(a\neq 0)$.

【解】 由拉格朗日中值定理知

$$\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}=\frac{1}{1+\xi_n^2}\left(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}\right)=\frac{1}{1+\xi_n^2}\frac{a}{n(n+1)}\left(\frac{a}{n+1}<\xi_n<\frac{a}{n}\right).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{1+\xi_n}\frac{n^2}{n(n+1)}=a.$$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$________.

【解】 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\dfrac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\dfrac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

14. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{1}{i}}2^{\frac{i}{n}}$.

【解】 显然

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{1}{i}}2^{\frac{i}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}.$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2},$$

所以由夹逼准则,知$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{1}{i}}2^{\frac{i}{n}}=\dfrac{1}{\ln 2}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(k+1)^2}{k!}=$________.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(k+1)^2}{k!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n!}x^n\Big|_{x=1}=(x^2+3x+1)e^x\Big|_{x=1}=5e.$

16. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^x-1}{x\ln(1+x^2)}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{2}{x}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{x}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【分析】 本题考查函数未定式的极限，可利用等价无穷小量代换和洛必达法则求极限. 对(3)、(5)题先"指数对数化"，再利用洛必达法则，对(4)题先做变量代换 $x=\dfrac{1}{t}$，再利用泰勒公式求极限.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^x-1}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\frac{1+\cos x}{2}}-1}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln\dfrac{1+\cos x}{2}}{x\cdot x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{2}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x-1}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2}=-\frac{1}{4}.$$

(2) 因 $(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$，所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^x(\ln x+1)}{-1+\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{-x^x(\ln x+1)^2-x^x\cdot\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{-1-1}{-1}=2.$$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}}=e^0=1.$

(4) 令 $\dfrac{1}{x}=t$，则

$$\lim_{x\to\infty}x^3\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-\dfrac{1}{2}\sin 2t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\dfrac{t^3}{6}+o(t^3)-\dfrac{1}{2}\left[2t-\dfrac{(2t)^3}{6}+o(t^3)\right]}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^3}{2}+o(t^3)}{t^3}=\frac{1}{2}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}}=e^{-1}.$

17. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

【解法1】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}$，

且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x+2x\sin x}\cdot\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos 2x+2\cos x-x\sin x}{6x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x-3\sin x-x\cos x}{12x}\\&=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

【解法2】 因为

$$\lim_{x\to0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to0}(1+\cos 2x+2x\sin x-1)^{\frac{1}{x^4}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin 2x+\sin x+x\cos x}{2x^3}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\cos 2x+2\cos x-x\sin x}{6x^2}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{4\sin 2x-3\sin x-x\cos x}{12x}}$$
$$=e^{\frac{1}{3}}.$$

18. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$；（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}$.

【分析】 本题考查利用泰勒公式求函数未定式极限. 若直接利用洛必达法则不易求出其极限，可利用泰勒公式计算.（1）题应先利用代换 $t=\frac{1}{x}$ 转化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，再利用泰勒公式.

【解】 （1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$ $\left(令\ t=\frac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{t\to0^+}\left[\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2t}\right)e^t-\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^6+1}\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)e^t-\sqrt{1+t^6}}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)-(1+o(t^3))}{t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{t^3}{6}+o(t^3)}{t^3}=\frac{1}{6}.$$

（2）因为 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$，

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4),$$

$$\ln(1-2x)=-2x-\frac{1}{2}(-2x)^2+o(x^2)=-2x-2x^2+o(x^2),$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right]}{x^2[2x-2x-2x^2+o(x^2)]}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{-2x^4+o(x^4)}=\frac{1}{24}.$$

19. 已知极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^n}=c\neq0$，试确定常数 n 和 c 的值.

【解法 1】 由洛必达法则，得

$$\lim_{x\to0}\frac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}}{nx^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{2}{(1+x)(1-x)}}{nx^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2(-2x^2)}{1-x^4}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{-4x^2}{nx^{n-1}(1-x^4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4}{1-x^4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{nx^{n-3}}=-4\lim_{x\to 0}\frac{1}{nx^{n-3}}=c,$$

故有 $n=3$， $c=-\dfrac{4}{3}$.

【解法 2】 因为

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

所以
$$2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}=2\arctan x-\ln(1+x)+\ln(1-x)=-\frac{4}{3}x^3+o(x^3),$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{4}{3}x^3+o(x^3)}{x^n}=c\neq 0$，从而有　$n=3,c=-\dfrac{4}{3}$.

20. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-1}{\tan x}-\dfrac{e^x\sin x}{\tan^2 x}\right)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

【解】 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cdot x}{x^2}=\infty$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{\tan x}=\infty$.

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-1}{\tan x}-\dfrac{e^x\sin x}{\tan^2 x}\right)=2$，知存在 $x\to 0$ 时的无穷小量 $\alpha(x)$，使得

$$\frac{f(x)-1}{\tan x}-\frac{e^x\sin x}{\tan^2 x}=2+\alpha(x)$$

成立. 则 $f(x)=2\tan x+\alpha(x)\tan x+\dfrac{e^x\sin x}{\tan x}+1$，从而

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(2\tan x+\alpha(x)\tan x+\frac{e^x\sin x}{\tan x}+1\right)=2.$$

21. 设 $f(x)$ 在 $0<|x|<\delta$ 时有定义，其中 δ 为正常数，且

$$\lim_{x\to 0}\left[\cos x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=e,$$

求极限 $\dfrac{f(x)}{x^3}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cos x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(\cos x-1+\dfrac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\cos x-1+\frac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{\cos x-1+\frac{f(x)}{x}}\cdot\frac{\cos x-1+\frac{f(x)}{x}}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{f(x)}{x^3}\right]}=e,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=\dfrac{3}{2}$.

22. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}$.

【解】 因为

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}+f(x)}{x^2}=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}+f(x)\right)=0.$

又$f(x)$在$x=0$的某邻域内二阶可导,因此$f(x)$,$f'(x)$在$x=0$处连续,从而$f(0)=-3$.

因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{x}+f(x)}{x^2}=0$,所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{x}-3+f(x)+3}{x^2}=0$,故

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3-\dfrac{\sin 3x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3-3\cos 3x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\frac{9}{2}.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{f(x)+3}{x^2}=0\times\frac{9}{2}=0.$$

由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}=\dfrac{9}{2}$,将$f(x)$麦克劳林展开,得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)+3}{x^2}=\frac{9}{2},$$

因此$\dfrac{1}{2}f''(0)=\dfrac{9}{2}$,于是$f''(0)=9$.

23. 设$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=c$,求$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x-1)]$.

【解】 由微分中值定理,存在$\xi\in(x-1,x+1)$,使

$$f(x+1)-f(x-1)=2f'(\xi).$$

注意到当$x\to\infty$时,$\xi\to\infty$,从而

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}2f'(\xi)=2\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=2c.$$

24. $[x]$表示不超过x的最大整数,试确定常数a的值,使$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]$存在,并求出此极限.

【解】 $$\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to-\infty}\frac{\ln(1+e^{2u})}{\ln(1+e^u)}=\lim_{u\to-\infty}\frac{\dfrac{2e^{2u}}{1+e^{2u}}}{\dfrac{e^u}{1+e^u}}=\lim_{u\to-\infty}\frac{2(1+e^u)e^{2u}}{(1+e^{2u})e^u}=0,\ \lim_{x\to0^-}a[x]=-a.$$

又 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2u})}{\ln(1+e^u)}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2e^u(1+e^u)}{1+e^{2u}}=2,$$

$$\lim_{x\to0^+}a[x]=0.$$

故$-a=2$,即$a=-2$时上述极限存在,并且

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]=2.$$

25. 若$x\to0$时$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$与$x\sin x$是等价无穷小量,试求常数a.

【分析】 本题考查等价无穷小量的定义.

【解法 1】 $$\lim_{x\to0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\frac{a}{4}.$$

由等价无穷小的定义知$-\dfrac{1}{4}a=1$,即$a=-4$.

【解法 2】 $$\lim_{x\to0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{4}(1-ax^2)^{-\frac{3}{4}}(-2ax)}{\sin x+x\cos x}=-\frac{a}{2}\lim_{x\to0}\frac{x(1-ax^2)^{-\frac{3}{4}}}{\sin x+x\cos x}$$

$$=-\frac{a}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}=-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{a}{4}=1,$$

即 $a=-4$.

26. 当 $x\to0$ 时,$x-\sin x\cos x\cos 2x$ 与 cx^k 为等价无穷小量,则(　　)

(A) $c=\frac{8}{3},k=3$.　　(B) $c=\frac{8}{3},k=2$.　　(C) $c=\frac{2}{3},k=3$.　　(D) $c=\frac{2}{3},k=2$.

【解】 应选(A).

应用三角函数公式化简,有

$$x-\sin x\cos x\cos 2x=x-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=x-\frac{1}{4}\sin 4x.$$

由于 $\sin u=u-\frac{1}{3!}u^3+o(u^3)$,所以

$$\begin{aligned}x-\sin x\cos x\cos 2x&=x-\frac{1}{4}\left[4x-\frac{1}{6}(4x)^3+o(x^3)\right]\\&=x-x+\frac{1}{24}\cdot4^3x^3+o(x^3)=\frac{8}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

因 $x\to0$ 时,原式 $\sim cx^k$,所以 $c=\frac{8}{3},k=3$.

27. 设当 $x\to0$ 时,$\ln(1+x)-(ax^2+bx)$ 是比 $x\arcsin x$ 高阶的无穷小量,试求常数 a 和 b.

【分析】 本题考查高阶无穷小量的定义,其中 $\ln(1+x)$ 要利用泰勒公式展开.

【解】 当 $x\to0$ 时,$x\arcsin x\sim x^2$. 而

$$\ln(1+x)-(ax^2+bx)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax^2+bx)=(1-b)x-\left(\frac{1}{2}+a\right)x^2+o(x^2).$$

由条件知 $1-b=0,\frac{1}{2}+a=0$,即 $a=-\frac{1}{2},b=1$ 时,$\ln(1+x)-(ax^2+bx)$ 是 $x\to0$ 时的比 $x\arcsin x$ 高阶的无穷小量.

28. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & 若\ x\neq1,\\ 1, & 若\ x=1.\end{cases}$ 问 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续? 若不连续,修改 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的定义,使之连续.

【分析】 本题考查分段函数在分段点处的连续性.

【解】 $$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{1}{-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2}\neq1.$$

即 $\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$,故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

令 $f(1)=-\frac{4}{\pi^2}$,则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

29. 设函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x^2}, & x\neq0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导,$f''(0)\neq0,f'(0)=0,f(0)=0$,则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的(　　)

(A) 第一类间断点.　　(B) 连续点.

(C) 第二类间断点.　　(D) 连续点或间断点不能由此确定.

【解】 应选(A).

$$\lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)\neq F(0),$$

所以 $x=0$ 是 $F(x)$ 的第一类(可去)间断点.

30. 设 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right]=3$,求 $f(0)$.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right]=3$ 知

$$\frac{f(x)-1}{x}-\frac{\sin x}{x^2}=3+\alpha(x)\text{,其中}\lim_{x\to0}\alpha(x)=0.$$

$$xf(x)-x-\sin x=3x^2+\alpha(x)\cdot x^2,$$

$$f(x)=3x+1+\frac{\sin x}{x}+\alpha(x)\cdot x.$$

等式两边取极限,得

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left[3x+1+\frac{\sin x}{x}+\alpha(x)\cdot x\right]=2.$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$.

31. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\arctan\dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}$ 的间断点,并判别其类型.

【解】 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$ 以及 $x-\dfrac{1}{x}=0$,即 $x=1$ 和 $x=-1$.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{1}{x-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan\frac{x}{x^2-1}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{x^2-1}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x(x^2-1)}=\infty,$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点,且是无穷间断点.

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to1^-}\arctan\frac{x}{x^2-1}=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to1^+}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to(-1)^-}\arctan\frac{x}{x^2-1}=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\frac{\pi}{2}.$$

故 $x=1$ 和 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点,且是跳跃间断点.

32. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(e^{nx}+1)}{1+x^2e^{nx}}$,讨论 $f(x)$ 的间断点,其结论为( )

(A) 不存在间断点. (B) $x=0$ 是可去间断点.

(C) $x=0$ 是跳跃间断点. (D) $x=0$ 是无穷间断点.

【解】 应选(D).

当 $x=0$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0\cdot2}{1}=0$,

当 $x<0$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(e^{nx}+1)}{1+x^2e^{nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+0}=x$,

当 $x>0$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(e^{nx}+1)}{1+x^2e^{nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(1+e^{-nx})}{e^{-nx}+x^2}=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$,

$$\text{即}f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，故应选(D).

33. 证明方程 $\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内至少有两个实根.

【分析】 本题考查利用零点定理证明方程的根的存在性.

【解】 令 $f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x\right)-\sqrt{2}$$

$$\xlongequal{\text{令 } t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{\mathrm{e}t}-\ln\frac{1}{t}\right)-\sqrt{2}=\lim_{t\to0^+}\frac{1+\mathrm{e}t\ln t}{\mathrm{e}t}-\sqrt{2}=+\infty.$$

又 $f(\mathrm{e})=-\sqrt{2}<0$，故由零点定理，$f(x)=0$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 与 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内至少各有一个实根，即 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内至少有两个实根.

34. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，且 $f(0)=f(1)=0$，证明对实数 $a(0<a<1)$，必有 $\xi\in[0,1)$ 使 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

【证】 令 $F(x)=f(x+a)-f(x)$. 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，$f(x+a)$ 应在 $[-a,1-a]$ 上非负连续. 于是 $F(x)$ 在 $[0,1-a]$ 上连续. 且

$$F(0)=f(a)-f(0)=f(a)\geqslant0,$$
$$F(1-a)=f(1)-f(1-a)=-f(1-a)\leqslant0.$$

(1) 若 $F(0)=0$， 则 $\xi=0$ 即为所求；

(2) 若 $F(1-a)=0$， 则 $\xi=1-a$ 即为所求；

(3) 若 $F(0)\neq0$ 且 $F(1-a)\neq0$，则由零点定理，必存在 $\xi\in(0,1-a)\subset(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

综上所述，存在 $\xi\in[0,1)$，使 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

35. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，$\forall x\in[a,b]$，$a<f(x)<b$，且 $f'(x)\neq1$，$x\in(a,b)$. 试证：在 (a,b) 内方程 $f(x)=x$ 有唯一实根.

【证】 存在性. 令 $F(x)=f(x)-x$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又 $F(a)=f(a)-a>0$，$F(b)=f(b)-b<0$，则由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

用反证法证唯一性. 设存在 $\eta\in(a,b)$，$\eta\neq\xi$，使 $F(\eta)=0$，则由罗尔定理可知，在 η 与 ξ 之间存在一点 c，使 $F'(c)=f'(c)-1=0$，即 $f'(c)=1$，这与 $f'(x)\neq1$，$x\in(a,b)$ 矛盾.

36. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微，当 $0\leqslant x<1$ 时，恒有 $0<f(1)<f(x)$，且 $f'(x)\neq f(x)$. 讨论在 $(0,1)$ 内存在唯一的点 ξ，使得 $f(\xi)=\int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t$.

【证】 先证存在性.

令 $g(x)=f(x)-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又

$$g(0)=f(0)>0,g(1)=f(1)-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1[f(1)-f(t)]\,\mathrm{d}t<0.$$

由零点定理知，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t$.

再证唯一性，用反证法.

假设存在 $\xi_1,\xi_2(\xi_1\neq\xi_2)$ 满足 $f(\xi)=\int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t$. 不妨设 $\xi_1<\xi_2$. 显然 $g(\xi_1)=g(\xi_2)=0$，由罗尔定理，存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $g'(\eta)=0$，即 $f'(\eta)-f(\eta)=0$. 这与条件 $f'(x)\neq f(x)$ 矛盾. 即假设不成立. 因此满足 $f(\xi)=\int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t$ 的 ξ 是唯一的.

第二章　一元函数微分学

1. 设$f(x)$在$x=a$的某个邻域内有定义,则$f(x)$在$x=a$处可导的一个充分条件是(　　)

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

【分析】 本题考查导数的定义. 函数$f(x)$在$x=a$处可导的充分必要条件是左、右导数存在且相等,根据此结论选出正确选项.

【解】 应选(D).

对于(A)选项,由于$h\to+\infty$,因此只能保证右导数$f'_+(a)$存在.

又例如$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq a,\\ 0, & x=a,\end{cases}$则$f(x)$在$x=a$处不连续,故也不可导,但显然满足(B)、(C),因此(B)、(C)不正确,只有(D)选项是正确的.

2. 设$f(0)=0$,则$f(x)$在点$x=0$处可导的充要条件为(　　)

(A) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在.

【分析】 本题仍是考查导数的定义. 显然四个选项都是$f(x)$在$x=0$处可导的必要条件,因此只需考虑哪一个选项是充分条件即可.

【解】 应选(B).

由第1题的解析知(D)选项显然不正确,而(A)、(C)选项只能保证右导数$f'_+(0)$存在,因此只有(B)选项正确.

事实上,$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1-e^h}{h}\cdot\dfrac{f(1-e^h)}{1-e^h}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$,所以$f(x)$在$x=0$处可导,综上应选(B).

3. 设函数$f(x)$对任意x均满足等式$f(1+x)=af(x)$,且有$f'(0)=b$,其中a,b为非零常数,则(　　)

(A) $f(x)$在$x=1$处不可导.　　(B) $f(x)$在$x=1$处可导,且$f'(1)=a$.

(C) $f(x)$在$x=1$处可导,且$f'(1)=b$.　　(D) $f(x)$在$x=1$处可导,且$f'(1)=ab$.

【解】 应选(D).

由已知条件,令$x=0$,得$f(1)=af(0)$,从而

$$f'(1)=\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{af(x)-af(0)}{x}=af'(0)=ab,$$

故应选(D).

4. 设函数$f(x)$在$x=0$处可导,且$f(0)=0$,则$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{hf(\sin 2h)-f(\ln(1-h^2))}{h^2}=$(　　)

(A) $-f'(0)$.　　(B) $f'(0)$.　　(C) $2f'(0)$.　　(D) $3f'(0)$.

【分析】 本题考查利用导数求极限的方法. 主要将所求极限通过“凑型”转化为函数在某点导数的定义式求解.

【解】 应选(D).

由于$f(x)$在$x=0$处可导,且$f(0)=0$,从而$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{h\to0}\frac{hf(\sin 2h)-f(\ln(1-h^2))}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f(\sin 2h)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(\ln(1-h^2))}{h^2}.$$