

HydroMPM2D

水动力及其伴生过程耦合 数学模型原理与应用

珠江水利科学研究院

水利部珠江河口动力学及伴生过程调控重点实验室

胡晓张 宋利祥 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

HydroMPM2D

水动力及其伴生过程耦合 数学模型原理与应用

珠江水利科学研究院

水利部珠江河口动力学及伴生过程调控重点实验室

胡晓张 宋利祥 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

· 北京 ·

内 容 提 要

HydroMPM2D 是一套水动力及其伴生过程耦合数学模型,包括多个系列模型,本书围绕 HydroMPM2D 模型组成,分别介绍了 HydroMPM2D 模型体系、HydroMPM2D_FLOW 二维浅水流动数学模型、HydroMPM2D_SWAN 二维波流耦合数学模型、HydroMPM2D_AD 二维对流-扩散数学模型、HydroMPM2D_ECOLOGY 二维水生态多过程耦合数学模型、HydroMPM2D_SED 二维泥沙数学模型,以及基于显卡 GPU 的并行计算技术和 HydroMPM 多过程耦合数学模型的 GPU 并行化方法等。

本书可供设计院、科研院所、高等院校等模型研发及应用人员研究和参考。

图书在版编目(CIP)数据

HydroMPM2D水动力及其伴生过程耦合数学模型原理与应用 / 胡晓张, 宋利祥著. — 北京: 中国水利水电出版社, 2018.12

ISBN 978-7-5170-7253-9

I. ①H… II. ①胡… ②宋… III. ①水动力学—数学模型—研究 IV. ①TV131.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第298640号

书 名	HydroMPM2D 水动力及其伴生过程耦合数学模型原理与应用 HydroMPM2D SHUI DONGLI JI QI BANSHENG GUOCHENG OUHE SHUXUE MOXING YUANLI YU YINGYONG
作 者	珠江水利科学研究院 水利部珠江河口动力学及伴生过程调控重点实验室 胡晓张 宋利祥 著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京博图彩色印刷有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 12.5印张 259千字
版 次	2018年12月第1版 2018年12月第1次印刷
印 数	0001—1000册
定 价	98.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

水动力及其伴生过程包括浅水流动、波浪传播、盐度输运、污染物迁移转化、泥沙输移及河床冲淤变形等。准确、稳定、高效地模拟水动力及其伴生过程，一直是国内外学术界和工程界的研究热点与难点。近年来，随着计算机技术、数值计算理论的快速发展，国内外学者在水动力及其伴生过程数值模拟方面取得了丰硕的成果。其中，以 Godunov 型有限体积法为代表的显式数值计算方法，被广泛用于水动力及其伴生过程数值模拟中，并取得了良好的实际应用效果。本书总结了作者近年来在水动力及其伴生过程数值模拟方面的最新研究成果，在综述数学模型研究进展的基础上，介绍了 HydroMPM2D 二维水动力及其伴生过程耦合数学模型的开发背景及模型体系，建立了一套水动力及其伴生过程耦合数学模型，包括水流模型、波浪模型、波流耦合模型、对流-扩散模型、水生态多过程耦合模型，以及考虑潮流、波浪、盐度、泥沙相互作用的水沙输运及河床演变模型。HydroMPM2D 模型基于 Godunov 型有限体积法，并采用 OpenACC 编程模式实现了 GPU 并行计算。本书详细介绍了模型原理、数值计算方法和实际应用，可为模型研发及应用人员提供技术参考。

本书主要内容包括：HydroMPM2D 二维水动力及其伴生过程耦合数学模型的开发背景及模型体系；HydroMPM2D_FLOW 二维浅水流动数学模型原理及应用；HydroMPM2D_SWAN 二维波流耦合数学模型原理及应用；HydroMPM2D_AD 二维对流-扩散数学模型原理及应用；HydroMPM2D_ECOLOGY 二维水生态多过程耦合数学模型原理及应用；HydroMPM2D_SED 二维泥沙数学模型原理及应用；基于显卡 GPU 的并行计算技术，以及 HydroMPM 多过程耦合数学模型的 GPU 并行化方法等。

本书第1章由胡晓张、宋利祥编写，第3、第5、第6、第8章由胡晓张编写，第2、第4、第7章由宋利祥编写。全书由宋利祥统稿，胡晓张定稿。

本书的出版得到了国家重点研发计划资助（2017YFC0405900），本书在撰写过程中，参考和引用了国内外多位专家和学者的数据和研究成果，在此表示衷心感谢。

水动力及其伴生过程耦合数值模拟是一项涉及多个学科和多个专业的复杂工作，由于作者学识有限、时间仓促，本书难免有疏漏和不当之处，真诚希望各位读者给予批评指正。

作者

2018年8月于广州

目录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 数学模型研究进展	1
1.2 HydroMPM 数学模型体系	3
第 2 章 HydroMPM2D _ FLOW 数学模型原理及应用	5
2.1 二维水流运动控制方程	5
2.2 数值计算方法	9
2.3 模型验证与应用	27
2.4 小结	49
第 3 章 HydroMPM2D _ SWAN 数学模型原理及应用	50
3.1 SWAN 模型简介	50
3.2 SWAN 模型的控制方程和数值算法	51
3.3 SWAN 模型的物理过程和源项处理	52
3.4 波流耦合原理	52
3.5 模型验证与应用	54
3.6 沿岸流模拟	92
3.7 小结	94
第 4 章 HydroMPM2D _ AD 数学模型原理及应用	95
4.1 对流-扩散方程	95
4.2 数值计算方法	95
4.3 模型验证	96
4.4 小结	102
第 5 章 HydroMPM2D _ ECOLOGY 数学模型原理及应用	103
5.1 水流-水质-底泥耦合模型	103
5.2 水生态数学模型	107
5.3 水生态修复工程概化	114
5.4 模型验证与应用	118

5.5 小结	138
第 6 章 HydroMPM2D _ SED 数学模型原理及应用	139
6.1 控制方程	139
6.2 数值求解	142
6.3 关键问题的处理	143
6.4 模型验证与应用	155
6.5 小结	167
第 7 章 HydroMPM2D _ GPU 并行计算模型	168
7.1 并行编程语言选择	168
7.2 并行计算模型研究	169
7.3 高速计算方法加速性能分析	170
7.4 小结	182
第 8 章 结语	183
参考文献	184

第 1 章

绪 论

1.1 数学模型研究进展

近年来,随着数值计算方法和计算机技术的发展,水动力及其伴生过程数学模型得到了长足的发展,在计算网格、复杂地形处理、干湿界面处理、求解格式等方面取得了丰硕的成果。

1. 计算网格

网格生成是数值模拟的重要步骤之一,网格的布置方式将对数值模型的计算精度产生重要影响。按网格结构的几何拓扑关系,计算网格可分为结构网格和非结构网格。

常用的结构网格包括矩形网格、正交曲线网格和非正交曲线网格等。矩形网格是最简单的计算网格,具有生成简单、便于存储等优点,同时也存在对不规则边界拟合精度较差等缺陷。曲线网格是通过坐标变换生成的,对不规则边界拟合能力较强,在二维水动力及其伴生过程数值模拟中得到了广泛应用。然而,正交曲线网格的生成过程较为烦琐、耗时。

非结构网格是近年来得到迅速发展和广泛应用的计算网格。非结构网格对单元的组织形式没有限制,单元的位置可以任意分布,大小和形状也可以灵活多变,因而具有很强的复杂边界拟合能力。目前较为常用的非结构网格包括非结构三角形网格、非结构四边形网格、非结构混合网格和二叉树网格等。其中,非结构三角形网格生成方法主要包括前沿生成法和 Delaunay 方法。非结构网格具有网格生成速度快、效率高、便于局部网格加密等优势,目前已被广泛用于二维水动力及其伴生过程数值模拟研究中,其中,非结构三角形-四边形混合网格是当前应用最为广泛的网格类型。

2. 复杂地形处理

地形条件对二维水动力及其伴生过程起着决定性的作用。从控制方程上看,地形对水流的作用体现在底坡项上;从物理机制上看,总体而言,物质运输的主要载

体——水流是在重力作用下沿着地势低的方向流动。因此，准确模拟二维水动力及其伴生过程的关键在于数值模型能够较好地处理强不规则地形。

近年来，国内外学者提出了不同的复杂地形处理方法。王鑫等（2009）分析了底坡项对数值稳定性的影响，指出陡峭坡面上的水流数值计算时，即使时间步长满足克朗稳定条件（Courant - Friedrichs - Lewy, CFL），也可能出现计算失稳的情况，或者需要远比克朗稳定条件更为苛刻的时间步长，从而导致计算效率急剧下降。为解决该问题，王鑫等（2009）提出了用算子分裂方法处理底坡项的自适应时间步长方法，在保证计算稳定的前提下模型效率达到数量级上的提高。Liang 和 Borthwick（2009）提出了复杂地形条件下自适应网格生成技术，实现了地形变化剧烈的地方自适应加密网格，提高了模型的地形分辨能力。Begnudelli 和 Sanders（2006）将底高程定义在三角形顶点上，使得数值模型中地形表达具有二阶精度，提高了模型的模拟准确性。宋利祥等（2011）基于斜底三角单元，建立了适应复杂地形的溃坝洪水演进模型。

3. 干湿界面处理

干湿界面处理是数值模拟的难题之一。首先，干湿界面附近水深极小，因此在对流速进行更新时容易产生大流速，进而影响计算效率；其次，干湿界面处 Riemann 解结构中波前速度大于特征速度，因而容易引起计算失稳问题。围绕上述问题，国内外许多学者提出了不同的干湿界面处理方法。Zhao 等（1994）根据水深值大小对单元和边进行干湿分类。George（2008）提出了干湿界面处重构 Riemann 问题的镜像单元法，根据不同的左、右单元水位和底高程情况，分别确定用于计算数值通量的 Riemann 问题左、右初始间断值，提高了模型的干湿界面处理能力。Liang 和 Borthwick（2009）提出了干湿界面处底高程的局部修正方法。Begnudelli 和 Sanders（2006）提出了斜底三角单元上的水位-体积关系，能在保证水量守恒的前提下更为合理地单元的干湿状态进行分类。宋利祥等（2011）提出了斜底三角单元的干湿分类方法，实现了半干半湿单元的动量方程计算与流速更新，提供了干湿界面计算精度。

4. 求解格式

自 20 世纪 50 年代首次应用于模拟河道水流以来，有限差分法至今仍是二维水动力及其伴生过程数值模拟中应用较为广泛的基本方法。该方法数学概念清晰直观，表达简单，其解的存在性、收敛性和稳定性早已有较完善的研究成果，是比较成熟的数值模拟方法。根据所采用的空间差分和时间差分形式不同，有限差分法可以分为显式、隐式及显-隐式交替等方法。显式差分格式为了保持其计算稳定性，需严格遵守克朗稳定条件，时间步长和空间步长受到限制。隐式差分格式是无条件稳定的，但在实际应用中，其时间步长也有一定的限制。交替方向隐格式法（Alternating Direction Implicit, ADI）是一种显-隐格式交替使用的有限差分格式，目前已广泛应用于河道及潮汐河口计算中，然而在模拟溃坝洪水等具有强间断水面问题时遭到失败。

有限体积法把整个计算区域划分为若干相互连接但不重叠的控制单元，计算出每个控制单元边界沿法向流入与流出的流量和动量通量后，对每个控制单元分别进行流量和动量的平衡计算，最终得到计算时段末各控制单元的平均水深和流速。有限体积法能严格满足物理守恒定律，不存在守恒量的误差。有限体积法的误差主要来自对界面数值通量的估算，目前已经发展了多种界面数值通量计算方法，主要包括通量平均格式、通量向量分裂格式 (Flux Vector Splitting, FVS)、通量差分分裂格式 (Flux Difference Splitting, FDS)，以及 Roe、Osher、HLL、HLLC 等 Riemann 求解算子。其中，基于 Riemann 问题求解的 Godunov 型格式是目前模拟二维水动力及其伴生过程的主流数值格式。

有限体积法既具有几何灵活性，又具有较高的计算效率，在求解溃坝洪水等具有大梯度或间断解的强非恒定水流运动问题时具有非常大的优势。同时，由于具有严格的物质守恒性，有限体积法在对流-扩散方程求解方面也具有较好的应用前景。

5. 数学模型体系

水动力及其伴生过程数学模型包括浅水模型、波浪模型、水质模型、泥沙模型等。长期以来，国内外学者从单一或者轻量级耦合的角度研究较多，例如水流模型、水沙耦合模型或波流耦合模型。这类模型往往针对某一类具体的应用，综合考虑计算精度和效率的需求，对主要的动力学过程进行了合理概化，忽略或通过简化方式处理其他次要的伴生过程。随着计算机技术的进步，尤其是近年来 GPU 设备的快速发展，普通计算机和小型工作站的计算能力得到了显著提高，使得水动力及其伴生过程全耦合模型的高性能计算成为可能。因此，从增强模型适用性的角度，建立水动力及其伴生过程耦合数学模型及高速计算方法是未来的发展趋势之一。

1.2 HydroMPM 数学模型体系

HydroMPM (Hydro Multi-Process Modelling) 旨在利用数值计算手段对水流、泥沙、水质、咸潮等水动力及其伴生过程进行模拟分析。HydroMPM 计算模式见表 1.1。

表 1.1

HydroMPM 计算模式

计算模式	主要应用对象	主要原理
一维	内河、感潮河网	Pressimann 差分、分级联解
二维	河湖、外海、城区地表	混合网格、有限体积法
一维-二维耦合	河网-防洪保护区-河口及外海	侧向耦合、纵向耦合

从计算模式分类，HydroMPM 包括一维 (HydroMPM1D)、二维 (HydroMPM2D) 和一维-二维耦合 (HydroMPM12D) 等。本文主要介绍 HydroMPM2D 二维水动力及其伴生过程耦合数学模型，包括以下数学模型：

(1) HydroMPM2D_FLOW (二维浅水流动数学模型)。该模型能适用于河道、洪泛区、城市、河口及近海区等实际地形上的二维浅水动力学模型,包括河道洪水演进、具有干河床的溃坝(堤)洪水演进、弯道水流、暴雨山洪、风生流模拟等。

(2) HydroMPM2D_SWAN (二维波流耦合数学模型)。该模型实现了非结构三角形、四边形混合网格上潮流、波浪模型耦合计算,突破了原 SWAN 代码非结构计算模式仅适用三角网格的局限,实现了非结构三角形、四边形混合网格上的波浪计算;考虑了水流-波浪的相互作用,实现了波流耦合计算,为沿岸流模拟提供技术手段。

(3) HydroMPM2D_AD (二维对流-扩散数学模型)。该模型针对一般物质组分,考虑对流、扩散、降解等过程,结合 MUSCL-Hancock 预测-校正格式,实现了复杂条件下水流-物质对流扩散过程的高精度数值模拟,为盐度数学模型、水质水生态数学模型、泥沙数学模型提供基础。

(4) HydroMPM2D_ECOLOGY (二维水生态多过程耦合数学模型)。该模型在非结构网格水流模型基础上,考虑了溶解氧、氨氮、硝酸盐氮、有机氮、无机磷、有机磷、碳生化需氧量、叶绿素 a 等 8 个水质变量及其相互作用的溶解氧平衡子系统、氮循环子系统、磷循环子系统和浮游植物动力学子系统,较为全面地概化了水体中各相污染物迁移转化过程。

(5) HydroMPM2D_SED [水(潮)流-盐度-波浪-泥沙耦合数学模型]。该模型可模拟波生流、波浪破碎带及沿岸流等输沙过程,解决受波浪影响的河口区发育演变、砂质岬间弧形海湾体系演变等复杂过程模拟难题;此外,在挟沙力模式基础上,增加了切应力模式,启动条件更直接,且回归到力学问题,便于进一步探讨泥沙起动机理。

(6) HydroMPM2D_GPU (并行计算模型)。选取 OpenACC 并行编程模式,实现了二维水动力及其伴生过程耦合数学模型的 CPU-GPU 异构并行计算,显著提高了模型计算效率。

第 2 章

HydroMPM2D _ FLOW 数学模型 原理及应用

本章针对二维水流（潮流）运动模拟，基于完整的二维浅水方程，考虑降雨/下渗、柯氏力、床底切应力、风应力、波浪辐射应力、弯道环流、干湿边界等因素，采用非结构网格 Godunov 型有限体积法，建立了普适性较好的 HydroMPM2D _ FLOW 二维浅水流动数学模型，模型功能与特点包括以下：

(1) 适用范围广。能适用于河道、洪泛区、城市、河口及近海区等实际地形上的二维浅水动力学模型，包括河道洪水演进、具有干河床的溃坝（堤）洪水演进、弯道水流、暴雨山洪、风生流模拟等。

(2) 计算稳定性好。采用斜底单元处理干湿动边界问题，采用半隐式格式解决了摩擦项刚性问题，显著提升了模型的计算稳定性。模型已成功应用于地形起伏大、水深极浅的山区暴雨洪水模拟。

(3) 计算效率较高。通过优化程序结构和算法流程，获得了较高的计算效率。

2.1 二维水流运动控制方程

采用守恒形式的二维浅水方程：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{adv}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^{\text{adv}}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{diff}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^{\text{diff}}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{dis}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^{\text{dis}}}{\partial y} + \mathbf{S} \quad (2.1)$$

式中： \mathbf{U} 为守恒向量； \mathbf{E}^{adv} 、 \mathbf{G}^{adv} 分别为 x 、 y 方向的对流通量向量； \mathbf{E}^{diff} 、 \mathbf{G}^{diff} 分别为 x 、 y 方向雷诺应力引起的扩散通量向量； \mathbf{E}^{dis} 、 \mathbf{G}^{dis} 分别为 x 、 y 方向二次流引起的扩散通量向量； \mathbf{S} 为源项向量。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}^{\text{adv}} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}g(h^2 - b^2) \\ huv \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}^{\text{adv}} = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}g(h^2 - b^2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^{\text{diff}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2h\nu_t \frac{\partial u}{\partial x} \\ h\nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{bmatrix} & \mathbf{G}^{\text{diff}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ h\nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ 2h\nu_t \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} & \mathbf{E}^{\text{dis}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ hD_{xx} \\ hD_{yx} \end{bmatrix} & \mathbf{G}^{\text{dis}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ hD_{xy} \\ hD_{yy} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_f &= \begin{bmatrix} r - i \\ g(h+b)S_{0x} - ghS_{fx} + fhv + \frac{\tau_x^s}{\rho} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right) \\ g(h+b)S_{0y} - ghS_{fy} - fhu + \frac{\tau_y^s}{\rho} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial S_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

式中: h 为水深, m; u 、 v 分别为垂直方向平均流速在 x 、 y 方向的分量, m/s; b 为底高程, m; r 为降雨强度, m/s; i 为入渗强度, m/s; ν_t 为水平方向的紊动黏性系数; D_{xx} 、 D_{xy} 、 D_{yx} 、 D_{yy} 为二次流引起的扩散应力项; g 为重力加速度, m/s²; f 为柯氏力系数, $f=2w\sin\varphi$, $w=2\pi/86164=7.29\times 10^{-5}$ rad/s, 为地球自转角速度; φ 为当地纬度; $\tau^s=(\tau_x^s, \tau_y^s)$ 为风应力; S_{xx} 、 S_{xy} 、 S_{yy} 分别为波浪辐射应力; S_{fx} 、 S_{fy} 分别为 x 、 y 方向的摩阻斜率; S_{0x} 、 S_{0y} 分别为 x 、 y 方向的底坡斜率。

$$S_{0x} = -\frac{\partial b(x,y)}{\partial x} \quad S_{0y} = -\frac{\partial b(x,y)}{\partial y} \quad (2.3)$$

采用 Manning 公式计算摩阻斜率:

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (2.4)$$

式中: n 为 Manning 系数, 与地形地貌、地表粗糙程度、植被覆盖等下垫面情况有关, 一般结合经验给定 Manning 系数值。

采用代数关系式 (2.5) 计算紊动黏性系数:

$$\nu_t = \alpha \kappa u_* h \quad (2.5)$$

式中: α 为比例系数, 一般取 0.2; κ 为卡门系数, 取 0.4; u_* 为床面剪切流速。

如图 2.1 所示, 约定高程基准面的高程值为零, 假设水位为 $\eta(x,y,t)$, 河底高程为 $b(x,y)$, 水深为 $h(x,y,t)$, 则三者满足如下关系:

$$\eta(x,y,t) = h(x,y,t) + b(x,y) \quad (2.6)$$

采用下式计算水面风应力:

$$\tau_x^s = C_d \frac{\rho_a}{\rho_w} U_w \sqrt{U_w^2 + V_w^2} \quad \tau_y^s = C_d \frac{\rho_a}{\rho_w} V_w \sqrt{U_w^2 + V_w^2} \quad (2.7)$$

式中: C_d 为水面风应力拖曳系数; ρ_a 、 ρ_w 分别为空气和水的密度; U_w 、 V_w 分别为 x 、 y 方向上水面 10m 高处的风速分量, m/s。

水面风应力拖曳系数 C_d 可取常数值 (如 2.6×10^{-3})。此外, 考虑到阻尼系数随着风速的加大而有一定增大的观测事实, 常将表面风应力拖曳系数参数化成如下的

线性形式:

$$C_d = \min[0.0035, 0.001 \times (a + b\sqrt{U_w^2 + V_w^2})] \quad (2.8)$$

式中: a 、 b 为经验系数。

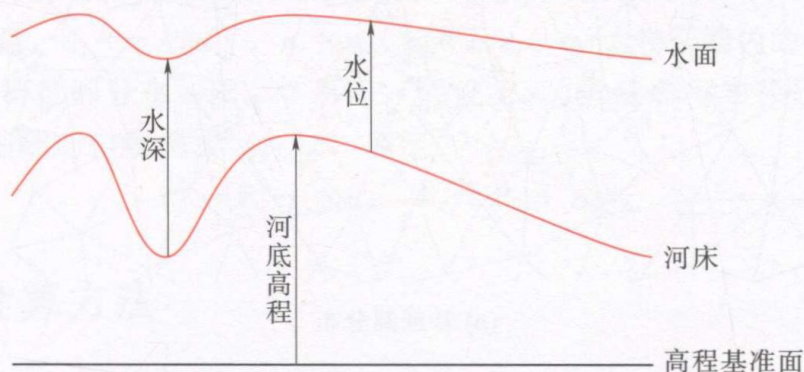


图 2.1 水位、水深、河底高程的关系示意图

采用式 (2.9) 计算波浪辐射应力:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} n(\cos^2\alpha + 1) - \frac{1}{2} & \frac{n}{2}\sin(2\alpha) \\ \frac{n}{2}\sin(2\alpha) & n(\sin^2\alpha + 1) - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

其中

$$E = \frac{1}{8} \rho_w g h^2 \quad (2.10)$$

$$n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] \quad (2.11)$$

式中: α 为波浪传播方向与 x 轴的夹角; E 为单位水柱体一个波周期的平均波能; n 为波群速度与相速度之比; k 为波数。

采用式 (2.12) 计算二次流引起的扩散应力项:

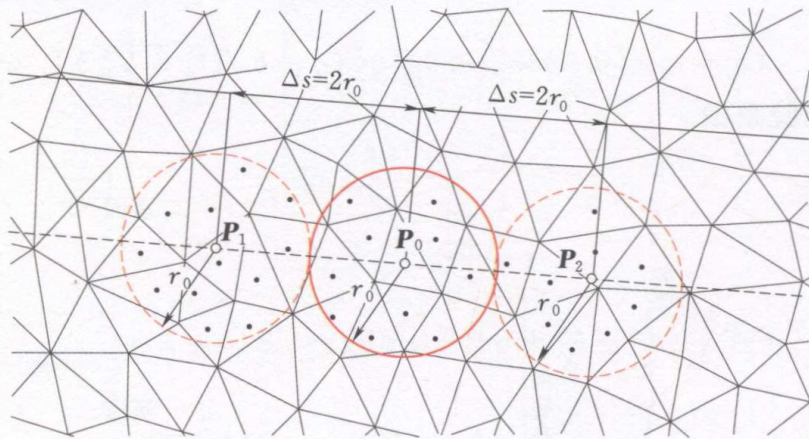
$$\begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{bmatrix} = \mathbf{M}(\varphi) \begin{bmatrix} D_{ll} & D_{lt} \\ D_{lt} & D_{tt} \end{bmatrix} \mathbf{M}^T(\varphi) \quad (2.12)$$

式中: φ 为流速与 x 轴的夹角; D_{ll} 、 D_{lt} 、 D_{lt} 、 D_{tt} 为二次流引起的扩散应力项; $\mathbf{M}(\varphi)$ 为转换矩阵。

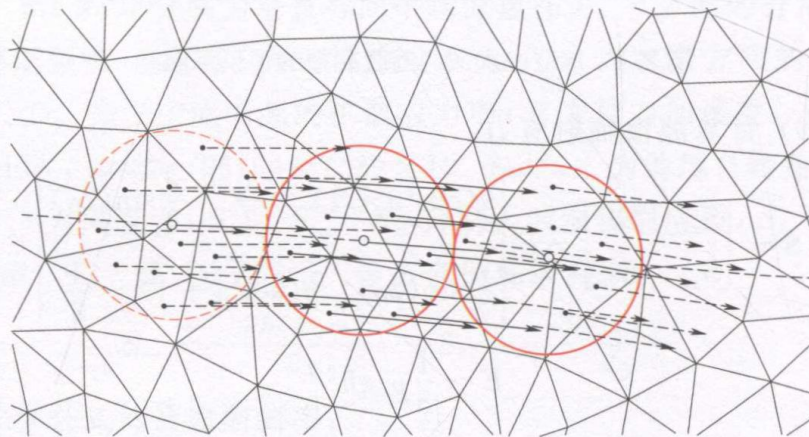
$$\mathbf{M}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$D_{ll} = \frac{u^2 + v^2}{m(m+2)} \quad D_{lt} = D_{tl} = \frac{v_s \sqrt{u^2 + v^2}}{1+2m} \text{sign}[R] \quad D_{tt} = \frac{v_s^2}{3} \quad (2.14)$$

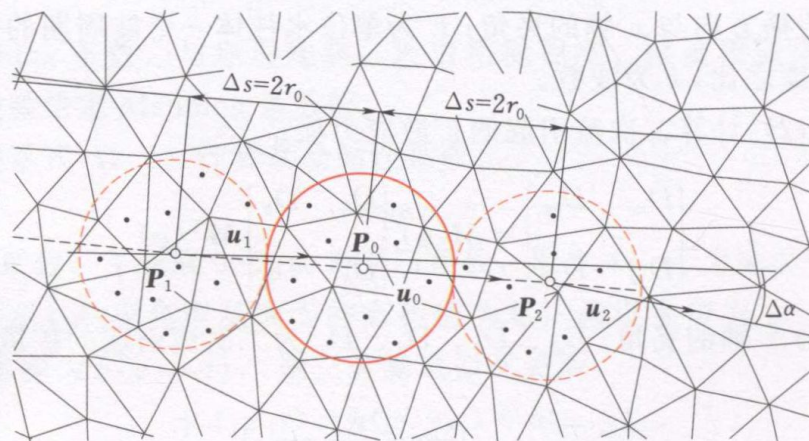
式中: $m = \kappa \sqrt{u^2 + v^2} / u_*$; $v_s = \frac{2m+1}{2\kappa^2 m} \frac{h}{R} \sqrt{u^2 + v^2}$ 为水面处的横向流速; R 为流线曲率半径。



(a) 特征圆分布



(b) 特征圆内的平均流速矢量计算



(c) 流向夹角计算

P_0 —流线曲率半径计算位置； P_1 、 P_2 —辅助位置

图 2.2 曲率计算的特征圆示意图^①

① Lorenzo Begnudelli, Alessandro Valiani, Brett F Sanders. A balanced treatment of secondary currents, turbulence and dispersion in a depth - integrated hydrodynamic and bed deformation model for channel bends [J]. Advances in Water Resources, 2010, 33: 17 - 33.

$$R = \frac{2\Delta s}{\Delta\alpha} \quad (2.15)$$

其中

$$\Delta s = 2r_0$$

式中： r_0 为曲率计算的特征圆半径； $\Delta\alpha$ 为流向夹角， $\cos\Delta\alpha = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ ； \mathbf{n}_1 、 \mathbf{n}_2 为特征圆内的单位流速矢量， $\mathbf{n}_1 = \mathbf{u}_1 / \|\mathbf{u}_1\|$ ， $\mathbf{n}_2 = \mathbf{u}_2 / \|\mathbf{u}_2\|$ ； \mathbf{u}_1 、 \mathbf{u}_2 为特征圆内的平均流速矢量。

曲率计算的特征圆分布如图 2.2 所示。假设 \mathbf{P}_0 为流线曲率半径计算位置（即单元形心位置），则辅助位置按式 (2.16) 确定：

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 - \Delta s \mathbf{n}_0 \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_0 + \Delta s \mathbf{n}_0 \quad (2.16)$$

2.2 数值计算方法

采用边界拟合能力强和易于局部网格加密的三角形和四边形网格剖分计算域，利用基于水位-体积关系的斜底单元模型，有效解决了小尺度线状地形模拟难题；以能够有效捕获激波的 Godunov 型有限体积法为框架，运用在时间上和空间上均具有二阶精度的 MUSCL-Hancock 预测-校正格式离散洪水控制方程，采用 HLLC 近似 Riemann 算子计算对流数值通量，采用直接近似方法计算扩散数值通量，并结合斜率限制器以保证模型的高分辨率特性，避免在间断或大梯度解附近产生非物理虚假振荡；基于单元中心型底坡项近似方法，在不使用任何额外动量通量校正项的前提下模型能保持通量梯度与底坡项之间的平衡，即模型具有和谐性质；采用半隐式格式处理摩阻项，该半隐式格式既能保证不改变流速分量的方向，也能避免小水深引起的非物理大流速问题，有利于计算稳定性；实现了固壁、水位、流量、自由出流等边界条件；基于克朗稳定条件实现了数值模型的自适应时间步长技术。

2.2.1 计算网格

鉴于非结构三角形、四边形混合单元具有复杂边界拟合能力强、便于网格生成和局部加密等特点，HydroMPM2D_FLOW 采用非结构三角形、四边形单元作为计算网格。以三角形单元为例（四边形网格类似），网格拓扑结构如图 2.3 所示。其中 C_i 为待计算单元，其顶点 1—顶点 2—顶点 3 排序服从逆时针方向；与顶点 k 相对的边为 $\Gamma_{i,k}$ ，其外法向单位向量为 $\mathbf{n}_{i,k}$ ；单元 C_i 的邻接单元中，与顶点 k 相对的单元为 $C_{i,k}$ 。

对于每一个节点而言，其网格拓扑信息包括节点序号，节点坐标，节点周围的单元；对于每一条边而言，其网格拓扑信息包括边序号，边的

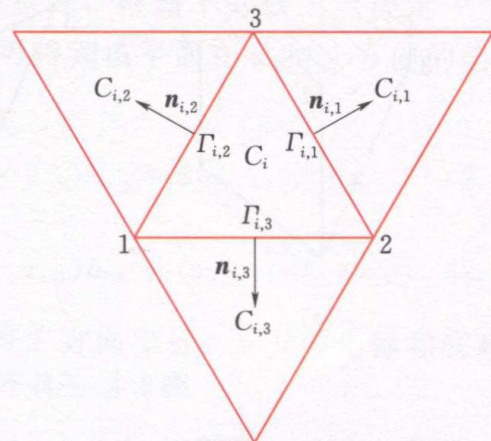


图 2.3 非结构三角形单元拓扑结构示意图

左、右单元，边的始、末节点；对于每一个单元而言，其网格拓扑信息包括单元序号，单元的三个顶点，单元的两条边，单元的三个邻接单元。在模型开始计算之前，需要根据网格文件构造包含上述拓扑信息的计算网格系统。

2.2.2 斜底单元模型

在计算网格结构中，有两种底高程定义方式：①将底高程定义于单元形心处，单元内的底高程为均一值；②将底高程定义于单元顶点处，单元内的底高程服从线性分布。在地形表达精度方面，第一种方式仅为一阶精度，而第二种方式具有二阶精度。此外，在水动力数值模拟的实际工程中，往往包含由生产堤和公路等线状建筑物组成的奇异地形。该类奇异地形具有低水位干出、高水位淹没的性质，必须在模型中予以准确表达。然而，如果采取第一种底高程定义方式，由于此类奇异地形的空间尺度要远小于满足计算效率要求的网格尺度，因此需要采用局部网格加密方法以表达此类奇异地形，此时不仅网格数量剧增，而且由于稳定条件的限制，小尺度网格将导致模型的计算时间步长大幅度减小，严重影响模拟效率。另一方面，如果采取第二种底高程定义方式，在网格划分之前，将一系列节点预先布置在生产堤和公路等线状建筑物上，进而使该类奇异地形在网格系统中以“边”的形式得以表达。高水位时，奇异地形所在网格边被淹没过水；低水位时，奇异地形所在网格边的物质通量为零，起到阻水作用，故第二种底高程定义方式可以实现该类奇异地形的准确模拟。综合上述两方面的原因，HydroMPM2D_FLOW 采用第二种底高程定义方式，即斜底单元模型。

以三角单元为例（四边形单元类似），在斜底单元模型中，守恒变量 h 代表单元平均水深，单元的水量为 $h\Omega$ ，其中 Ω 为单元面积；水位 η 代表单元内含水部分的水面高程，且假设单元内含水部分的水面为一平面（图 2.4）。其中，斜线阴影面为水面，三角形 123 为单元底面，图 2.4 (a) 中三个顶点的水深均大于零，图 2.4 (b) 和图 2.4 (c) 存在水深为零的顶点。

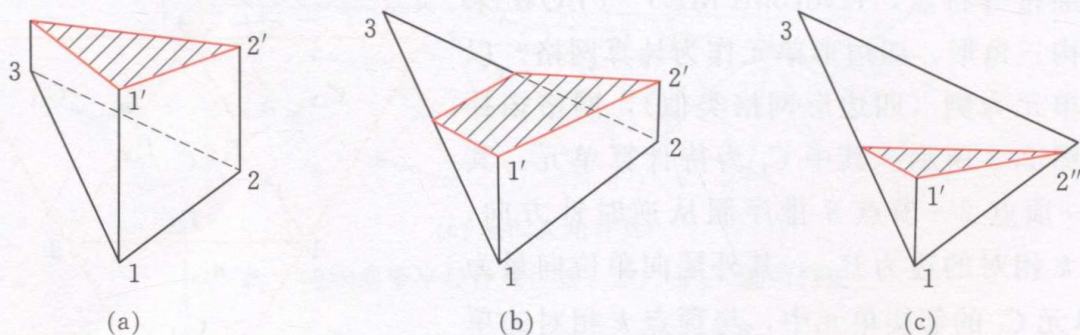


图 2.4 三种不同水位条件下的斜底单元示意图

不失一般性，假设单元 C_i 三个顶点的底高程 $b_{i,1}$ 、 $b_{i,2}$ 和 $b_{i,3}$ 满足关系： $b_{i,1} \leq b_{i,2} \leq b_{i,3}$ 。由水量守恒原理，可得单元水深与单元水位之间的转换计算式。