

“十三五”国家重点出版物出版规划项目
航天机构高可靠设计技术及其应用

空间机械臂使用可靠性 系统控制理论与优化 控制方法

谭春林 陈 钢 著



科学出版社

“十三五”国家重点出版物出版规划项目
“航天机构高可靠设计技术及其应用”丛书

空间机械臂使用可靠性 系统控制理论与优化控制方法

谭春林 陈 钢 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书阐述空间机械臂使用可靠性系统控制的基本原理和方法,主要内容有空间机械臂使用可靠性系统控制基本概念、使用可靠性系统控制模型、使用可靠性影响因素与控制变量映射关系,以及空间机械臂任务规划方法、轨迹优化方法、运动控制方法和故障自处理策略。

本书适合航天器设计、空间技术等相关领域科技人员参考使用,也可作为高校相关专业的研究生教材。

图书在版编目(CIP)数据

空间机械臂使用可靠性系统控制理论与优化控制方法/谭春林,陈钢著. —北京:科学出版社,2019. 2

(航天机构高可靠设计技术及其应用丛书)

“十三五”国家重点出版物出版规划项目

ISBN 978-7-03-060095-0

I. ①空… II. ①谭… ②陈… III. ①空间机械臂-控制系统 IV. ①TP241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 292104 号

责任编辑:魏英杰 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:吴兆东 / 封面设计:铭轩堂

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 2 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2019 年 2 月第一次印刷 印张:16

字数:319 000

定价:98.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

“航天机构高可靠设计技术及其应用”丛书编委会

主 编	谭春林		
副主编	于登云	刘日平	孙 京
编 委	孙汉旭	马明臻	赵 阳
	张建国	韩建超	魏 承
	张新宇	陈 钢	肖歆昕
	潘 博	刘永健	刘育强
	刘华伟		

前 言

目前我国载人航天工程已经完成无人/有人入轨返回、多人协同出舱、交会对接等一系列任务,下一步将建造长期在轨运行的空间站;我国深空探测工程在实现月球环绕与着陆后,还要进一步开展月表取样任务,以及更远的火星探测计划。在这些人类探索宇宙的空间任务中,空间机械臂将代替航天员完成众多复杂而富有挑战性的工作。空间机械臂具备精确操作和视觉识别能力,既可自主工作,也可由航天员遥控,是集机械、视觉、力学、电子和控制等学科于一体的高端航天装备。随着我国航天技术的发展,航天应用任务日益多样,空间机械臂将大量应用。空间机械臂的广泛使用不但使空间探索的成本大大降低,而且保证了航天员的生命安全。

空间机械臂作为航天器上的一种复杂机电系统,面临一般航天器共有的工作环境恶劣、维修保养困难等问题。研制可靠性高、长期工作稳定的空间机械臂产品,是我国航天技术面临的主要难题之一。空间机械臂可靠性的提升可以从固有可靠性和使用可靠性两方面着手,尤其是使用可靠性的维护与保持问题已逐渐引起行业的重视。使用可靠性系统控制是空间机械臂固有可靠性的延伸与应用,通过引入使用可靠性影响因素,围绕任务规划、轨迹优化和容错控制等技术,实现空间机械臂正常状态执行任务代价最小化、非正常状态完成任务概率最大化和服役周期内机构性能衰减最小化。在空间机械臂服役周期内,如何通过控制策略的自适应调整与优化,延缓空间机械臂各执行单元的性能衰减;在空间机械臂部分故障状态下,如何通过控制补偿,继续保持机械臂原有的功能与性能,是空间机械臂使用可靠性系统控制理论中的重点问题。

本书主要介绍空间机械臂使用可靠性系统控制的基本原理和具体方法,按照如下思路安排章节顺序:首先对空间机械臂使用可靠性系统控制的基本概念进行必要的介绍,继而结合空间机械臂自身性能特点和任务特点讨论使用可靠性系统控制模型的建立方法。为建立空间机械臂使用可靠性与控制之间的联系,梳理了使用可靠性影响因素并介绍其与控制变量间映射关系的构建方法。在此基础上,采用空间机械臂多约束多准则任务规划方法、多约束多目标轨迹优化方法,以及时变动态约束下运动控制方法对空间机械臂整个任务过程从全局到局部进行分层优化控制。最后,考虑空间机械臂关节故障这一典型异常工况,介绍故障自处理与控制参数调整策略。

本书是团队研究的成果、集体智慧的结晶。北京邮电大学的孙汉旭、贾庆轩、王一帆、高欣、褚明等老师参与了部分章节的撰写或讨论,在此对他们表示由衷的谢意。

本书的研究工作得到了国家重点基础研究发展计划(2013CB733000)的资助,在此表示诚挚的谢意。

限于作者水平,书中不妥之处在所难免,恳请广大读者和专家予以批评和指正。

作者

目 录

前言

第 1 章 空间机械臂使用可靠性系统控制基本概念	1
1.1 空间机械臂使用可靠性系统控制概念提出	1
1.2 空间机械臂应用过程特征分析	1
1.3 空间机械臂使用可靠性系统控制概念内涵	2
1.4 基于使用可靠度的空间机械臂使用可靠性建模	3
1.4.1 基于贝叶斯估计的空间机械臂实时可靠性评价	3
1.4.2 基于粒子滤波的空间机械臂实时可靠性评价	13
1.4.3 小结	23
1.5 本章小结.....	24
第 2 章 空间机械臂使用可靠性系统控制模型	25
2.1 引言.....	25
2.2 使用可靠性多约束多变量综合优化模型.....	26
2.3 使用可靠性系统控制模型.....	27
2.4 空间机械臂运动平稳性优化方法.....	29
2.5 空间机械臂使用可靠性系统控制调度策略.....	42
2.6 本章小结.....	47
第 3 章 空间机械臂使用可靠性影响因素与控制变量映射关系	48
3.1 引言.....	48
3.2 使用可靠性影响因素梳理.....	48
3.2.1 使用可靠性影响因素	49
3.2.2 控制变量	49
3.2.3 中间响应层因素.....	50
3.3 使用可靠性影响因素与控制变量映射关系.....	53
3.3.1 中间响应层因素与控制变量间的数学关系	53
3.3.2 使用可靠性影响因素与控制变量间的数学关系	61
3.4 控制变量灵敏度分析.....	62
3.5 本章小结.....	83

第 4 章 多约束多准则空间机械臂任务规划方法	84
4.1 引言	84
4.2 空间机械臂任务规划框架构建	85
4.3 空间机械臂任务剖面分析	87
4.3.1 分层任务网络规划器介绍	87
4.3.2 空间机械臂分层任务网络规划域	89
4.3.3 空间机械臂分层任务网络求解	92
4.4 空间机械臂任务中间点规划及优化	94
4.4.1 A* 算法介绍	94
4.4.2 基于改进 A* 算法任务中间点规划	95
4.4.3 基于虚拟障碍的双臂任务中间点规划	102
4.5 仿真验证	103
4.5.1 物体转移任务剖面分析算例	104
4.5.2 移动任务中间点规划仿真	105
4.5.3 多臂系统任务中间点规划仿真	106
4.6 本章小结	108
第 5 章 多约束多目标空间机械臂轨迹优化方法	109
5.1 引言	109
5.2 空间机械臂多约束多目标轨迹优化问题建模	110
5.2.1 多约束多目标优化问题数学模型	110
5.2.2 空间机械臂任务约束条件分析	111
5.2.3 空间机械臂任务优化目标分析	113
5.2.4 最优化问题求解方法	116
5.3 空间机械臂多约束多目标轨迹优化方法应用	118
5.3.1 面向大负载点到点任务的空间机械臂轨迹优化	119
5.3.2 考虑动力学特性的空间机械臂轨迹优化	136
5.4 本章小结	145
第 6 章 时变动态约束下空间机械臂运动控制方法	146
6.1 引言	146
6.2 空间机械臂关节动力学模型	146
6.2.1 空间机械臂关节非线性特性分析	146
6.2.2 引入摩擦和迟滞非线性的空间机械臂关节动力学模型	150
6.2.3 空间机械臂非线性关节的动力学模型仿真	153
6.3 关节动态参数辨识与补偿	156
6.3.1 空间机械臂关节的摩擦辨识与补偿	156

6.3.2 空间机械臂关节的迟滞辨识与补偿	162
6.3.3 空间机械臂关节的摩擦和迟滞辨识与补偿仿真	168
6.4 动态时变约束下关节运动控制策略	172
6.5 本章小结	176
第7章 空间机械臂故障自处理与参数调整策略	177
7.1 引言	177
7.2 空间机械臂关节故障自处理策略分析	177
7.3 空间机械臂故障后性能评估	179
7.3.1 基于蒙特卡罗法的机械臂容错空间分析	179
7.3.2 基于关节可靠性的可靠容错工作空间	180
7.3.3 基于可操作度指标的空间机械臂灵巧性分析	183
7.4 空间机械臂故障后模型重构方法	187
7.4.1 关节和连杆的标号规则	187
7.4.2 基于DH参数方法运动学建模	189
7.4.3 单关节锁定下的模型重构	193
7.4.4 数值仿真验证	199
7.5 考虑故障容错性能的空间机械臂轨迹优化	201
7.5.1 空间机械臂关节构型集合求解方法	202
7.5.2 基于多项式插值的关节轨迹规划	203
7.5.3 基于多目标粒子群的全局容错轨迹优化过程	205
7.5.4 数值仿真验证	209
7.6 关节故障后参数突变抑制方法	212
7.6.1 基于动力学可操作度的冗余度机械臂关节参数突变抑制	213
7.6.2 关节失效时空间机械臂参数突变抑制控制策略研究	222
7.7 本章小结	237
第8章 总结与展望	239
参考文献	243

第 1 章 空间机械臂使用可靠性系统控制基本概念

1.1 空间机械臂使用可靠性系统控制概念提出

航天机构使用可靠性系统控制基础理论研究是国家重点基础研究发展计划(973 计划)项目“航天工程中机构可靠性及其动力学和系统控制基础研究”的课题之一,面向以实现航天机构在轨服役过程中正常状态执行任务代价最小化、非正常状态完成任务概率最大化、服役周期内机构性能衰减最小化三类任务,提出的一种新的理论方法,以解决航天机构在轨使用过程中的规划和控制问题。其着眼于航天机构使用可靠性系统控制技术体系、航天机构使用可靠性系统控制理论方法研究和航天机构使用可靠性系统控制验证技术研究三大方面。使用可靠性系统控制技术体系作为该项目研究的两大理论支撑之一,是项目中航天机构固有可靠性研究成果的延伸与应用。在航天机构服役阶段引入使用可靠性控制体系,可以延缓航天机构固有可靠性在服役过程中的衰减,达到服役阶段使用可靠性保持与提升的目标。

航天机构使用可靠性系统控制通过分析航天机构使用可靠性影响因素,建立航天机构使用可靠性描述函数,提出航天机构故障自处理策略,建立考虑航天机构使用可靠性系统控制的多目标多准则任务规划模型,突破航天机构任务规划过程中控制模型重构与在线调整技术,提出适用航天机构使用可靠性系统控制的机构控制方法,形成航天机构使用可靠性系统控制的基础理论体系。

在本书的讨论中,不失一般性地选取典型复杂航天机构——空间机械臂作为研究对象。为了在空间机械臂中引入使用可靠性控制体系,需要分析梳理影响空间机械臂在轨服役的使用可靠性因素,建立该使用可靠性影响因素与控制变量之间的映射关系,并以此为基础,构建空间机械臂使用可靠性系统控制模型;依据该模型,在各控制层次中引入使用可靠性,并开展相关控制方法研究,形成使用可靠性系统控制的基础理论体系,从而构建空间机械臂使用可靠性控制的技术体系。

1.2 空间机械臂应用过程特征分析

空间机械臂在执行空间任务过程中,需依次进行任务规划、路径规划和机械臂运动部件的位置、速度等的控制。任务规划层作为控制系统的最高层,负责任务目

标的接收、分析和拆解,将复杂任务目标划分成一系列机械臂可以直接规划执行的动作序列。由于机械臂完成任务途径的多样性,任务规划中还涉及对机械臂系统各类资源的调度,优化整个任务过程中的资源消耗,最终以任务中间点及各阶段资源分配方案的形式给出规划结果。路径规划层主要功能为在具有障碍物的环境中,按照一定的评价标准,寻找一条从起始状态到目标状态的无碰撞路径。控制变量通常包括关节、末端运动变量,对于自由漂浮的机械臂而言,有时还包括基座相关变量,如关节角速度、角加速度、关节力矩、末端(角)速度、末端(角)加速度、基座(角)速度、基座(角)加速度、时间。目标为终止时刻的状态或者为运行过程中的某些状态,同时需满足机械臂自身的约束,如关节角度、关节力矩、末端输出力/力矩、末端位姿、基座姿态、时间、能耗、距离。运动控制层主要通过对机械运动部件的位置、速度等进行实时的控制管理,使其按照预期的运动轨迹和规定的运动参数进行运动。运动控制层的参数可以分为控制器参数和控制目标。控制器参数描述控制规律,通常包含偏离度、最大动态偏差、余差、响应时间、调节时间、运行周期、延迟时间、稳定性、超调量。控制目标为描述机械臂特性的某些量,如负荷能力、定位精度、重复精度、跟踪精度、条件数、灵巧性、冗余度、可靠性、可操作度、系统扰动。后面主要是在建立空间机械臂使用可靠性系统控制模型的基础上,通过分析和优化任务规划层、路径规划层与运动控制层三大层面,达到提升空间机械臂使用可靠性,延长在轨服役寿命的目标。

1.3 空间机械臂使用可靠性系统控制概念内涵

空间机械臂使用可靠性系统控制通过分析空间机械臂使用可靠性影响因素,建立空间机械臂使用可靠性描述函数,提出空间机械臂故障自处理策略,建立考虑空间机械臂使用可靠性系统控制的多目标多准则任务规划模型,突破空间机械臂任务规划过程中控制模型重构与在线调整技术,提出适用空间机械臂使用可靠性系统控制的机构控制方法,形成空间机械臂使用可靠性系统控制的基础理论体系,从而构建空间机械臂使用可靠性的技术体系。

空间机械臂的使用可靠性实际上是以时间的方式来描述机械臂的产品质量,其经典的定义是:在规定的条件下和规定的时间内满意地完成规定功能的概率。可靠性通常分为固有可靠性和使用可靠性。固有可靠性是指产品在设计、制造过程中被赋予的固有属性,决定于生产厂家。使用可靠性是指产品在实际使用过程中表现出的可靠性,除固有可靠性的影响因素外,还要考虑安装、操作使用、维修保障等方面因素的影响,使用可靠性决定于用户。本书主要研究如何通过决策分析和优化控制提升空间机械臂的使用可靠性。

1.4 基于使用可靠度的空间机械臂使用可靠性建模

在执行规定任务 T_i 的同时考虑控制系统的使用可靠性,可以通过一个反馈通道对系统的使用可靠度进行闭环控制。在控制中,首先依据系统当前运行状态对系统的使用可靠性进行实时评价,得到使用可靠度;然后比较系统当前可使用可靠度和任务要求的使用可靠度。当系统使用可靠度不能满足要求时,需要根据一个控制变量调整策略计算系统控制变量是否需要调整,以及调整量。此调整量作为机械臂执行任务的补偿量叠加在原有控制变量上对机械臂进行控制,引导机械臂以更高的使用可靠度执行任务。

1.4.1 基于贝叶斯估计的空间机械臂实时可靠性评价

基于以上描述,本节介绍一种基于贝叶斯估计计算实时可靠度的使用可靠性控制方法。首先给出基于规定任务的机械臂使用可靠度量化方法,然后建立针对量化的使用可靠度的控制模型。使用状态空间方程对控制过程进行描述,并采用贝叶斯方法对过程参数实时更新,在此基础上推导出系统实时使用可靠度的表达式。基于统计过程控制理论设计考虑调整成本的控制变量的调整策略。现有控制方法只关注执行单次任务的性能,没有考虑机械臂长时间服役期间的使用可靠性。因此,本节提出的控制方法,通过引入实时使用可靠性评价和控制变量调整环节,引导机械臂以更高的使用可靠度执行任务。

空间机械臂的使用可靠性是描述空间机械臂在实际使用过程中表现出来的可靠性,由于空间机械臂是一种可控装置,因此空间机械臂的使用可靠性取决于其控制方法。空间机械臂使用可靠性是指空间机械臂执行规定的任务时,采用规定的控制方法成功完成任务的能力,并通过使用可靠度进行量化。空间机械臂的工作由一系列任务的集合组成,以 T 表示机械臂的任务集合,即

$$T = \{T_i | i=1, 2, \dots, n\} \quad (1-1)$$

对于任意一项给定的任务 T_i ,由 m 个因素决定任务的成功或失败,用集合 I_i 表示决定任务 T_i 成功的所有因素的值,即

$$I_i = \{I_{ij} | j=1, 2, \dots, m\} \quad (1-2)$$

对于任意任务 T_i 的每个成功决定因素 I_{ij} ,均有规定的精度要求,用区间 E_{ij} 表示,即

$$E_{ij} = [\lambda_{ij} - \epsilon_{ij}, \lambda_{ij} + \epsilon_{ij}] \quad (1-3)$$

其中, λ_{ij} 为 I_{ij} 的期望值; $\epsilon_{ij} \in [0, +\infty)$ 为 I_{ij} 的误差允许量。

当任务 T_i 执行结束,且满足 $I_{ij} \in E_{ij} (i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m)$ 时,则任务 T_i 执行成功。

用非负随机变量 X_{ij} 表述机械臂采用规定的控制方法执行任务 T_i 结束后的 I_{ij} 值, X_{ij} 的分布函数为

$$F_{ij}(\lambda_{ij}) = P\{X_{ij} < \lambda_{ij}\}, \quad j=1,2,\dots,m \quad (1-4)$$

在此基础上,可以表示 X_{ij} 符合任务 T_i 精度要求的概率,即

$$R(E_{ij}) = P\left\{\bigcap_{j=1}^m X_{ij} \in E_{ij}\right\} \quad (1-5)$$

其中, $R(E_{ij})$ 为空间机械臂的使用可靠度。

由式(1-5)可知,使用可靠度是机械臂执行任务各项因素达到规定精度要求的概率。因此,空间机械臂的使用可靠度也可以定义为机械臂采用规定的控制方法执行规定的任务,成功完成任务的概率。 I_{ij} 也可称为可靠性影响因素,根据任务的不同, I_{ij} 可以是机械臂末端位姿、末端速度、末端力等。

如图 1-1 所示,给出一种使用可靠性控制模型,在执行规定任务 T_i 的同时考虑控制系统的使用可靠性,通过一个反馈通道对系统的使用可靠度进行闭环控制。正常状态下,首先进行任务规划,包括如下步骤。

① 对规定的任务进行任务剖面分析,确定运动过程中的约束条件和优化准则。

② 根据任务优化准则,将规定的任务划分为若干个任务阶段。

③ 判断任务阶段的划分是否可行,即是否违反位置相关约束,最终输出任务中间点。

然后,根据得到的任务中间点进行路径规划,包括如下步骤。

① 建立多类别、多准则融合优化目标函数。

② 使用搜索算法搜索空间机械臂的最优路径。

最后,在考虑动态时变约束的条件下,使用最优控制策略,执行路径规划方案。

在机械臂运行的过程中,依据系统当前运行状态对系统的使用可靠性进行实时评价,得到使用可靠度 $R(E_{ij})$; 然后比较系统当前使用可靠度和任务要求的使用可靠度。当系统使用可靠度不能满足要求时,根据一个控制变量调整策略计算系统控制变量是否需要调整,以及调整量。此调整量作为机械臂执行任务的补偿量叠加在路径规划输出的控制变量上对机械臂进行控制,使机械臂真实的执行结果与规划方案更相近,即机械臂成功完成任务的概率最大化。

故障情况下,故障诊断模块根据系统状态检测模块的检测信息,判断故障源及相关故障信息。针对不同的故障模式,故障自处理和模型重构模块进行在线调整,使用重构后的模型重新进行任务规划。

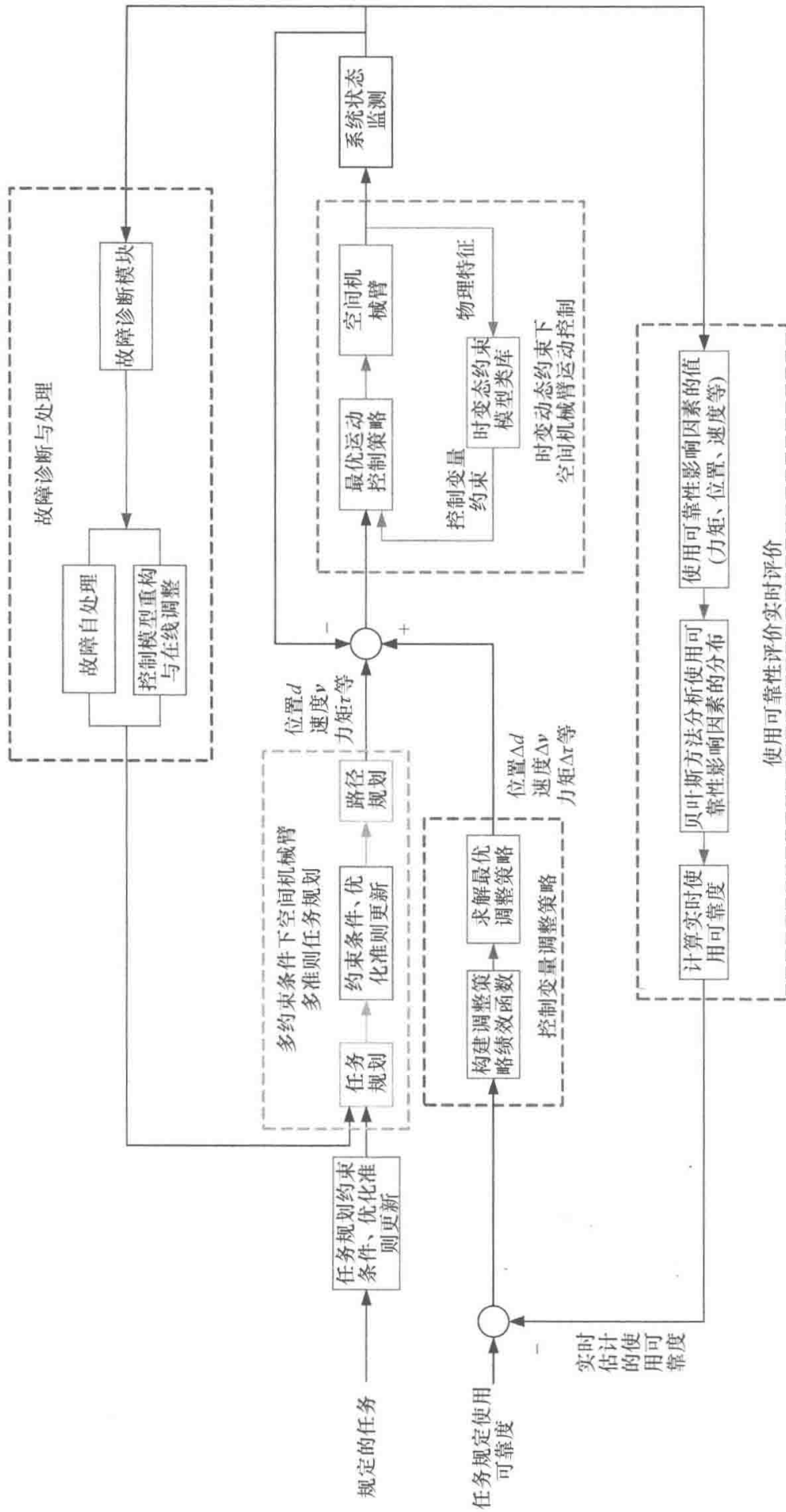


图 1-1 使用可靠性控制模型框图

本节建立的使用可靠性控制系统模型首先在任务规划中考虑执行任务代价最小,得出最优且可行的规划方案;其次在任务的执行过程中,考虑系统自身误差和环境的干扰,采取控制变量调整策略,使执行结果与规划方案相符的概率最大化。通过以上两个方面能够保证执行任务代价最小下的完成任务概率最大化,提高机械臂的使用可靠性。

根据空间机械臂在轨应用需求,可以将其在轨服务任务划分为四类典型任务,即转移任务、搬运任务、捕获任务和装配任务。更复杂的任务由这四类典型任务构成。下面以转移任务为例说明使用可靠性控制方法的实现过程。转移任务是指机械臂无负载时两构型之间的过渡运动,主要服务于机械臂从压紧态的展开,执行任务前的构型预调整,任务完成后机械臂的回撤等事件。影响转移任务成功的指标只有末端位置精度,典型控制变量为机械臂各关节的角度。

在任务执行过程中,通过传感器获得各个关节的角度信息,根据 DH 参数及坐标系之间的变换关系有坐标系 $\{i\}$ 相对于坐标系 $\{i-1\}$ 的连杆变换矩阵 ${}^{i-1}_i\mathbf{T}$ 的一般表达式,即

$${}^{i-1}_i\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \sin\alpha_{i-1} & -d_i \sin\alpha_{i-1} \\ \sin\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & d_i \cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

末端连杆坐标系 $\{n\}$ 相对于坐标系 $\{0\}$ 的变换矩阵为

$${}^0_n\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} {}^1_2\mathbf{T} {}^2_3\mathbf{T} \dots {}^{n-1}_n\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^0_n\mathbf{R} & {}^0_n\mathbf{P} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

位置矢量 \mathbf{P} 表示末端连杆的位置,旋转矩阵 $\mathbf{R} = [\mathbf{n} \ \mathbf{o} \ \mathbf{a}]$ 代表末端连杆的方位。由此建立末端连杆的位姿与关节角之间的关系,得到末端位置在基坐标系中的坐标表示,即

$$\mathbf{r}_o = {}^0\mathbf{P}^T = (d_x d_y d_z)^T \quad (1-8)$$

由机械臂的任务规划和路径规划算法得到机械臂运动过程中每个阶段的目标末端位置 \mathbf{r}_t 。用 \mathbf{y} 表示机械臂末端位置误差的观测值;用 $\boldsymbol{\theta}$ 表示机械臂末端误差的实际值,即

$$\mathbf{y} = \mathbf{r}_o - \mathbf{r}_t \quad (1-9)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{r}_r - \mathbf{r}_t \quad (1-10)$$

其中, \mathbf{r}_o 为由传感器检测到的关节角经运动学正解得到的末端位置; \mathbf{r}_r 为机械臂实际的末端位姿。

受限于机械臂各组成部件的加工工艺、装配工艺,以及使用环境中的各类干扰, \mathbf{y} 与 $\boldsymbol{\theta}$ 之间存在噪声,通过传感器测量并计算得到的末端位置误差 \mathbf{y} 并不能反映实际的机械臂的末端执行状态。因此,以 \mathbf{y} 作为训练样本,基于贝叶斯方法估计

参数 θ , 使用估计得到的 θ 根据式(1-5)评价系统当前的使用可靠度。

将系统当前使用可靠度与任务预设的目标使用可靠度比较, 判断系统运行状态的可靠度是否满足任务要求。当可靠度低于任务要求时, 通过控制变量调整策略计算在当前 θ 估计值下末端位置需要调整的量。最后, 通过机械臂运动学反解得到各个关节角的调整量, 并用于机械臂的控制过程修正。

针对机械臂闭环控制系统, 建立以下状态空间方程, 用以描述控制过程, 即

$$\begin{cases} \theta_i = \theta_{i-1} + x_{i-1} \\ y_i = \theta_i + v_i \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (1-11)$$

其中, θ_i 为第 i 周期可靠性影响因素的值, 即第 i 控制周期实际末端位置误差, $\theta_i = (d'_{ix}, d'_{iy}, d'_{iz})^T$; y_i 为第 i 周期可靠性影响因素观测值, 即第 i 控制周期由运动学正解得到的带有噪声的末端位置误差, $y_i = (d_{ix}, d_{iy}, d_{iz})^T$; x_i 为第 i 控制周期计算得到的控制变量调整量, $x_i = (\Delta d_{ix}, \Delta d_{iy}, \Delta d_{iz})^T$; v_i 为观测误差波动, 服从高斯分布 $v_i \sim N(0, \Sigma)$; θ_i, x_i, y_i, v_i 维数均相等。

状态空间方程中某些参数未知, 需要根据任务的进程在线对参数进行估计。根据状态空间方程中各参数的先验分布和每个控制周期检测得到的 y_i 利用贝叶斯公式推导各参数的后验分布。在得到实际末端位置误差 θ_i 的后验分布, 即概率密度函数 $f(\theta_i | y_i)$ 后, 根据式(1-5)计算系统实时使用可靠度。

贝叶斯估计的基本思想是将所有的未知量都当做随机变量, 并结合未知量的认知情况及从实际中得到的数据信息, 利用贝叶斯定理对未知量的值进行估计。利用贝叶斯方法对过程的未知参数向量 θ_i 进行推断, 并据此对过程进行调整。基于此, 假设下面的正态共轭先验模型, 即

$$\theta_0 \sim N_p(\mu_0, \Lambda_0) \quad (1-12)$$

$$y_1 | \theta_0 \sim N_p(\theta_0 + x_0, \Sigma) \quad (1-13)$$

根据贝叶斯方法有

$$p(\theta_0 | y_1) = \frac{p(y_1 | \theta_0)p(\theta_0)}{\int p(y_1 | \theta_0)p(\theta_0)d\theta_0} \quad (1-14)$$

求解得到的 $\theta_0 | y_1$ 分布为

$$\theta_0 | y_1 \sim N_p\left(\frac{\Sigma^{-1}(y_1 - x_0) + \Lambda_0^{-1}\mu_0}{\Sigma^{-1} + \Lambda_0^{-1}}, \frac{\Sigma\Lambda_0}{\Sigma + \Lambda_0}\right) \quad (1-15)$$

由 $\theta_i = \theta_{i-1} + x_{i-1}$, 得

$$\theta_1 | y_1 \sim N_p(\mu_1, \Lambda_1) \quad (1-16)$$

其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_1 &= \boldsymbol{\mu}'_1 + \boldsymbol{x}_0 \\
&= \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}\boldsymbol{\mu}_0}{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}} + \boldsymbol{x}_0 \\
&= \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}(\boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}}
\end{aligned} \tag{1-17}$$

据此迭代得到第 i 控制周期实际末端位置误差 $\boldsymbol{\theta}_i$ 的后验分布, 即

$$\boldsymbol{\theta}_i | \boldsymbol{y}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Lambda}_i) \tag{1-18}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu}_i = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{\Lambda}_{i-1}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_{i-1} + \boldsymbol{x}_{i-1})}{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}_{i-1}^{-1}} \\ \boldsymbol{\Lambda}_i = \frac{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Lambda}_{i-1}}{\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Lambda}_{i-1}} \end{cases} \tag{1-19}$$

第 $i+1$ 控制周期输出值的先验为 $\boldsymbol{y}_{i+1} | \boldsymbol{\theta}_i \sim N_p(\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\Sigma})$ 。

完成第 i 控制周期的调整后, 第 $i+1$ 控制周期 $\boldsymbol{y}_{i+1} | \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i$ 的概率密度函数为

$$p(\boldsymbol{y}_{i+1} | \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i) = \int p(\boldsymbol{y}_{i+1} | \boldsymbol{\theta}_i) p(\boldsymbol{\theta}_i | \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i) d\boldsymbol{\theta}_i \tag{1-20}$$

因此, \boldsymbol{y}_{i+1} 的后验分布 $p(\boldsymbol{y}_{i+1} | \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i)$ 服从正态分布, 即

$$\boldsymbol{y}_{i+1} | \boldsymbol{y}_i \sim N(\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Lambda}_i + \boldsymbol{\Sigma}) \tag{1-21}$$

由式(1-19), 得

$$\boldsymbol{\mu}_i | \boldsymbol{y}_{i-1} \sim N(\boldsymbol{x}_{i-1} + \boldsymbol{\mu}_{i-1}, (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}_{i-1}^{-1})^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\Lambda}_{i-1} + \boldsymbol{\Sigma}) ((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}_{i-1}^{-1})^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})^T) \tag{1-22}$$

根据 1.3 节中对使用可靠性的表述, 第 i 控制周期的实时使用可靠度为实际末端位置误差 $\boldsymbol{\theta}_i$ 的后验分布落在规定精度范围内的概率。根据式(1-18)和式(1-19)可以写出 $\boldsymbol{\theta}_i | \boldsymbol{y}_i$ 的概率密度函数, 即

$$f(\boldsymbol{\theta}_i | \boldsymbol{y}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\boldsymbol{\Lambda}_i}} \exp\left\{-\left[\frac{(\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^2}{2\boldsymbol{\Lambda}_i}\right]\right\} \tag{1-23}$$

规定精度范围 $\boldsymbol{\Theta} = [\boldsymbol{\theta}_{i1}, \boldsymbol{\theta}_{i2}]$, $\boldsymbol{\theta}_{i1}$ 为精度阈值下限, $\boldsymbol{\theta}_{i2}$ 为精度阈值上限。根据式(1-5), 系统当前的使用可靠度为

$$\begin{aligned}
R(\boldsymbol{\Theta}) &= P\{\boldsymbol{\theta}_{i1} \leq \boldsymbol{\theta}_i \leq \boldsymbol{\theta}_{i2}\} \\
&= \int_{\boldsymbol{\theta}_{i1}}^{\boldsymbol{\theta}_{i2}} f(\boldsymbol{\theta}_i | \boldsymbol{y}_i) d\boldsymbol{\theta}_i \\
&= \int_{\boldsymbol{\theta}_{i1}}^{\boldsymbol{\theta}_{i2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\boldsymbol{\Lambda}_i}} \exp\left\{-\left[\frac{(\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^2}{2\boldsymbol{\Lambda}_i}\right]\right\} d\boldsymbol{\theta}_i
\end{aligned} \tag{1-24}$$

由于控制系统中各环节扰动和噪声的存在, 机械臂在运行中实际末端位置处