大学数学信息化教学丛书

高等数学学习指导

（上册）

第二版

杨雯靖　朱永刚　主编

科学出版社

大学数学信息化教学丛书

高等数学学习指导

(上册)(第二版)

杨雯靖　朱永刚　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书在2013年第一版的基础上，集撷作者多年教学心得和教研成果，根据读者反馈进行修订.

本书分为上、下两册.第二版保留第一版的基本结构，包括知识框架、教学基本要求、主要内容解读、典型例题解析、习题选解及自测题六个部分.其中，教学基本要求与新修订的教学大纲要求相适应，典型例题解析注重解题思路、方法及总结，习题选解按照高等数学的章节顺序编排，有层次地选择部分习题，注重一题多解.每章后附自测题及参考答案，供读者检测.

本书对教材具有相对的独立性，适合普通高等院校理工科各专业学生使用，也可供考研人员参考阅读.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导. 上册 / 杨雯靖，朱永刚主编. —2版. —北京：科学出版社，2019.8
（大学数学信息化教学丛书）
ISBN 978-7-03-062021-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①杨… ②朱… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第161792号

责任编辑：谭耀文 张 湾 / 责任校对：高 嵘
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉市首壹印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
开本：787×1092 1/16
2019年8月第 二 版 印张：16 1/4
2019年8月第一次印刷 字数：378 000
定价：**49.00元**
（如有印装质量问题，我社负责调换）

《高等数学学习指导（上册）》（第二版）

编　委　会

主　编　杨雯靖　朱永刚

副主编　周意元　杨元启

编　委　（按姓氏笔画排序）

朱永刚　杨元启　杨雯靖

陈将宏　周意元　赵守江

崔　盛

第二版前言

本书是在保持第一版优点及特色的基础上，结合高等数学教学改革实践，以利于激发学生自主学习为理念，根据读者反馈进行修订的学习指导教材，主要面向学习高等数学的理工科学生，以及准备研究生入学考试的人员，也可供讲授高等数学的教师参考.

本次修订保留第一版的基本结构，包括知识框架、教学基本要求、主要内容解读、典型例题解析、习题选解及自测题六个部分，其内容按章编写.

教学基本要求与新修订的教学大纲要求相适应，突出各章节需要掌握的核心内容.

主要内容解读部分在修订时更注重语言的精练性与可读性.其中，对极限定义的描述不再使用"非 ε 语言"，而采用经典的" $\varepsilon-N$ "(或" $\varepsilon-\delta$ ")极限理论.

典型例题解析注重解题思路、方法及总结，既强调基础，又通过对教学内容的扩展和延伸满足学生深层次的要求.

与配套教材习题相适应，对本书的习题选解进行调整，习题选解的总量也适当增加，但不影响本书作为独立书籍的阅读及使用.

自测题部分涵盖每章的相关内容，修订时更多地考虑题目多样性和层次性的特点，便于读者自测，并提供自测题的参考答案.

本书由杨雯靖和朱永刚主编，周意元和杨元启担任副主编.参加第二版编写工作的有杨雯靖、朱永刚、周意元、陈将宏、杨元启、赵守江、崔盛.全书由朱永刚负责统稿，杨雯靖负责审阅.

本书自 2013 年出版以来，许多读者纷纷表示关切和鼓励，并对书中存在的不妥之处予以指正，在此向他们表示感谢. 三峡大学理学院、教务处和教材供应中心对本书的编写与出版给予了大力支持，对此我们也表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，第二版中存在的问题，敬请广大读者给予批评指正.

编　者

2019 年 4 月

第一版前言

本书是与张明望、沈忠环、杨雯靖主编的普通高等教育“十二五”规划教材《高等数学》配套使用的学习指导书，主要面向使用该教材的教师和学生，同时，可为学习高等数学的学生提供同步指导，也可作为研究生入学考试的复习指导.我们编写这本配套教材，既满足学生学习高等数学课程的需要，又通过对教学内容的扩展和延伸满足学生的深层次的要求.

上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程；下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数.本书的内容按章编写，与教材同步. 每章包括教学基本要求、内容概述、典型例题解析、习题选解及自测题五个部分.

教学基本要求部分是根据教育部数学基础课程教学指导委员会制定的理工类本科高等数学课程的教学基本要求确定的，也是根据教学大纲的要求制定的.

内容概述部分有条理地将每一章的基本理论与基本方法逐一梳理，使读者详细地了解每章的主要内容.

典型例题解析部分精选相关内容的基本题型，力图将高等数学的基本概念、定理、方法及应用融于其中，具有鲜明的特点. 例题的选择兼顾基本性与扩展性特点，考虑到理论与实际的结合. 例题中注重分析解题思路，寻求多种解题方法，并在例题后加以评注，进行总结及推广说明.

习题选解部分按照教材中的章节顺序，精选一部分习题作出了解答. 其中，每章的总习题在难度上略重一些，所以在习题选解中所占的比例相对较大.

作者在每章后附带了两套自测题，便于读者在每章结束后自我检测. 自测题既涵盖了每章的相关内容，又考虑了题目的多样性和层次性的特点，可用作读者自测.

本书由杨雯靖和朱永刚主编. 参加编写的主要人员还有杨元启和陈将宏，另外，崔盛等也参与了一部分后期的编写工作. 全书由朱永刚负责统稿，杨雯靖负责审阅.

三峡大学理学院、教务处和教材供应中心对本书的编写和出版给予大力支持，对此我们表示衷心的感谢.

由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请广大读者批评指正.

作　者

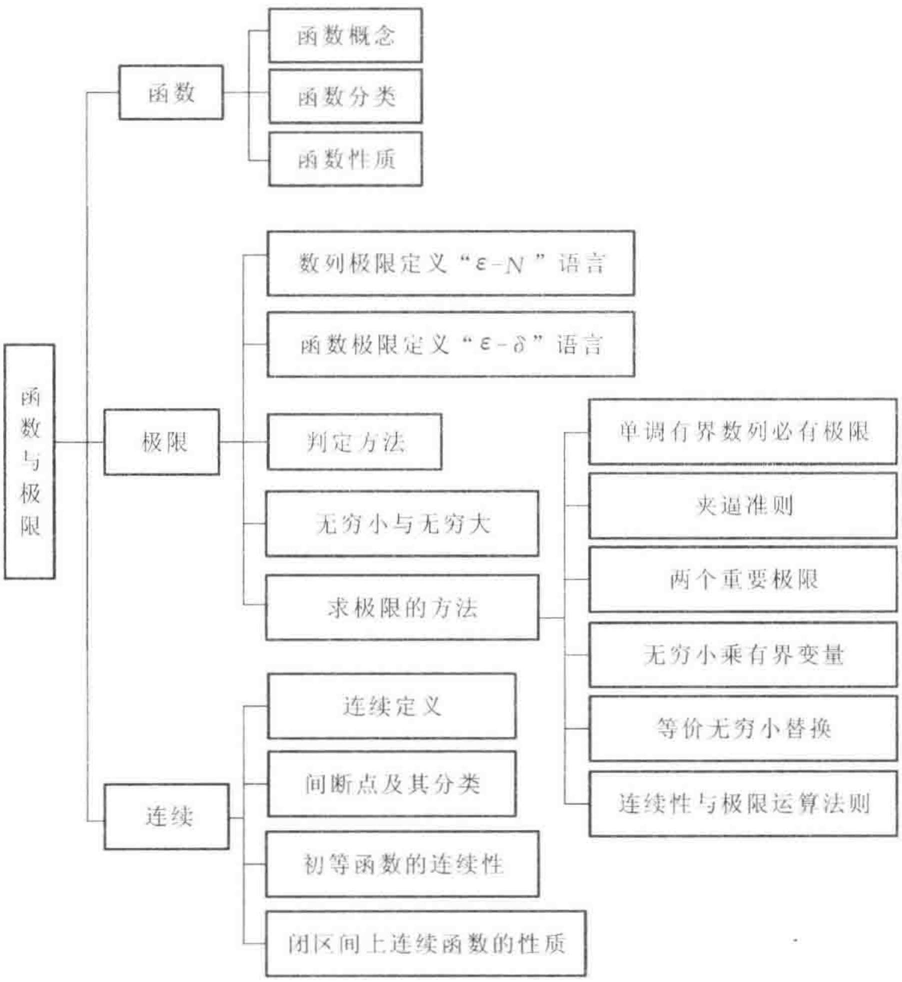
2013 年 5 月

目　　录

第一章　函数与极限

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象．极限概念是高等数学的理论基础，极限方法是高等数学的基本分析方法．因此，掌握、运用好极限方法是学好高等数学的关键．连续是函数的一个重要性态．如何在无限变化的过程中研究变量的变化趋势，这是本章需掌握的基本思想．

一、知识框架



二、教学基本要求

(1) 理解函数的概念, 掌握函数的表示法, 会建立简单应用问题中的函数关系式.

(2) 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性; 理解复合函数及分段函数的概念, 了解反函数及隐函数的概念; 掌握基本初等函数的性质及其图形, 了解初等函数的概念.

(3) 理解数列极限的概念与性质, 熟悉“$\varepsilon-N$”语言; 理解函数极限的概念与性质, 熟悉“$\varepsilon-\delta$”语言.

(4) 了解无穷小与无穷大的定义, 理解函数的极限与无穷小的关系.

(5) 掌握极限的四则运算法则及复合函数的极限运算法则.

(6) 掌握极限存在的两个准则, 并会利用它们求极限, 掌握利用两个重要极限求相关极限的方法.

(7) 掌握无穷小的比较方法, 灵活掌握利用等价无穷小代换计算极限.

(8) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续), 会判别函数间断点的类型.

(9) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性, 了解闭区间上连续函数的性质(有界性定理、最大值和最小值定理、介值定理、零点定理), 并会应用这些性质.

三、主要内容解读

(一) 函数

1. 函数的概念及表示法

设非空集合 $D\subseteq\mathbf{R}$, 若有一个对应法则 f, 使对于 D 内每一个实数 x, 都能由 f 唯一地确定一个实数 y, 则称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数, 记为

$$y=f(x)\quad(x\in D),$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量. 数集 D 称为函数的定义域, 记为 $D(f)$. 全体函数值的集合称为函数的值域, 记为 $R(f)$, 即

$$R(f)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}.$$

决定函数关系的两个要素: 定义域与对应法则. 如果一个函数是用一个数学式子给出的, 则其定义域约定为使这个式子有意义的自变量所取值的全体, 即为函数的自然定义域; 如果函数有实际背景, 还需要考虑变量的实际意义. 两个函数相同是指它们有相同的定义域和对应法则.

函数的表示法有解析法、列表法和图示法.

分段函数: 在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数. 几个特殊的分段函数为绝对值函数、符号函数、取整函数和狄利克雷函数.

注意分段函数的复合, 分段函数在分段点的极限、连续性.

2. 函数的主要性质

1) 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$, $D\subseteq D(f)$, 若存在常数 M, 对一切 $x\in D$, 总有 $f(x)\leqslant M$ (或 $f(x)\geqslant M$), 则称 $f(x)$ 在 D 上有上界(或下界), 称数 M 为它的上界(或下界). 若函数 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界, 则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数, 否则, 称 $f(x)$ 是 D 上的无界函数. 因此, 若 $f(x)$ 是 D 上的有界函数, 则存在正数 M, 使对一切 $x\in D$, 恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立.

几个常见的有界函数:

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上, $|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$, $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\operatorname{arccot} x<\pi$; 在区间 $[-1, 1]$ 上, $|\arcsin x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$.

注 (1) 函数 $f(x)$ 有界或无界是相对于某个区间而言的, 如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界, 而在区间 $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 内有界.

(2) 有界函数图像的特点是它完全落在平行于 x 轴的两条直线 $y=\pm M$ 之间.

(3) 无界函数与无穷大量的区别: 在自变量的某一变化过程中, 若 $f(x)$ 为无穷大量, 则存在对应的区间使 $f(x)$ 无界; 但若 $f(x)$ 在某一区间上无界, $f(x)$ 不一定为无穷大量. 例如, $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界, 但这个函数当 $x\to 0^+$ 时不是无穷大量.

(4) 函数有界性的判别方法.

直接法: 利用定义判别.

间接法: ① 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. ② 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

2) 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$, $D\subseteq D(f)$, 如果对任意 $x_1,x_2\in D$, 且 $x_1<x_2$, 都有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是单调增加(或单调减少)的, 或者称 $f(x)$ 是 D 上的单调递增(或单调递减)函数, 单调递增和单调递减函数统称为单调函数.

注 函数 $f(x)$ 是否单调也是相对于某个区间而言的, 如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少, 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加, 而在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

3) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 是关于原点对称的数集, 即若 $x\in D(f)$, 则 $-x\in D(f)$. 如果对于任一 $x\in D(f)$, 有 $f(-x)=f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 是偶函数; 如果对于任一

$x\in D(f)$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是奇函数.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

奇偶函数的运算性质:

(1) 奇函数与奇函数的和仍为奇函数，偶函数与偶函数的和仍为偶函数.

(2) 两个奇(或偶)函数之积为偶函数，奇函数与偶函数之积为奇函数.

判定函数的奇偶性，主要是根据奇偶性的定义，有时也用其运算性质.

4) 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，如果存在正数 T，使对任意 $x\in D(f)$，$x+T\in D(f)$，有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的周期.由定义知道，若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 nT 也为其周期．通常，我们说 T 为 $f(x)$ 的周期，是指 T 为 $f(x)$ 的最小正周期.

周期函数在每个周期上的图形相同.

周期函数的运算性质:

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

(2) 若 $f(x)$，$g(x)$ 均是以 T 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

判别函数的周期性，主要是根据周期函数的定义，或利用常见周期函数的周期性，有时也用其运算性质.

3．反函数与复合函数

1) 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$，若对每一个 $y\in R(f)$，$D(f)$ 中有唯一的 x 使 $f(x)=y$，于是在 $R(f)$ 上确定了一个函数，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in R(f)$.

注 若 $y=f(x)$ 有反函数，则按 f 建立了 $D(f)$ 与 $R(f)$ 之间的一一对应关系.

由定义可知，$f(x)$ 也是函数 $f^{-1}(y)$ 的反函数，或者说它们互为反函数，而且前者的定义域与后者的值域相同，前者的值域与后者的定义域相同.

由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，$x=f^{-1}(y)$ 又常记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in R(f)$.

在同一坐标系中，$y=f(x)$ 的图像与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

2) 复合函数

设 $y=f(u)$，$u\in D(f)$ 和 $u=\varphi(x)$，$x\in D(\varphi)$ 是两个已知函数，且 $D(f)\cap R(\varphi)\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$，$x\in\{x|\varphi(x)\in D(f)\}$ 为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，其中 $f(u)$ 称为外层函数，$\varphi(x)$ 称为内层函数，y 称为因变量，x 称为自变量，而 u 称为中间变量.

复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $\{x|\varphi(x)\in D(f)\}$．当 $D(f)\cap R(\varphi)\neq\varnothing$ 时，两个函数才能进行复合．函数也可以由三个或者三个以上函数复合而成.

4. 基本初等函数与初等函数

1) 基本初等函数

幂函数: $y=x^{\alpha}$ (α 为常数).

指数函数: $y=a^{x}$ ($a>0,a\neq1$).

对数函数: $y=\log_{a}x$ ($a>0,a\neq1$).

三角函数: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$.

反三角函数: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$.

2) 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除四则运算或有限次的函数复合运算所构成并且能用一个数学式子表示的函数, 称为初等函数.

(二) 极限

1. 数列极限的定义("$\varepsilon-N$"语言)

设$\{a_n\}$是一个数列, a是一个常数, 如果对于任意给定的正数ε(无论它多么小), 总存在正整数N, 使当$n>N$时, 不等式$|a_n-a|<\varepsilon$都成立, 那么就称数列$\{a_n\}$收敛于a, 这个常数a称为数列$\{a_n\}$的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\ (\text{或}\ a_n\to a\ (n\to\infty)).$$

如果数列$\{a_n\}$的极限不存在, 则称数列$\{a_n\}$是发散的.

2. 函数极限的定义("$\varepsilon-\delta$"语言)(以$x\to x_0$时函数极限为例)

设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义, A是一个常数, 如果对于任意给定的正数ε(无论它多么小), 总存在正数δ, 使当x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$时, 不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$都成立, 那么就称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限, 记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\ (\text{或}\ f(x)\to A\ (x\to x_0)).$$

注 (1) 当$x\to x_0$时$f(x)$是否有极限, 与$f(x)$在点x_0是否有定义没有关系.

(2) 设函数$f(x)$在去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有定义, 则$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充分必要条件是$f(x)$当$x\to x_0$时的左、右极限存在且相等, 即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

3. 极限的性质

(1) 如果极限存在, 则极限唯一.

(2) 若数列$\{a_n\}$收敛, 则数列$\{a_n\}$有界.

(3) 若数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$均收敛, 且存在正整数N_0, 使当$n\geqslant N_0$时, $a_n\leqslant b_n$, 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n .$$

(4) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则 $\{a_n\}$ 的任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 都收敛, 且它的极限也等于 a.

(5) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内是有界的.

(6) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$ (或 $A<0$), 则在点 x_0 的某一去心邻域内, 有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$)).

(7) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A\neq 0$, 则在点 x_0 的某一去心邻域内, 有 $|f(x)|>\left|\dfrac{A}{2}\right|$.

(8) 如果在点 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$ (或 $f(x)\leqslant 0$), 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 那么 $A\geqslant 0$ (或 $A\leqslant 0$).

4. 无穷小与无穷大

1) 无穷小

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量, 简称无穷小. 特别地, 以零为极限的数列 $\{a_n\}$ 也称为 $n\to\infty$ 时的无穷小.

在自变量的同一个变化过程中（如 $x\to x_0$, $x\to\infty$ 等）, 函数 $f(x)$ 的极限为 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是无穷小.

同一极限过程中的无穷小有如下性质:

(1) 两个无穷小的代数和仍是无穷小;

(2) 两个无穷小的乘积仍是无穷小;

(3) 无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小.

2) 无穷大

如果在自变量的某一变化过程中, 函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大, 则称函数 $f(x)$ 为 x 在该变化过程中的无穷大量, 简称无穷大.

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义), 如果对于任意给定的正数 M (无论它多么大), 总存在正数 δ (或正数 X), 只要 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ (或 $|x|>X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总有不等式 $|f(x)|>M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$)时的无穷大, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$).

注　如果在无穷大的定义中, 把 $|f(x)|>M$ 换成 $f(x)>M$ (或 $f(x)<-M$), 那么函数 $f(x)$ 称为该变化过程中的正无穷大(或负无穷大), 记作 $\lim f(x)=+\infty$ (或 $\lim f(x)=-\infty$).

同一极限过程中的无穷大有如下性质:

(1) 两个正(或负)无穷大的和仍然是正(或负)无穷大;

(2) 无穷大与有界函数的代数和仍是无穷大;

(3) 两个无穷大的乘积仍是无穷大;

(4) 无穷大与具有非零极限的函数的乘积仍是无穷大.

3) 无穷大与无穷小的关系

若 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小. 若 $f(x)$ ($f(x)\neq 0$)是无穷小, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

5. 无穷小的阶的比较

设 α, β 均为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=0$, 则称 β 是比 α 较高阶的无穷小, 记作 $\beta=o(\alpha)$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$, 则称 β 是比 α 较低阶的无穷小.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$, 则称 β 是与 α 同阶的无穷小. 特别地, 若 $c=1$, 则称 α 和 β 是等价无穷小, 记作 $\alpha\sim\beta$.

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$ (k 为正实数), 则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

当 $x\to 0$ 时, 常用的等价无穷小如下:

$\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $\sec x-1\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $\mathrm{e}^x-1\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ ($\alpha\neq 0$是常数).

等价无穷小的两个性质如下:

性质 1 设 α 与 β 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小, α 与 β 是等价无穷小的充分必要条件是 $\beta-\alpha=o(\beta)$.

性质 2 设 α, α', β 和 β' 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小, 且 $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$, 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ (或 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha'\beta'$)存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}$ (或 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha\beta$)存在, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ (或 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha\beta=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha'\beta'$).

6. 极限运算法则

1) 极限的四则运算法则

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$, 则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=AB$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

极限运算法则成立的前提条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在.

2) 复合函数的极限运算法则

设有复合函数 $y=f[\varphi(x)]$, 其中 $u=\varphi(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, 但

当 $x \neq x_0$ 时，有 $\varphi(x) \neq u_0$，又函数 $y = f(u)$ 在 $\mathring{U}(u_0, \eta)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在，且

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = A .$$

7．极限存在准则

准则 I　(夹逼准则)如果数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 满足下列条件:

(1) $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$.

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = a$，$\lim\limits_{n \to \infty} c_n = a$，

则 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

准则 II　单调有界数列必有极限.

准则 II 只给出了极限的存在性，并未给出极限的求法. 一般是在判定了极限存在以后，通过数列的递推式，在等式两边取极限得到.

8．两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$　或　$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

(三) 连续

1．函数连续性的定义

(1) 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(2) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续；如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

(3) 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，或称 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的连续函数. 如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在左端点处右连续、在右端点处左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，表示以下三条同时满足: ①函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义；② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；③ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

2．间断点及其类型

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 满足下面三个条件之一:

(1) $f(x)$ 在点 x_0 没有定义.

(2) $f(x)$ 在点 x_0 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

(3) $f(x)$ 在点 x_0 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

根据 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 的存在与否对函数 $f(x)$ 的间断点进行分类.

第一类间断点：点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点，且 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限均存在. 进一步细分，若左、右极限相等，则点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点；若左、右极限不相等，则点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

第二类间断点：点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点，但 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限中至少有一个不存在. 进一步细分，有无穷间断点和振荡间断点等.

3. 连续函数的运算及初等函数的连续性

(1) 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也在点 x_0 处连续，但对商的情形，需满足 $g(x_0)\neq 0$.

(2) 如果函数 $y=f(x)$ 在某区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，则它的反函数 $x=g(y)$ 在对应区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),\ x\in I_x\}$ 上也单调增加(或单调减少)且连续.

(3) 若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 连续，函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 连续.

注　根据连续的定义，上述定理的结果可以简洁地写成

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)] = f[\varphi(x_0)],$$

利用上式我们可以求复合函数的极限.

(4) 基本初等函数在其定义域内连续，一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

4. 分段函数的连续性

判定方法：

(1) 先将分段点和区间端点除外，在各开区间段上根据初等函数的连续性判断；

(2) 在分段点处，一般需分别讨论分段点的左、右极限及函数值，看它们是否相等；

(3) 如果定义域包含区间端点，还应分别讨论函数在左端点处是否右连续，在右端点处是否左连续.

5. 闭区间上连续函数的性质

(1) (最大值最小值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定取得最大值和最小值.

(2) (有界性定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有界.

(3) (介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则对于 $f(a)$，$f(b)$ 之间的任一数 μ，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\mu$.