高等学校数学教材

泛函分析

Functional Analysis

黄振友 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

需要全本请访问 www.ertongbook.com

泛函分析

黄振友　编著

常州大学图书馆
藏书章

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书是泛函分析入门教材，以 Hilbert 空间为主线进行讲述. 全书主要分成两个部分，第一部分有三章，其中，第一章讲 Hilbert 空间几何结构、正交投影定理、Riesz 表示定理等，第二章讲 Hilbert 空间上有界线性算子与谱的基础知识，第三章专门深入讲紧算子与两择一定理；第二部分也是三章，包括无界算子（闭算子、对称算子、对称算子的自伴延拓等），以及自伴算子谱分解和酉算子谱分解. 第一部分是简单的基本内容，可以给数学系本科生或理工科研究生讲，三个学分差不多可以讲完；第二部分是 Hilbert 空间中深入的内容，可以给数学系研究生讲，也可根据其他有关课程需要选择内容进行教学.

在本书编写过程中，编者尽可能做到通俗化，注意讲述无穷维空间问题和概念的联系与区别，讲述经典分析方法在这里的作用，以便于读者自学. 本书可以作为数学系本科生和研究生教材，也可作为其他理工科研究生教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析 / 黄振友编著. — 南京 ：东南大学出版社，2019.8

ISBN 978-7-5641-8494-0

Ⅰ.①泛… Ⅱ.①黄… Ⅲ.①泛函分析 Ⅳ.①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 156951 号

泛函分析 Fanhan Fenxi

编　　著	黄振友
出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编：210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(025-83793169，597172750@qq.com)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	虎彩印艺股份有限公司
开　　本	700mm×1000mm 1/16
印　　张	16
字　　数	314 千字
版　　次	2019 年 8 月第 1 版
印　　次	2019 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-8494-0
定　　价	43.80 元

本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系，电话：025-83791830。

序　言

泛函分析是20世纪数学发展的一个重大进展，它的产生与发展来自数学和物理两方面的推动，如位势理论、积分方程、函数论、发散级数等.

19世纪末发展起来的积分方程理论引起了 Hilbert 的强烈兴趣. 1906 年前后，Hilbert 建立了积分方程所需要的无穷维空间结构(包括内积、正交基等). 他利用 Fourier 级数思想，把函数表示为序列，把积分方程看成无穷多方程的线性方程组，从而把线性代数有关理论推广过来. 为了纪念 Hilbert 的贡献，后来人们把完备的内积空间称为 Hilbert 空间，而 Hilbert 关于积分方程的工作也被不断推广.

Dieudonné([2])指出："如果要用几个关键词来概述泛函分析复杂的发展历史，我认为应该是谱理论和对偶性这两个概念，两者都源于求解未知数函数的线性方程(或线性方程组)所遇到的具体问题."谱的概念的发展源于线性问题的适定性，因为无穷维空间中的线性问题的适定性与有限维有很大的不同，所以产生了谱的分类问题，对此，本书有较详细的论述. 而对偶性，其实就是"坐标系"思想. 笛卡儿坐标系的引入是数学史上一个重大事件，它使得几何问题能够代数化. 受此影响，人们将线性方程组放在线性空间框架下进行讨论，线性问题得到很好的解决，这种方案就是将代数问题几何化. Hilbert 进行的有关工作就是将这一思想方法朝着无穷维推广. 线性问题要放到一个无穷维空间去讨论，就会涉及"坐标化"的问题，其源头是 Fourier 级数思想，三角函数系起的作用就相当于无穷维空间的笛卡儿坐标系，它发展成为 Hilbert 空间的规范正交基的概念. 这种思想的进一步推广就得到弱拓扑概念.

1932 年，波兰数学家 Banach 发表第一本泛函分析专著，标志着这一学科本身成为了一门成熟的数学分支，此后它在许多学科，如微分方程、概率论、量子理论、控制论信号处理等得到广泛应用. 同时，诸多学科的发展也推动着泛函分析本身的发展，近百年来，泛函分析已经成为一个庞大的数学分支，并成为现代数学基础. 对于许多数学工作者和以数学作为工具的工程技术人员而言，泛函分析是他们必须掌握的知识.

尤其值得一提的是，量子力学的产生和发展为泛函分析的发展提供了巨大

动力. 1906 年(刚好与 Hilbert 的有关工作同年),为解释黑体试验,Planck 提出了量子论,这标志着现代物理学的开始. 尔后,经若干年的积累——de Broglie 波的提出、Schrödinger 方程的建立、Born 关于波函数的理论等等,一系列划时代的工作爆发出来,在 1926 年量子力学诞生了. 此后两年,von Neumann 利用 Hilbert 空间这个工具为量子力学建立了公理化,从此以后物理发展大大刺激了泛函分析的发展. M. Reed 和 B. Simon 在《现代数学物理方法(Ⅰ)》一书的前言里写道:"自 1926 年以来,物理学的前沿已与日俱增的集中于量子力学,以及奠定于量子理论的分支——原子物理、核物理、固体物理、基本粒子物理等,而这些分支的中心数学框架就是泛函分析."

本书写作目标是作为泛函分析的入门教材,其内容不是泛函分析的完整理论基础,而是以 Hilbert 空间为主线讲述泛函分析,讲 Hilbert 空间的结构及其线性算子. 之所以这么写,是因为它有量子力学这样的背景,而且 Hilbert 空间是有限维空间的直接推广,更易于读者接受;同时,内容集中在一个领域,也便于将内容写得稍微深入一些. 在写作过程中,我也尽可能做到通俗化,注意讲述无穷维空间问题和概念的联系与区别,讲述经典分析方法在这里的作用.

全书主要分成两部分. 第一部分的三章是讲 Hilbert 空间几何理论和有界线性算子以及紧算子,这是基本内容,三个学分差不多可以讲完;第二部分也是三章,包括无界算子、自伴算子谱分解、酉算子谱分解,这是 Hilbert 空间中深入的内容,可以根据需要选择学习内容.

下面再交待一下本书成书过程和材料来源. 最早,我在内蒙古大学读研究生时学习了刘景麟教授给我们讲授的"Hilbert 空间算子谱论"(手稿),后来,我带研究生又多次讲授过这门课. 刘老师也写了一本《泛函分析》教材,但尚未出版,我读过他的手稿,从中深获教益,期待着先生能够出版这些著作,让更多人受益. 本书的部分例题以及有些内容参考了他的材料,例如对称算子的谱、谱族增长与谱的关系、自伴延拓的 Calkin 方法等等. 刘老师是我的恩师,他对我的教诲和对相关学术讨论班的无私帮助,不是一声"谢谢"就可以表达的. 其次,M. Reed 和 B. Simon 所著的《现代数学物理方法》([23],[24])一书对于我写作帮助很大,本书很多内容都取材于那里,例如对称算子与无界算子的一些内容. 除此之外,本书参考较多的书分别是 Helmberg[6],它是前三章的主要参考文献之一;以及 Weidmann[30] 和 Schmüdgen[26],这两本书也是本书无界算子部分的重要参考书,特别是 Schmüdgen 的书,是目前关于无界算子材料最丰富的一本著作;关于谱分解我用的是复分析方法,这部分内容取材于 Akhiezer 和 Glazman[1].

需要全本请访问 www.ertongbook.com

最后，江泽坚教授生前对本人帮助很大，我读过江泽坚教授的手稿《量子力学的数学基础》，从中获益匪浅，本书第 4.6 节的写作参考了那份讲义.

本书完成后，我的学生胡怡腾、徐新建、徐小川、张冉、姬杰、吕康、刘涛、柳代权、官声玉、王振富等帮助配备了一些习题并校正手稿，本人在此说声谢谢；南京理工大学教务处和研究生院多次为本课程的建设和本书出版提供资助，我在此深表感谢；另外，东南大学出版社吉雄飞编辑非常耐心细致而专业的工作使本书增色不少，作者也表示感谢！

我力求写一本容易读的书，但限于本人水平，一定有很多错误和不妥之处，引颈期盼读者和方家赐教！ 我的 E-mail 地址：zyhuangh@njust. edu. cn.

编者

2019 年 6 月于南京

目　录

第一部分　Hilbert 空间几何理论与有界线性算子

1　Hilbert 空间几何学 …… 2

1.1　内积空间与 Hilbert 空间 …… 2

1.2　规范正交基与可分 Hilbert 空间表示 …… 15

1.3　投影问题 …… 21

1.4　L^2 空间中的规范正交基 …… 24

1.5　线性泛函数及其 Riesz 表示、弱收敛 …… 28

习题 1 …… 36

2　有界线性算子 …… 42

2.1　连续线性算子 …… 42

2.2　一致有界原理与几种收敛列的有界性 …… 48

2.3　线性算子谱的概念 …… 51

2.4　有界自伴算子及其特征 …… 60

2.5　酉算子与 Fourier 变换 …… 69

习题 2 …… 74

3　紧算子的谱特征 …… 77

3.1　紧算子的概念及基本性质 …… 78

3.2　紧算子的谱特征——Fredholm 两择一定理 …… 82

3.3　Hilbert-Schmidt 理论——紧自伴算子的特征展开 …… 91

习题 3 …… 101

第二部分　无界线性算子与谱分解

4　无界算子 …… 105

4.1　闭线性算子与可闭算子 …… 105

4.2　共轭算子与闭图定理 …… 113

4.3 对称算子与自伴算子 …… 119
4.4 对称算子的自伴延拓 …… 129
4.5 二次型的表示与 Friedrichs 自伴延拓 …… 142
4.6 自伴算子的扰动与 Schrödinger 算子自伴性 …… 154
习题 4 …… 159
5 自伴算子的谱分解 …… 163
5.1 投影算子 …… 163
5.2 谱族与函数的谱积分 …… 167
5.3 自伴算子的谱族与谱分解 …… 174
5.4 谱族对于自伴算子各类谱点的刻画的应用 …… 185
5.5 紧自伴算子、乘法算子和一阶微分算子的谱分解 …… 192
5.6 紧算子类——Hilbert-Schmidt 算子 …… 195
习题 5 …… 209
6 酉算子的谱族与谱分解 …… 213
6.1 酉算子的谱分解 …… 213
6.2 酉算子的谱与谱族的关系 …… 218
6.3 Cayley 变换 …… 224
习题 6 …… 230

附录

附录 1 三角矩量问题 …… 232
附录 2 半平面上一类解析函数的表示 …… 234
附录 3 Bochner 定理 …… 240
附录 4 函数的正则化 …… 242
参考文献 …… 245

第一部分

Hilbert 空间几何理论
与
有界线性算子

1 Hilbert 空间几何学

在线性代数中，在有限维线性空间这一几何框架之下，线性方程组问题以及二次问题(二次型)解以几何形式得到恰当的表述. 而现代数学问题要求解的是变量(即函数)，我们希望仿着线性代数的办法，把问题放在一个无穷维的线性空间中讨论. 例如，微分方程往往是化为如下形式积分方程来研究的：

$$\lambda\varphi(x)-\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\psi(x),$$

这种形式很像线性方程组的形式. 20 世纪初，瑞典数学家 Fredholm 最早研究这种积分方程，后来意大利数学家 Volterra 进一步研究了更多形式的积分方程；尔后，Hilbert 把函数看成“Fourier 系数”序列，积分核 K 看作无穷矩阵(二重级数的系数)，积分方程放在一个序列空间上看，它就是一个无穷多变量的具有无穷多方程的“线性方程组”，关于方程解的存在性及其形式，就有类似线性代数的一些结果([2],[12]). 但是，无穷维空间与有限维有本质差异，问题远远比有限维复杂. 例如，有限维空间中的线性运算都是有限运算，不必考虑收敛问题，而无穷维涉及无穷运算，须考虑收敛问题. 为了考虑收敛性，就得引入向量的长度、两点距离等概念. 在有限维空间中，我们通过内积来刻画向量长度和向量之间的角度等. 本章，我们把内积的概念引入到一般的线性空间中来，并将欧式空间的一些几何性质也推广到无穷维空间中.

1.1 内积空间与 Hilbert 空间

这一节，我们讲内积的基本概念、内积的几何意义、平行四边形法则等，并给出一些重要的内积空间的例子. 在引入内积之前，我们先给出范数(向量长)的概念.

1) 赋范线性空间的概念

定义 1.1.1 设 X 为一个线性空间，若 X 上有一个非负实函数 $\|\cdot\|: X\to\mathbf{R}$ 满足：

(1) 非负性，即

$$\|\varphi\|\geqslant 0(\forall\varphi\in X)\text{且}\|\varphi\|=0\Leftrightarrow\varphi=0;$$

(2) 正齐性，即

$$\|\alpha\varphi\| = |\alpha| \|\varphi\|, \quad \forall \alpha \in \mathbf{C}, \forall \varphi \in X;$$

(3)三角不等式,即

$$\|\varphi+\psi\| \leqslant \|\varphi\| + \|\psi\|, \quad \forall \varphi, \psi \in X,$$

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的范数,$(X, \|\cdot\|)$称为赋范线性空间.

设$\{\varphi_n\} \subset (X, \|\cdot\|)$,若

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_0\| = 0,$$

则称 φ_n收敛于 φ_0,记为

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0,$$

或者 $\varphi_n \to \varphi_0, n \to \infty$.

注 收敛点列必有界.

定义 1.1.2 设$(X, \|\cdot\|)$为一个赋范线性空间,若点列$\{\varphi_n\} \subset (X, \|\cdot\|)$,并满足:

$$\|\varphi_n - \varphi_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty,$$

则称它是一个 Cauchy 列. 如果 X 中每个 Cauchy 列$\{\varphi_n\}$ 都在 X 中收敛,即存在 $\varphi_0 \in X$,使得 $\varphi_n \to \varphi_0$,则称 X 完备,或称 X 为 Banach 空间.

完备性是空间中许多问题解的存在性的基本保证. 有关 Banach 空间的重要结果本章不展开讨论,而留待以后另著讲述.

定义 1.1.3 设 $M \subset (X, \|\cdot\|)$,如果存在$\{\varphi_n\} \subset M$ 使得 $\varphi_n \to \varphi$,则 $\varphi \in X$ 称为 M 的极限点. M 的全体极限点集记为 M',集合 $\overline{M} = M \cup M'$ 称为 M 的闭包. 如果 $\overline{M} = X$,则称 M 在 X 中稠. 进一步,若 M 又是可数的,则称 X 可分.

对于一个可分空间,定义在其上连续函数可由该函数在空间的可数稠子集上的取值而决定,这时,从逻辑上来说,空间上每个连续函数都由一个序列完全决定,即连续函数可以借助可分性而得以序列化.

2) 内积空间的概念

定义 1.1.4 设 H 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,若二元函数$(\cdot, \cdot): H \times H \to \mathbf{K}$ 满足:

(1) 非负性,即

$$(\varphi, \varphi) \geqslant 0, \text{且} (\varphi, \varphi) = 0 \text{ 当且仅当 } \varphi = 0;$$

(2) 关于第一变元线性,即

$$(\alpha\varphi + \beta\psi, \zeta) = \alpha(\varphi, \zeta) + \beta(\psi, \zeta), \quad \forall \varphi, \psi, \zeta \in H, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K};$$

(3) $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}, \forall \varphi, \psi \in H,$

则称(φ, ψ)是 φ 与 ψ 的内积,定义了内积的线性空间 H 称为内积空间.

注 (1) 由内积空间的定义可以推出内积关于第二变元共轭线性,即

需要全本请访问 www.ertongbook.com

$$(\varphi,\alpha\psi+\beta\zeta)=\bar{\alpha}(\varphi,\psi)+\bar{\beta}(\varphi,\zeta);$$

(2) 当 **K** 取实数域时，H 称为实内积空间，此时

$$(\varphi,\psi)=(\psi,\varphi),\quad (\varphi,\alpha\psi+\beta\zeta)=\alpha(\varphi,\psi)+\beta(\varphi,\zeta);$$

(3) 当 **K** 是复数域时，称 H 是复内积空间(以后除非特别说明，我们讨论的都是复空间).

下面我们将证明内积空间必为赋范线性空间.

引理 1.1.1(Cauchy-Schwarz 不等式) 设 H 是内积空间，对任意的 $\varphi,\psi\in H$，有

$$|(\varphi,\psi)|\leqslant\sqrt{(\varphi,\varphi)(\psi,\psi)},$$

且等号成立当且仅当 φ 与 ψ 线性相关.

证明 对任意的 $\varphi,\psi\in H$，当 $\psi=0$ 时，不等式自然是成立的；当 $\psi\neq0$ 时，$\forall\lambda\in\mathbf{C}$，由非负性，

$$0\leqslant(\varphi+\lambda\psi,\varphi+\lambda\psi)=(\varphi,\varphi)+\lambda(\psi,\varphi)+\bar{\lambda}(\varphi,\psi)+|\lambda|^2(\psi,\psi),$$

特别，在上式中取

$$\lambda=-\frac{(\varphi,\psi)}{(\psi,\psi)},$$

则有

$$(\varphi,\varphi)-\frac{|(\varphi,\psi)|^2}{(\psi,\psi)}\geqslant0,$$

所以

$$|(\varphi,\psi)|^2\leqslant(\varphi,\varphi)(\psi,\psi).$$

等号部分的证明：

若 $\varphi=\lambda\psi$，等号显然成立.

反之，若等号成立，由上述证明，取 $\lambda=-\frac{(\varphi,\psi)}{(\psi,\psi)}$ 时，直接验证可得

$$(\varphi+\lambda\psi,\varphi+\lambda\psi)=0,$$

即 $\varphi=-\lambda\psi$. □

定理 1.1.1 内积空间 $(H,(\cdot,\cdot))$ 必为赋范线性空间.

证明 对任意的 $\varphi\in H$，令

$$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)}.$$

(1) 非负性：$\|\varphi\|\geqslant0$，且 $\|\varphi\|=0$ 的充分必要条件是 $\varphi=0$；

(2) 对任意的 $\alpha\in\mathbf{C},\varphi\in H$，

$$\|\alpha\varphi\|^2=(\alpha\varphi,\alpha\varphi)=|\alpha|^2(\varphi,\varphi),$$

所以 $\|\alpha\varphi\|=|\alpha|\|\varphi\|$；

(3) $\forall\varphi,\psi\in H$，

$$\begin{aligned}\|\varphi+\psi\|^2&=(\varphi+\psi,\varphi+\psi)=(\varphi,\varphi)+(\varphi,\psi)+(\psi,\varphi)+(\psi,\psi)\\&\leqslant\|\varphi\|^2+2\|\varphi\|\|\psi\|+\|\psi\|^2=(\|\varphi\|+\|\psi\|)^2,\end{aligned}$$

所以

$$\|\varphi+\psi\|\leqslant\|\varphi\|+\|\psi\|.$$

于是,$(H,\|\cdot\|)$为赋范线性空间. □

在内积空间中,两个向量的内积反映了它们之间的"角度",而向量与自身的内积反映该向量的"长度".

推论 1.1.1 设 H 是内积空间,$\varphi_n\to\varphi_0$,$\psi_n\to\psi_0$($n\to\infty$),则

(1) $\|\varphi_n\|\to\|\varphi_0\|$($n\to\infty$);

(2) $\{\varphi_n\}$,$\{\psi_n\}$ 都是有界的,即收敛列有界;

(3) $(\varphi_n,\psi_n)\to(\varphi_0,\psi_0)$($n\to\infty$);

(4) $\varphi_n+\psi_n\to\varphi_0+\psi_0$($n\to\infty$);

(5) 当 $\alpha_n,\alpha\in\mathbf{C}$ 且 $\alpha_n\to\alpha$ 时,

$$\alpha_n\varphi_n\to\alpha\varphi_0,\quad n\to\infty.$$

证明 (1)由定理 1.1.1 可知

$$|\|\varphi_n\|-\|\varphi_0\||\leqslant\|\varphi_n-\varphi_0\|,$$

而当 $n\to\infty$时,$\varphi_n\to\varphi_0$,所以

$$|\|\varphi_n\|-\|\varphi_0\||\to0,\quad n\to\infty.$$

(2) 直接由(1)可以得到.

(3) 因为

$$\begin{aligned}|(\varphi_n,\psi_n)-(\varphi_0,\psi_0)|&\leqslant|(\varphi_n,\psi_n-\psi_0)|+|(\varphi_n-\varphi_0,\psi_0)|\\&\leqslant\|\varphi_n\|\|\psi_n-\psi_0\|+\|\varphi_n-\varphi_0\|\|\psi_0\|,\end{aligned}$$

又因为 $\|\varphi_n\|$ 有界,所以

$$(\varphi_n,\psi_n)\to(\varphi_0,\psi_0),\quad n\to\infty.$$

$$\begin{aligned}(4)\ \|(\varphi_n+\psi_n)-(\varphi_0+\psi_0)\|&\leqslant\|\varphi_n-\varphi_0\|+\|\psi_n-\psi_0\|\\&\to0,\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

(5) 因为

$$\|\alpha_n\varphi_n-\alpha\varphi_0\|\leqslant|\alpha_n|\|\varphi_n-\varphi_0\|+|\alpha_n-\alpha|\|\varphi_0\|,$$

而 $\alpha_n\to\alpha$,因此$\{\alpha_n\}$ 有界,于是

$$\|\alpha_n\varphi_n-\alpha\varphi_0\|\to0,\quad n\to\infty.$$ □

推论 1.1.1 表明:范数运算、内积运算、加法运算和数乘运算保持连续性.

定义 1.1.5 设 H 是内积空间,若 H 按内积导出的范数是完备的(常常也简称按内积完备),则称 H 是 Hilbert 空间.

Hilbert 空间必为 Banach 空间. 最早,Hilbert 在研究积分方程时,考虑函数是按某个规范正交基展开的系数序列,而这些系数序列所构成的空间就是 l^2,也即

Hilbert 空间的最早形式. 为了纪念 Hilbert 这一重要思想，人们将完备内积空间称为 Hilbert 空间.

3）内积空间的初等几何性质

我们回到有限维空间中来看看内积刻画的是怎样的几何概念. 在 $\mathbf{R}^n$ 中，对任意的 $\varphi=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\psi=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，定义内积

$$(\varphi,\psi)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$$

则 $\mathbf{R}^n$ 成为内积空间，称此内积空间为 n 维欧氏空间，此空间上的范数就是通常的欧氏范数. 为了直观起见，我们来看平面情形，即 $n=2$，设两个向量 $\varphi=(x_1,x_2)$，$\psi=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2$ 之间的夹角为 θ，则利用平面解析几何知识知道

$$(\varphi,\psi)=x_1y_1+x_2y_2=\|\varphi\|\|\psi\|\cos\theta,$$

所以 $\cos\theta=\dfrac{(\varphi,\psi)}{\|\varphi\|\|\psi\|}$. 也就是说，内积不仅可以刻画一个向量的长度（范数），而且可以刻画两个向量之间的夹角. 换句话说，一个向量与其自身作内积得到它的长度平方，而两个向量之间的内积描述它们之间夹角的余弦.

下面我们将看到有限维空间的欧氏几何的更多概念和性质都可推广到一般的内积空间中来.

定义 1.1.6 设 H 是一个内积空间，若 $(\varphi,\psi)=0$，称 H 中两个向量 φ,ψ 相互正交，记为 $\varphi\perp\psi$.

平面上那条致命的“勾股定理”在一般的内积空间中也成立：

定理 1.1.2 设 H 是一个内积空间，$\varphi,\psi\in H$ 且 $\varphi\perp\psi$，则

$$\|\varphi+\psi\|^2=\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2.$$

证明 $\|\varphi+\psi\|^2=(\varphi+\psi,\varphi+\psi)=\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2.$ □

平面上平行四边形公式法则在内积空间也对：

定理 1.1.3 设 H 是一个内积空间，则对任意的 $\varphi,\psi\in H$，有

$$\|\varphi+\psi\|^2+\|\varphi-\psi\|^2=2(\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2).$$

证明 对任意的 $\varphi,\psi\in H$，有

$$\begin{aligned}\|\varphi+\psi\|^2+\|\varphi-\psi\|^2&=(\varphi+\psi,\varphi+\psi)+(\varphi-\psi,\varphi-\psi)\\&=2(\varphi,\varphi)+2(\psi,\psi)\\&=2(\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2).\end{aligned}$$ □

注 称定理 1.1.3 中所述公式为平行四边形公式，它表示以 φ,ψ 为边的平行四边形对角线长度平方和等于四条边平方和. 特别，如果 $\varphi\perp\psi$，平行四边形就是矩形，公式则变为勾股定理的形式.

定理 1.1.4(极化恒等式) 若 H 为一个实内积空间,则

$$(\varphi,\psi)=\frac{1}{4}(\|\varphi+\psi\|^2-\|\varphi-\psi\|^2),\quad \forall\varphi,\psi\in H;$$

若 H 为一个复内积空间,则

$$\begin{aligned}(\varphi,\psi)&=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}\mathrm{i}^n\|\varphi+\mathrm{i}^n\psi\|^2\\&=\frac{1}{4}[(\|\varphi+\psi\|^2-\|\varphi-\psi\|^2)\\&\quad+\mathrm{i}(\|\varphi+\mathrm{i}\psi\|^2-\|\varphi-\mathrm{i}\psi\|^2)],\quad\forall\varphi,\psi\in H.\end{aligned}$$

证明 由内积的性质可直接得到. □

由定理 1.1.1 知内积可导出范数,而由定理 1.1.4,如果空间上范数是内积导出的,那么我们也可用这个范数来表达相应的内积. 但是,空间上随便给一个范数不一定都可以定义内积. 范数只有满足平行四边形公式时才可导出内积.

定理 1.1.5 设$(X,\|\cdot\|)$为一个赋范线性空间,则 X 上存在内积$(\cdot,\cdot)$使得

$$\|\varphi\|=(\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}},\quad\forall\varphi\in X$$

的充分且必要条件是 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形法则.

证明 (⇒)定理 1.1.3 已给出证明.

(⇐)我们不妨设 X 是复线性空间,如果 X 上范数 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形法则,我们设法用极化恒等式来定义内积,即对任意的 $\varphi,\psi\in X$,定义

$$(\varphi,\psi)=\frac{1}{4}[(\|\varphi+\psi\|^2-\|\varphi-\psi\|^2)+\mathrm{i}(\|\varphi+\mathrm{i}\psi\|^2-\|\varphi-\mathrm{i}\psi\|^2)],\quad(\mathrm{I})$$

下面证明它确实是 X 上内积,即证明我们这样定义的 X 上二元函数$(\cdot,\cdot)$满足内积定义的全部条件.

(1) 非负性,即$(\varphi,\varphi)\geqslant 0$,$\forall\varphi$,且$(\varphi,\varphi)=0$ 的充要条件是 $\varphi=0$.

由(Ⅰ)式的定义可直接验证.

(2)$(\cdot,\cdot)$关于第一变元线性.

首先,因为范数满足平行四边形法则,所以,对任意的 $\varphi_1,\varphi_2,\psi\in X$,

$$\begin{aligned}&(\varphi_1,\psi)+(\varphi_2,\psi)\\&=\frac{1}{4}[(\|\varphi_1+\psi\|^2-\|\varphi_1-\psi\|^2)+\mathrm{i}(\|\varphi_1+\mathrm{i}\psi\|^2-\|\varphi_1-\mathrm{i}\psi\|^2)]+\\&\quad\frac{1}{4}[(\|\varphi_2+\psi\|^2-\|\varphi_2-\psi\|^2)+\mathrm{i}(\|\varphi_2+\mathrm{i}\psi\|^2-\|\varphi_2-\mathrm{i}\psi\|^2)]\\&=\frac{1}{4}[(\|\varphi_1+\psi\|^2+\|\varphi_2+\psi\|^2)-(\|\varphi_1-\psi\|^2+\|\varphi_2-\psi\|^2)]+\\&\quad\frac{1}{4}\mathrm{i}[(\|\varphi_1+\mathrm{i}\psi\|^2+\|\varphi_2+\mathrm{i}\psi\|^2)-(\|\varphi_1-\mathrm{i}\psi\|^2+\|\varphi_2-\mathrm{i}\psi\|^2)]\\&\equiv\frac{1}{8}(2A_1-2A_2)+\frac{1}{8}\mathrm{i}(2A_3-2A_4),\end{aligned}$$

下面我们从几何上来看上述和式的各项都是些什么.

以 $2A_1$ 为例:如果以向量 $\varphi_1+\psi$ 和 $\varphi_2+\psi$ 为边作平行四边形,则 $2A_1$ 就是这个平行四边形的四边平方和,利用平行四边形法则,它应该为两对角线平方和,即

$$2A_1=\|\varphi_1+\varphi_2+2\psi\|^2+\|\varphi_1-\varphi_2\|^2,$$

同样道理,

$$2A_2=\|\varphi_1+\varphi_2-2\psi\|^2+\|\varphi_1-\varphi_2\|^2,$$

其他两项类似,于是

$$\begin{aligned}(\varphi_1,\psi)+(\varphi_2,\psi)=&\frac{1}{8}(\|\varphi_1+\varphi_2+2\psi\|^2-\|\varphi_1+\varphi_2-2\psi\|^2)\\&+\frac{1}{8}\mathrm{i}(\|\varphi_1+\varphi_2+2\mathrm{i}\psi\|^2-\|\varphi_1+\varphi_2-2\mathrm{i}\psi\|^2)\\=&\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+\psi\right\|^2-\left\|\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}-\psi\right\|^2\right)\\&+\frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\left\|\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+\mathrm{i}\psi\right\|^2-\left\|\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}-\mathrm{i}\psi\right\|^2\right)\\=&2\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2},\psi\right).\end{aligned}\tag{Ⅱ}$$

由(Ⅰ)式,当 $\varphi=0$ 时,我们有

$$(0,\psi)=0,$$

若 $\varphi_2=0$,则(Ⅱ)式变为

$$(\varphi_1,\psi)=2\left(\frac{\varphi_1}{2},\psi\right),$$

再令 $\varphi=\frac{\varphi_1}{2}$,上式变为

$$(2\varphi,\psi)=2(\varphi,\psi).\tag{Ⅲ}$$

由 $\varphi_1,\psi\in X$ 的任意性,(Ⅲ)式对任意的 $\varphi,\psi\in X$ 都成立.既然如此,那么在(Ⅲ)式中,如果 $\varphi=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$,我们又有

$$(\varphi_1+\varphi_2,\psi)=2\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2},\psi\right),$$

与(Ⅱ)式相比较,我们得到

$$(\varphi_1+\varphi_2,\psi)=(\varphi_1,\psi)+(\varphi_2,\psi).\tag{Ⅳ}$$

以下我们利用(Ⅳ)式来证明(Ⅰ)式所定义的二元函数关于第一变元具有线性性质. $\forall\varphi,\psi\in X$,定义函数

$$f(\alpha)=(\alpha\varphi,\psi),\quad\forall\alpha\in\mathbf{R},$$

则由范数关于变元的连续性, f 是连续函数.如果能证明 f 为线性函数,即 $f(\alpha)=\alpha f(1)$,则所述二元函数对第一变元关于实数具有线性.

事实上，$f(0)=0$ 已由上述证明得到，从而，由(Ⅳ)式可得

$$(-\varphi,\psi)=-(\varphi,\psi),\quad \forall\varphi,\psi\in X,$$

即

$$f(-1)=-f(1).$$

如果将其中 φ 换成 $\alpha\varphi$，等式也成立，即

$$f(-\alpha)=-f(\alpha).$$

再由(Ⅳ)式可得 $f(2)=2f(1)$，于是利用归纳法易知

$$f(m)=mf(1),\quad \forall m\in\mathbf{N},$$

即

$$(m\varphi,\psi)=m(\varphi,\psi),$$

此式对于一切的 $\varphi,\psi\in X$ 都成立，那么如果把 φ 换成 $\frac{1}{m}\varphi$，它也应该成立，即

$$(\varphi,\psi)=\left(m\frac{1}{m}\varphi,\psi\right)=m\left(\frac{1}{m}\varphi,\psi\right),$$

所以

$$m\left(\frac{1}{m}\varphi,\psi\right)=(\varphi,\psi),$$

即

$$\left(\frac{1}{m}\varphi,\psi\right)=\frac{1}{m}(\varphi,\psi),$$

也就是说

$$f\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m}f(1),$$

从而，对于正的有理数 $\alpha=\frac{n}{m}$，

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}f(1),$$

利用有理数的稠性及 f 的连续性，可得 $f(\alpha)=\alpha f(1)$. 据此，我们证明了

$$(\alpha\varphi,\psi)=\alpha(\varphi,\psi),\quad \forall\alpha\in\mathbf{R},\forall\varphi,\psi\in X.$$

再来看复数情形.

由(Ⅰ)式，$\forall\varphi,\psi\in X$，

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\varphi,\psi)&=\frac{1}{4}[(\|\mathrm{i}\varphi+\psi\|^2-\|\mathrm{i}\varphi-\psi\|^2)+\mathrm{i}(\|\mathrm{i}\varphi+\mathrm{i}\psi\|^2-\|\mathrm{i}\varphi-\mathrm{i}\psi\|^2)]\\&=\frac{1}{4}[(\|\varphi-\mathrm{i}\psi\|^2-\|\varphi+\mathrm{i}\psi\|^2)+\mathrm{i}(\|\varphi+\psi\|^2-\|\varphi-\psi\|^2)]\\&=\mathrm{i}(\varphi,\psi),\end{aligned}$$

于是，对于 $\alpha=\sigma+\mathrm{i}\tau\in\mathbf{C}$，

需要全本请访问 www.ertongbook.com