GAOKAOSHUXUE LING JULI TUPO

金牌

2007年广东高考数学(理科)零距离突破

——专项提高篇(第二轮)



原子能出版社

上海东方激光教育文化有限公司 编

需要全本请到 www.ertongbook.com

2007年广东

高考数学(理科)零距离突破

——专项提高篇(第二轮)

主　编　林爱群

原子能出版社

图书在版编目（CIP）数据

2007年广东高考数学零距离突破．专项提高篇．第二轮 / 林爱群 主编．
——北京：原子能出版社，2007．1
（2007年高考零距离突破）
ISBN 978-7-5022-3838-4

Ⅰ．2… Ⅱ．林… Ⅲ．数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第003532号

内 容 提 要

2007年6月，广东省将进行新教材、新考试方案实施后的第一次高考，为了考生能够更好地把握各学科基础知识和基本技能，提高综合分析能力及应试能力，我们根据“考试大纲”和“新课程标准”编写了《2007年广东高考零距离突破》系列丛书。其中《2007年广东高考数学（理科）零距离突破——专项提高篇（第二轮）》设有“高考最新变化简述”、“相关能力补全训练”、“专项提炼”、“名题热身”等内容，帮助教师和考生迅速把住新高考复习的要点、重点，在较短的时间内对2007年新高考的要旨有所掌握与研究。

2007年广东高考数学(理科)零距离突破——专项提高篇（第二轮）

出版发行	原子能出版社
责任编辑	刘 朔 吴卫华 李盈安
特约编辑	苏宁萍 曹 玉
印 刷	保定市中画美凯印刷有限公司
经 销	全国新华书店
开 本	880mm×1230mm 1/16
字 数	312千字
印 张	13
版 次	2007年1月第1版 2007年1月第1次印刷
书 号	ISBN 978-7-5022-3838-4
定 价	22.00元

如有倒装、印刷质量问题，请打电话：（010）68453556

前　言

从2004年开始，广东省开始实施普通高中课程新标准（简称新课标），2007年的高考则是这种新课标理念学习与指导下的、第一次高考（业内人士称为新高考）。新课标、新高考催生新的备考策略，促使我们不得不将以前的、传统的高考复习的方法与步骤作出适当的调整与改变，把新课标理念下那些已经不太重视或已经淘汰的知识进行有效的删除，增补一些新的知识与技能，目的就是能迅速地与新高考接轨。毫无疑问，作为一名高三的学生或老师迫切期望的不外乎就是："一书一说明"。

"一书"指的就是我们高三的老师与学生比较期盼的、能比较切合自己的实际（教与学）水平与能力的真正的新高考理念指导下的新高考复习用书（特别是高考复习的第二轮用书），同时也比较讨厌那些"为了能迅速占领市场，匆忙将一些自己随意想象甚至更为不负责任的改换名头的'新瓶装旧酒'的复习资料"（摘自资深高三教师语）；"一说明"指的是2007年广东省的高考《考试说明》，有位老师说得好：《2007年普通高等学校招生全国统一考试大纲》（高等教育出版社出版）就好像是一部"国家法律"文本，而《2007年广东省高考考试说明》就是一部"地方法律"文本，意欲在2007年的高考复习中取得积极主动甚至立于不败之地，我们就得在读懂"国家法律"的基础上，认真地研读与实施"地方法律"。

行路难，行路难，多歧路，今安在？

忽如一夜春风来，千树万树梨花开！

《2007年全国高等学校招生考试大纲说明（广东卷）》已隆重登场。《2007年广东高考数学零距离突破》（第二轮）也由教育图书出版物享有盛誉的原子能出版社出版并面向广东省全面发行。

统揽一下，《2007年广东高考数学零距离突破》（第二轮）有以下几个明显特点：

一、该书的谋篇与布局都是力求切合广东学生的实际水平，为广东高考服务。它是由广东省的高三教师结合"国家法律"与"地方法律"，运用自己几十年的高考体会与学习积累，亲自编写，并得到许多权威、同仁的帮助与修改。

初稿期还有目的的让高三学生阅读其中的部分内容，在得到学生的反馈意见进行修改后，交由原子能出版社出版发行。

二、该书为广东省中等水平的高考考生而设计，向中等以下水平的高考考生覆盖，向中等稍上的高考考生兼顾。书中所叙述的内容由浅入深，精讲精析精练。

三、理清新课标、新考纲中“新”，找新高考与此前高考的“异”，号准新高考的脉，定好新高考第二轮复习的弦，力争使用此书的高三莘莘学子在新高考中拿到高分。

四、《2007年广东高考数学零距离突破——专项提高篇》一书分为文科和理科两本书，本书为理科类用书。本书在“专题复习”中设有“高考最新变化简述”、“相关能力补全训练”、“专项提炼”、“名题热身”等内容，这是目前高三复习用书中含金量较大的地方。其目的就是为了帮助教师迅速把住新高考复习的要点、重点。即使是高三新接手的教师也能在一个较短的时间内对2007年的新高考由比较熟悉到相当的掌握与研究的程度，从而进行更加有针对性的第二轮复习。

五、结合第二轮复习的特点，《2007年广东高考数学零距离突破——专项提高测试卷》配有相当全面的“专题测试”、“专项提高测试”、“综合测试”，都是结合新课标、新高考的要求，通过对“国家法律”、“地方法律”的认真解读后，编写而成的，大大地减少了教师与学生的复习的盲目性，在惜时胜金的眼前，确实是一本好书。

本书由林爱群主编。由于时间仓促，书中难免存在不足和疏漏之处，敬请广大读者给予批评指正，以便再版时修订。

《高考零距离丛书》编写组

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目　录

第一部分　专题复习

专题一　函数与方程的思想方法 …… 1

课题　基本初等函数Ⅰ与方程的思想方法 …… 1

一、变化迁移与能力补全 …… 1

高考最新变化简述 …… 1

相关能力补全训练 …… 1

二、常规复习 …… 2

(一)专项提炼 …… 2

课标点津 …… 2

要点要析 …… 2

策略点击 …… 2

高考失分点 …… 2

经典例说 …… 2

(二)名题热身 …… 4

专题二　数形结合的思想方法 …… 5

课题1　平面向量中的数形结合思想方法 …… 5

一、变化迁移与能力补全 …… 5

高考最新变化简述 …… 5

相关能力补全训练 …… 5

二、常规复习 …… 6

(一)专项提炼 …… 6

课标点津 …… 6

要点要析 …… 6

策略点击 …… 6

高考失分点 …… 6

经典例说 …… 6

(二)名题热身 …… 7

课题2　线性规划中的数形结合思想方法 …… 8

一、变化迁移与能力补全 …… 8

高考最新变化简述 …… 8

相关能力补全训练 …… 9

二、常规复习 …… 9

(一)专项提炼 …… 9

课标点津 …… 9

要点要析 …… 9

策略点击 …… 9

高考失分点 …… 9

经典例说 …… 9

(二)名题热身 …… 11

专题三　分类讨论的思想方法 …… 13

课题1　基本初等函数分类讨论的思想方法 …… 13

常规复习 …… 13

(一)专项提炼 …… 13

课标点津 …… 13

要点要析 …… 13

策略点击 …… 13

高考失分点 …… 13

经典例说 …… 13

(二)名题热身 …… 18

课题2　其他分类讨论的思想方法 …… 19

常规复习 …… 19

(一)专项提炼 …… 19

课标点津 …… 19

要点要析 …… 19

策略点击 …… 19

高考失分点 …… 20

经典例说 …… 20

(二)名题热身 …… 22

专题四　化归与等价变换的思想方法 …… 24

课题1　集合与常用逻辑用语的化归与等价变换 …… 24

一、变化迁移与能力补全 …… 24

高考最新变化简述 …… 24

相关能力补全训练 …… 24

二、常规复习 …… 25
(一)专项提炼 …… 25
课标点津 …… 25
要点要析 …… 25
策略点击 …… 25
高考失分点 …… 25
经典例说 …… 25
(二)名题热身 …… 27
课题2 基本初等函数Ⅰ的化归与等价变换 …… 28
一、变化迁移与能力补全 …… 28
高考最新变化简述 …… 28
相关能力补全训练 …… 28
二、常规复习 …… 29
(一)专项提炼 …… 29
课标点津 …… 29
要点要析 …… 29
策略点击 …… 29
高考失分点 …… 29
经典例说 …… 29
(二)名题热身 …… 31
课题3 基本初等函数Ⅱ的化归与等价变换 …… 33
一、变化迁移与能力补全 …… 33
高考最新变化简述 …… 33
相关能力补全训练 …… 33
二、常规复习 …… 34
(一)专项提炼 …… 34
课标点津 …… 34
要点要析 …… 34
策略点击 …… 34
高考失分点 …… 34
经典例说 …… 34
(二)名题热身 …… 37
课题4 计数原理、二项式定理的化归与等价变换 …… 38
一、变化迁移与能力补全 …… 38
高考最新变化简述 …… 38
相关能力补全训练 …… 39
二、常规复习 …… 39
(一)专项提炼 …… 39
课标点津 …… 39
要点要析 …… 39
策略点击 …… 39
高考失分点 …… 39
经典例说 …… 40
(二)名题热身 …… 42
课题5 复数中的化归与等价变换 …… 42
一、变化迁移与能力补全 …… 42
高考最新变化简述 …… 42
相关能力补全训练 …… 43
二、常规复习 …… 43
(一)专项提炼 …… 43
课标点津 …… 43
要点要析 …… 43
策略点击 …… 43
高考失分点 …… 43
经典例说 …… 43
(二)名题热身 …… 45
专题五 最值问题 …… 47
课题 最值问题 …… 47
一、变化迁移与能力补全 …… 47
高考最新变化简述 …… 47
相关能力补全训练 …… 47
二、常规复习 …… 48
(一)专项提炼 …… 48
课标点津 …… 48
要点要析 …… 48
策略点击 …… 48
高考失分点 …… 48
经典例说 …… 49
(二)名题热身 …… 51
专题六 数列的综合 …… 53
课题 数列综合 …… 53
一、变化迁移与能力补全 …… 53
高考最新变化简述 …… 53
相关能力补全训练 …… 53
二、常规复习 …… 54

(一)专项提炼 …… 54
课标点津 …… 54
要点要析 …… 54
策略点击 …… 54
高考失分点 …… 54
经典例说 …… 54
(二)名题热身 …… 57
专题七 直线与圆的方程 …… 59
课题 直线与圆的方程 …… 59
一、变化迁移与能力补全 …… 59
高考最新变化简述 …… 59
相关能力补全训练 …… 59
二、常规复习 …… 60
(一)专项提炼 …… 60
课标点津 …… 60
要点要析 …… 60
策略点击 …… 60
高考失分点 …… 60
经典例说 …… 60
(二)名题热身 …… 63
专题八 应用性问题 …… 65
课题1 概率与统计的应用问题 …… 65
一、变化迁移与能力补全 …… 65
高考最新变化简述 …… 65
相关能力补全训练 …… 65
二、常规复习 …… 66
(一)专项提炼 …… 66
课标点津 …… 66
要点要析 …… 66
策略点击 …… 66
高考失分点 …… 66
经典例说 …… 66
(二)名题热身 …… 69
课题2 函数、数列的应用问题 …… 72
一、变化迁移与能力补全 …… 72
高考最新变化简述 …… 72
相关能力补全训练 …… 72
二、常规复习 …… 72
(一)专项提炼 …… 72
课标点津 …… 72
要点要析 …… 73
策略点击 …… 73
高考失分点 …… 73
经典例说 …… 73
(二)名题热身 …… 76
专题九 探索性问题 …… 79
课题1 函数、数列中的探索性问题 …… 79
常规复习 …… 79
(一)专项提炼 …… 79
课标点津 …… 79
要点要析 …… 79
策略点击 …… 79
高考失分点 …… 79
经典例说 …… 79
(二)名题热身 …… 83
课题2 圆锥曲线中的探索问题 …… 85
常规复习 …… 85
(一)专项提炼 …… 85
课标点津 …… 85
要点要析 …… 85
策略点击 …… 86
高考失分点 …… 86
经典例说 …… 86
(二)名题热身 …… 90
专题十 立体几何问题 …… 93
课题 立体几何问题 …… 93
一、变化迁移与能力补全 …… 93
高考最新变化简述 …… 93
相关能力补全训练 …… 93
二、常规复习 …… 94
(一)专项提炼 …… 94
课标点津 …… 94
要点要析 …… 94
策略点击 …… 94
高考失分点 …… 94
经典例说 …… 94
(二)名题热身 …… 98

专题十一　推理与证明问题 …… 101
课题　推理与证明 …… 101
一、变化迁移与能力补全 …… 101
高考最新变化简述 …… 101
相关能力补全训练 …… 101
二、常规复习 …… 102
(一)专项提炼 …… 102
课标点津 …… 102
要点要析 …… 102
策略点击 …… 102
高考失分点 …… 102
经典例说 …… 102
(二)名题热身 …… 103
专题十二　算法初步问题 …… 106
课题　算法初步 …… 106
一、变化迁移与能力补全 …… 106
高考最新变化简述 …… 106
相关能力补全训练 …… 106
二、常规复习 …… 106
(一)专项提炼 …… 106
课标点津 …… 106
要点要析 …… 106
策略点击 …… 107
高考失分点 …… 107
经典例说 …… 107
(二)名题热身 …… 109
第二部分　方法指导与综合训练
专题十三　选择与填空题的解题方法 ……
…… 112
课题　选择与填空题的解题方法 …… 112
解题方法 …… 112
例题选讲 …… 112
课堂练习 …… 115
能力训练 …… 116
拓展思维 …… 116
高考真题导析 …… 116
专题十四　综合型问题的解题方法 …… 119
课题　综合型问题的解题方法 …… 119
解题方法 …… 119
例题选讲 …… 120
课堂练习 …… 123
能力训练 …… 123
拓展思维 …… 124
高考真题导析 …… 125
专题十五　高中数学重要基础知识记忆方法 ……
…… 128
课题　高中数学重要基础知识记忆诀窍 ……
…… 128
一、集合 …… 128
二、基本初等函数Ⅰ …… 128
三、基本初等函数Ⅱ …… 129
四、立体几何初步 …… 130
五、平面解析几何初步 …… 131
六、算法初步(这是新课标新增加的内容) ……
…… 132
七、统计 …… 133
八、概率 …… 133
九、平面向量 …… 133
十、三角恒等变换 …… 133
十一、解三角形 …… 133
十二、数列 …… 134
十三、不等式 …… 134
十四、常用逻辑用语 …… 134
十五、圆锥曲线与方程 …… 134
十六、空间向量与立体几何 …… 135
十七、导数及其应用 …… 135
十八、推理与证明 …… 135
十九、复数 …… 135
二十、计数原理 …… 135
二十一、概率与统计 …… 135
专题十六　高考压轴问题选讲 …… 136
课题　高考压轴题回顾与展望 …… 136
一、高考压轴题回顾与分析 …… 136
二、2007 年高考压轴题展望与预测 …… 141
课堂练习 …… 146
参考答案 …… 148



第一部分　专题复习

专题一　函数与方程的思想方法

课题　基本初等函数Ⅰ与方程的思想方法

一、变化迁移与能力补全

【高考最新变化简述】

1. 与2006年考试说明对比，2007年的考试大纲特别新增加了“函数与方程”的专项要求与具体解读.

2. 提出了函数“零点”的概念.

3. 提出了“二分法”的解题思想.

(一)考试能力层级变化是：

1. 结合二次函数的图像，了解函数的零点与方程根的联系，判断一次方程方程根的存在性及根的个数.

2. 根据具体的函数图像，能够用二分法求相应方程的近似解.

(二)知识的迁移体现在：

1. 将函数与横轴的交点与方程的根(或解)从存在性的探索到一一具体地将它们求出都有要求，可以理解为从以前的只能探索存在性迁移到现在的具体一一求出.

2. 突出强调“二分法”应用在具体函数图像上求方程的近似解，这样就大大地提高了我们能够求某些方程近似解的可能.

(三)针对这些变化，我们的应对策略是：

1. 首先必须熟练掌握二次函数(及其图像)、一元二次方程、一元二次不等式的内在联系与灵活转换，做到得心应用，运用自如.

2. 加强对“二分法”概念的理解，并能熟练地运用“二分法”求解具体函数的“零点”.

3. 注意掌握与熟练运用“二分法”思想在求解方程近似解的时候满足题目要求的精度，从而正确地找到近似解.

【相关能力补全训练】

1. 函数 $f(x)=x^2-3x+2$ 的零点为　(　)

A. 1或2　　B. 1

C. 2　　D. 0

2. 函数 $f(x)=3x^3-x-1$ 的零点所在的区间可能是　(　)

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$

C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

3. 已知函数 $f(t)=mt^2+t-1$ 有且只有一个零点，求实数 m 的取值范围.

4. 试判断函数 $f(x)=x^3+x^2+2$ 在区间$[-1,1]$上是否有零点.

5. 用“二分法”求方程 $x^3-3x+1=0$ 的一个正数的近似解(精确到0.1)

二、常规复习

(一)专项提炼

【课标点津】 新课标在关于“函数与方程”的要求是:“①结合二次函数的图像,判断一元二次方程根的存在性及根的个数,从而了解函数的零点与方程根的联系.②根据具体函数的图像,能够借助计算器用二分法求相应方程的近似解.了解这种方法是求方程近似解的常用方程.”

分析的结果就是要求我们掌握二次函数与二次方程的内在联系与互化;对函数的“零点”、方程的“根”的存在与否,具体大小能够一一求解.

【要点要析】

要求:①掌握求函数零点及所在区间的方法:“零点定理”;②能够用“二分法”求方程的近似解.

重点:掌握求函数零点及所在区间的方法.

难点:①“二分法”求近似解的起始区间和最后近似解的确定;②“零点定理”的正确理解与灵活运用.

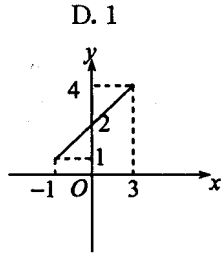
【策略点击】 在解决有关求函数零点问题时,技巧就是区间在区间(a,b)两端的函数值相反的原则.在用“二分法”求方程近似解的问题时,策略有二:一是运算要仔细,二是密切注意题目要求的精确度.

【高考失分点】 ①计算出错失分;②“零点定理”中的函数的“连续”要求.

【经典例说】

【例一】 (2006年广东卷,7)函数$y=f(x)$的反函数$y=f^{-1}(x)$的图像与y轴交于点$P(0,2)$(如图像)则方程$f(x)=0$在$[1,4]$上的根是$x=$(　　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1



【典例剖析】 这道选择题要考查的知识就是关于函数与方程思想方法.试题的特点是从函数与其反函数的对称性关系出发向方程过渡,连接的纽带是函数的点与方程的根.体现2006年《考试说明》中“互为反函数的函数图像间的关系”的具体表象,尽管函数与方程在2006年《考试说明》中没有作硬性的、条文式的规定,但此题的出现彰显函数与方程思想的重要性.

【思考感悟】 此类题的解题思路要从“互为反函数的函数图像间的关系”出发,它们关于直线$y=x$对称,由方程的解就是图像与x轴的交点的思想方法解决问题.一般解法是找到反函数过的点,再过渡到方程的解.解这种题目的规律是不用求其反函数,直接得出原函数经过的点即可得出结果.高考的命题趋势是不必用繁琐的运算量,重点考查函数性质的灵活运用,达到解决问题的目的.

【答案参考】

解:函数$y=f(x)$过点$P'(2,0)\Rightarrow f(2)=0$,所以选C.

【例二】 (2005年广东卷,19)设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上满足$f(2-x)=f(2+x)$,$f(7-x)=f(7+x)$,且在闭区间$[0,7]$上,只有$f(1)=f(3)=0$.(1)试判断函数的奇偶性;(2)试求方程$f(x)=0$在闭区间$[-2005,2005]$上的根的个数,并证明你的结论.

【典例剖析】 这道综合解答题要考查的知识点是函数与方程思想方法.试题的特点是从函数的周期性、对称性去解决奇偶性和方程的根的问题.一般的解法是由依据奇偶性的特征去判断奇偶性,由周期性去由某个区间的根判断其他区间的根.体现2006年《考试说明》中“函数、函数的单调性、奇偶性”的具体表现,由于是综合型问题,所以题目涵盖知识面较广,难度较大.

【思考感悟】 此类题的解题思想依据已知条件去“翻译”,再联想问题的最终目的所在.一般的解法是先“翻译”条件,条件“联想”,进一步调整到结论.解这种题目的规律是先充分挖掘已知条件的转化、渠道,“翻译”成数学语言,由这些“翻译”的语言进行联想,向结论靠拢.高考的命题趋势是一些条件“粉饰”登场,结论若隐若现.必须经过多重转化,更为关键的是知识点间的灵活转换.

【答案参考】

解:(1)$\left.\begin{matrix}f(2-x)=f(2+x)\\f(7-x)=f(7+x)\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x)$的对称轴为$x=2$和$x=7$.

$$\left.\begin{matrix}f(2-x)=f(2+x)\\f(7-x)=f(7+x)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}f(x)=f(4-x)\\f(x)=f(14-x)\end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow f(4-x)=f(14-x)\Rightarrow f(x)=f(x+10)$

$\therefore y=f(x)$的周期$T=10$.

又$\because f(3)=0\Rightarrow f(-3)=f(-3+10)=f(7)\neq 0\Rightarrow f(3)\neq f(-3)$,$f(3)\neq -f(-3)$

$\therefore f(x)$不具有奇偶性,是非奇非偶函数

需要全本请访问 www.ertongbook.com

(2)∵$f(x)$在$[0,7]$上只有1,3两个根，

即$\begin{cases}f(1)=0\\f(3)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(11)=0\\f(13)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(-9)=0\\f(-7)=0\end{cases}$

表明$f(x)$在$[0,10]$，$[-10,0]$上各有两个不同解，则$f(x)$在$[0,2005]$上有402个解，在$[-2005,0]$上有400个解，若$y=f(x)$在$[-2005,2005]$上共有802个解.

【例三】 (2004年广东卷,21)设函数$f(x)=x-\ln(x+m)$，其中常数m为整数.(Ⅰ)当m为何值时，$f(x)\geqslant 0$.(Ⅱ)定理：若函数$g(x)$在$[a,b]$上连续，且$g(a)$与$g(b)$异号，则至少存在一点$x_0\in(a,b)$使$g(x_0)=0$.试用上述定理证明：当整数$m>1$时，方程$f(x)=0$在$[e^{-m}-m,e^{2m}-m]$内有两个实根.

【典例剖析】 这道综合解答题要考查的知识是函数、不等式、方程的思想，试题的最大特点是在考生未知“零点定理”的基础上，题目当场作个表述，要求考生现学现用，一般这种“现学现用”都是由现有的知识作一点外延，这也进一步说明命题的方向是想将试题在函数与方程思想方面作个提升.

【思考感悟】 此类题的解题思路和一般解法就是对题目中当场作的表述进行逐字逐句斟酌，找出关键词，列出已知，结论，表面看来，较难，是要求短时间内，掌握一个新知识，但带有极强的规律，就是替换和转移，比如此题，$g(x)$就是换$f(x)$，区间$[a,b]$就是转移为$[e^{-m}-m,e^{2m}-m]$.相信这种命题趋势还会延伸.尤其是新课标中那些未穷尽的知识点的外延.

【答案参考】

解：(Ⅰ)函数$f(x)=x-\ln(x+m)$.$[x\in(-m,+\infty)]$上连续，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x+m}$，令$f'(x)=0$，

$\therefore x=1-m$，即当$x\in(-m,1-m)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数、$f(x)>f(1-m)$.

当$x\in(1-m,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数，$f(x)>f(1-m)$，且$f(1-m)=1-m$为极小值，而且对$x\in(-m,+\infty)$都有$f(x)\geqslant f(1-m)=1-m$.故当$m\leqslant 1(m\in\mathbf{Z})$时，$f(x)\geqslant 1-m\geqslant 0$.

(Ⅱ)证明：由(Ⅰ)$\Rightarrow m>1(m\in\mathbf{Z})$时，$f(1-m)=1-m<0$，函数$f(x)$在$[e^{-m}-m,1-m]$上为连续函数，而$f(e^{-m}-m)=e^{-m}-m-\ln(e^{-m}-m+m)=e^{-m}>0$　即$m>1$时，$f(e^{-m}-m)$与$f(1-m)$异号，由已知条件知：在$(e^{-m}-m,1-m)$内，存在唯一的$x_1\in(e^{-m}-m,1-m)$使$f(x_1)=0$.

注意到$f(e^{2m}-m)=e^{2m}-3m>(1+1)^{2m}-3m>1+2m+\dfrac{2m(2m-1)}{2}-3m>0(m>1,m\in\mathbf{Z})$不难发现$f(x)$在$[1-m,e^{2m}-m]$上为连续增函数，且$f(1-m)$与$f(e^{2m}-m)$异号，$\therefore$存在$x_2$，且$x_2\in(1-m,e^{2m}-m)$，使$f(x_2)=0$.综上，命题成立.

【例四】 [2006年福建卷(文),21]已知$f(x)$是二次函数，不等式$f(x)<0$的解集为$(0,5)$，且$f(x)$在区间$[-1,4]$上的最大值是12.(Ⅰ)求$f(x)$的解析式；(Ⅱ)是否存在自然数m，使得方程$f(x)+\dfrac{37}{x}=0$在区间$(m,m+1)$内有且只有两个不等的实数根？若存在，求出所有m的值；若不存在，说明理由.

(注：这道题目的考试要求与【例二】【例三】大同小异，在此不再赘述.)

【答案参考】

解：(Ⅰ)可设$f(x)=ax(x-5)(a>0)$，$\therefore f(x)$在$[-1,4]$上的最大值是$f(-1)=6a=12$，$\therefore a=2$，即$f(x)=2x^2-10(x\in\mathbf{R})$　(Ⅱ)$f(x)+\dfrac{37}{x}=0\Rightarrow 2x^3-10x^2+37=0$.设$g(x)=2x^3-10x^2+37$，$\therefore g'(x)=6x^2-20x=2x(3x-10)$

(Ⅱ)$f(x)+\dfrac{37}{x}=0\Rightarrow 2x^3-10x^2+37=0$，

当$x\in(0,\dfrac{10}{3})$时，$g'(x)<0$，$g(x)$为减函数，且

$g(3)=1>0$，$g(\dfrac{10}{3})=-\dfrac{1}{27}<0$

当$x\in(\dfrac{10}{3},+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$为增函数，且$g(4)=5>0$.

$\therefore$方程$2x^3-10x^2+37=0$在$(3,\dfrac{10}{3})$，$(\dfrac{10}{3},4)$内分别有惟一实数根，而在$(0,3)$，$(4,+\infty)$上无实数根，即存在惟一的实数$m=3$，满足题意.

【例五】 若函数$f(x)=x^2+(m+1)x+1$在区间$[0,2]$上有两个不同的零点，求实数m的取值范围.

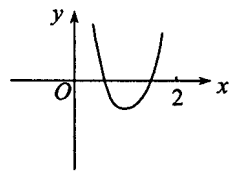
【典例剖析】 这道简答题要考查关于函数零点知识.试题的特点是将新课标知识替换以前的知识，突出强调新课标.

【思考感悟】 此类题的解题思路和一般解法是由函数的零点范围，找到函数图像与x轴交点范围.再由二次函数的图像的确定要素找到m的取

值范围. 这种题目的规律将二次函数的图像与函数零点相结合. 高考的命题趋势就是这种知识的替换与嫁接.

【答案参考】

解:如图,可知:



$$\begin{cases}\Delta=(m+1)^2-4>0\\ 0<-\dfrac{m+1}{2}<2\\ f(0)\geqslant 0\\ f(2)\geqslant 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m>1 \text{ 或 } m<-3\\ -5<m<-1\\ m\geqslant -7\end{cases}\Rightarrow -5<m<-1$$

$\therefore(-5,-1)$即为所求 m 的取值范围.

(二)名题热身

1. 三个函数 $f(x)=2^x+x$,$g(x)=\log_{\frac{1}{2}}x-x$,$h(x)=\ln x-x$ 的零点分别是 a,b,c,用"<"将这三个数 a,b,c 连接起来的结果是_____.

2. 若 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$,则函数 $g(x)=f(4x)-x$ 的零点是_____.

3. $f(x)$是定义在 **R** 上的以 3 为周期的偶函数,且 $f(2)=0$,则方程 $f(x)=0$ 在区间(0,6)内解的个数的最小值是 (　　)

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

4. 函数 $y=\ln x-\dfrac{2}{x}$的零点所在的大致区间为 (　　)

A. (1,2)　　B. (2,3)

C. $(1,\dfrac{1}{e})$　　D. $(e,+\infty)$

5. 已知函数 $f(x)=x^2+(m-2)x+5-m$ 的零点都大于 2,则 m 的取值范围是 (　　)

A. $(-5,-4]$

B. $(-\infty,-4]$

C. $(-\infty,-2)$

D. $(-\infty,-5)\cup(-5,-4]$

6. 函数 $f(x)=ax^2+2x+1$,$(a\neq 0)$有一个正数零点和一个负数零点的充分不必要条件是 (　　)

A. $a<0$　　B. $a>0$

C. $a<-1$　　D. $a>1$

7. 若 $f(x)$和 $g(x)$都是定义在实数集 **R** 上的函数且函数 $h(x)=f[g(x)]-x$ 有零点,则 $g[f(x)]$不可能是 (　　)

A. $x^2+x-\dfrac{1}{5}$　　B. $x^2+x+\dfrac{1}{5}$

C. $x^2-\dfrac{1}{5}$　　D. $x^2+\dfrac{1}{5}$.

8. 求方程 $x^3-x-1=0$,在区间(0,2)上的近似解(精确到 0.1)

9. 若 $a>1$,求证:函数 $f(x)=\dfrac{(a^x+1)x+a^x-2}{x+1}$无负数零点.

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c,(x\leqslant 0)\\ 2\quad\quad,(x>0)\end{cases}$,若 $f(-4)=f(0)$,$f(-2)=-2$,求函数 $g(x)=f(x)-x$ 的零点个数.

11. 已知 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$,$p\in\mathbf{R}$ 且 $f(p)<0$,试判断函数 $g(t)=t^2-2t+5-p^2$ 有无零点.

12. 已知二次函数 $y=f_1(x)$的图像的原点为顶点且过点(1,1),反比例函数 $y=f_2(x)$的图像与直线 $y=x$ 的两个交点间距离为 8,$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,(1)求函数 $f(x)$的表达式.

(2)证明当 $a>3$ 时,函数 $g(x)=f(x)-f(a)$有三个零点.

专题二　数形结合的思想方法

课题 1　平面向量中的数形结合思想方法

一、变化迁移与能力补全

【高考最新变化简述】

1. 与 2006 年考试说明对比，2007 年的考试大纲特别强调了：掌握向量数乘的意义，理解两个向量共线的含义.

2. 了解向量线性运算的性质及其几何定义.

(一)考试能力层级变化是：

1. 由“掌握向量的几何表示”到理解向量的几何表示.

2. 掌握向量加法、减法的运算并理解其几何定义.

3. 会用向量方法解决简单的平面几何问题.

(二)知识的迁就体现在：

1. 向量加法、减法、数乘的代数意义与几何定义相结合，这是一个知识的交汇点.

2. 突出地强调“向量的线性运算”，将平面向量的基本定理提升至较高地位.

(三)针对这些变化，我们的应对策略是：

1. 必须对向量运算如加法、减法、数乘的代数定义运用自如；

2. 必须对向量运算加法、减法、数乘的几何定义熟练掌握；

3. 应用数形结合的方法将二者有机结合，从而解决问题.

【相关能力补全训练】

1. 当 $|a|=|b|\neq 0$，且 a、b 不共线时，$a+b$ 与 $a-b$ 的关系是_____.

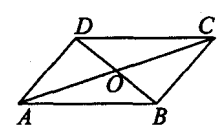
2. 已知 $|a|=3$，$|b|=4$，求 $|a-b|$ 的范围.

3. 讨论 $|a-b|$ 与 $|a|$，$|b|$ 的和(或差)的模的大小关系.

4. 证明对角线互相平分的四边形是平行四边形.

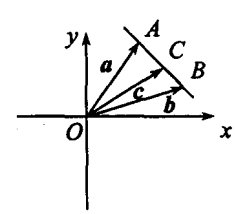
已知：AC、BD 是四边形 $ABCD$ 的两条对角线，且 AC 与 BD 互相平分(如图)

求证：$ABCD$ 是一个平行四边形



第 4 题图

5. 如图，已知 $\overrightarrow{OA}=a$，$\overrightarrow{OB}=b$，$\overrightarrow{OC}=c$，点 A、B 互异，A、B、C 共线，求证：存在实数 λ，μ 使 $c=\lambda a+\mu b$，且 $\lambda+\mu=1$.



第 5 题图

二、常规复习

(一)专项提炼

【课标点津】 ①新课标在关于“向量的应用”方面要求体会向量是一种处理几何问题的工具,发展运算能力.②新课标要求我们了解向量的线性运算性质及其几何意义.

分析的结果就是要求我们掌握向量的数形结合的能力.

【要点要析】

要点:①掌握向量的线性运算性质及其几何定义;②对几何问题能够用向量的方法解决.

重点:掌握向量的线性运算性质及其几何定义.

难点:对几何问题,用向量的方法去解决时,向量的选择切入点的把握.

【策略点击】 ①牢固把握 $a,b,a\pm b$ 构造的平行四边形的框架,利用平面几何的知识(如菱形的对角线互相垂直、平分等)进行有的放矢;②对平面几何问题中的几点共线,某点在某线上的问题,要能及时有效地转化为向量平行(或共线)问题,从而数形结合.

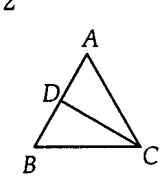
【高考失分点】 以往的考生在平面向量的问题解答时,都有较多的失分,主要表像为:①向量的规范写法,书写体与印刷体的区别.②数乘与数量本质的区别:一个是向量,一个是数量.③向量与向量的积与数与数的积的区别:$a\cdot b$ 与 ab.

【经典例说】

【例一】 (2006 年广东卷,4)如图所示,D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中点,则向量 $\overrightarrow{CD}=$ (　　)

A. $-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　　B. $-\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

C. $\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　　D. $\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$



【典例剖析】 这道选择题要考查的知识就是向量在平面几何中的应用.试题的特点是给定要寻找的目标向量及所求的向量,即 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{BA}$ 间的关系.体现考试大纲中要求考生会用向量解平面几何问题,可以得出这种命题的方向是较简单化.

【思考感悟】 此类题的解题思路要从“向量在平面几何中的应用”出发,找准是向量在平面几何中的应用,要在平面几何问题中找准向量的“切入点”.当然,解题的前提是对向量的线性运算相当熟悉.一般解法对于加法要“首尾相连”如“$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$”,对于减法是“连接终点,并指向被减.”这种题目的规律性较强:题目都会有极大的提示性,切入点并不难找到.高考的命题趋势是图形不一定会很复杂,但要“加法、减法”综合运算.

【答案参考】

解:$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$,∴选 A.

【例二】 (2005 年广东卷,12)已知向量 $a=(2,3)$,$b=(x,6)$,且 $a\parallel b$,则 $x=$_____.

【典例剖析】 这道填空题考查的知识是向量的线性运算,试题的特点是用坐标表示的两个向量平行,求其中的某个坐标属容易题,体现的命题方向是了解向量运算的性质及其几何意义,由于题目较易,所以在解答时,不必牵强附会地用数形结合,也就是作图,再思考,而是直接运用向量平行的结果,解之.

【思考感悟】 此类题的解题思路是要分清用坐标表示的向量和一般向量表示时平行向量的结论,不可混淆.一般解法是灵活运用:$a\parallel b\Rightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$,可适当考虑:“$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$”,会提高解题速度,高考的命题趋势是平行与垂直,坐标与平面几何交互出现,所以我们要“见一思三”.

【答案参考】

解:∵$a\parallel b$,∴$\frac{2}{x}=\frac{3}{6}\Rightarrow x=4$,∴填 4.

【例三】 (2004 年广东卷,1)已知平面向量 $a=(3,1)$,$b=(x,-3)$,且 $a\perp b$,则 $x=$ (　　)

A. 3　　B. 1　　C. -1　　D. -3

【典例剖析】 这道题在命题形式略有改变是一道选择题,其他各方面都与例二类似,在此不再赘述.

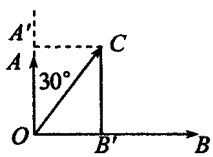
【答案参考】

解:$3x+1\cdot(-3)=0\Rightarrow x=1$,∴选 B.

【例四】 (2006 福建卷,11)已知 $|\overrightarrow{OA}|=1$,$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,点 C 在 $\angle AOB$ 内,且 $\angle AOC=30°$,设 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}(m,n\in\mathbf{R})$,则 $\frac{m}{n}=$_____.

A. $\frac{1}{3}$　　B. 3　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

【典例剖析】 这道选择题考查的知识是向量的线性运算，试题的特点是用向量的表述构画出平面几何图形，题目考查的知识面较广，体现高考题命题方向的知识的综合性.



【思考感悟】 此类题的解题思路是在作出合乎题意的平面几何图形后，注意考虑题目所求的 m,n 的几何意义. 一般解法是由模推出线段长，由数量积推导向量(线段)的位置关系，由线性运算过渡到数形结合. 高考命题趋势是考查相关知识的全面性，特别是较综合性的问题.

【答案参考】

解：过 C 作 $CA'\perp OA$ 于 A'，过 C 作 $CB'\perp OB$ 于 $B'\Rightarrow|\vec{OA'}|=m,|\vec{OB'}|=n\sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{l}\because\vec{OA}\perp\vec{OB}\\ \angle AOC=30^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\tan30^\circ=\frac{n\sqrt{3}}{m}\Rightarrow\frac{m}{n}=3,$$

$\therefore$选 B.

【例五】 (2006 年陕西卷 9)已知非零向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{AC}$ 满足 $\left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}+\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}\right)\cdot\vec{BC}=0$ 且 $\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}\cdot\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}=\frac{1}{2}$，则 $\triangle ABC$ 为　　(　　)

A. 三边均不相等的三角形

B. 直角三角形

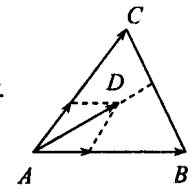
C. 等腰非等边三角形

D. 等边三角形.

【典例剖析】 这道选择题考查的知识是关于向量的线性运算的，试题的特点是块状，也即一块一个结论，两个结论得出正确选项，体现命题时需要对知识的综合运用，联动判断的方向.

【思考感悟】 此类题的解题思路是数形结合. 一般解法是 $\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}\longrightarrow\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}+\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}\longrightarrow\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}+\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}=0;\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}\cdot\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}=\frac{1}{2}\longrightarrow\vec{AB},\vec{AC}$ 夹角，高考命题的趋势在这个题上体现得淋漓尽致.

【答案参考】



解：$\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$ 表示 $\vec{AB}$ 方向上的单位向量；$\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$ 也是如此，$\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}+\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$ 表示以 $\vec{AB},\vec{AC}$ 方向上的单位向量为邻边的菱形的对角线所在向量(如图)，$\left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}+\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}\right)\cdot\vec{BC}=0$ 表示 $\vec{AD}\perp\vec{BC}\Rightarrow\triangle ABC$ 为等腰三角形，而 $\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}\cdot\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\angle CAB=60^\circ\Rightarrow\triangle ABC$ 为等边三角形，$\therefore$选 D.

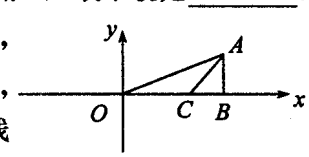
(二)名题热身

1. 设向量 a,b,c 满足 $a+b+c=0$，且 $a\perp b$，$|a|=1,|b|=2$，则 $|c|=$_____.

2. 已知非零向量 a,b，若 $a+2b$ 与 $a-2b$ 互相垂直，则 $\frac{|a|}{|b|}=$_____.

3. 在 $\square ABCD$ 中，$\vec{AB}=a,\vec{AD}=b,\vec{AN}=3\vec{NC}$，$O$ 为 BC 的中点，则 $\vec{ON}$ 用 a,b 表示就是_____.

4. 已知点 $A(\sqrt{3},1)$，$B(\sqrt{3},0)$，O 为原点，且 $\angle OAB$ 的平分线 AC 与 OB 交于 C，若 $\vec{OB}=\lambda\vec{BC}$，则 $\lambda=$__.



第 4 题图

5. $\triangle ABC$ 的外心为 0，两条边上的高的交点为 D，且 $\vec{OD}=x(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$，则实数 $x=$_____.

6. 设平面向量 a_1,a_2,a_3 的和 $a_1+a_2+a_3=0$，如果平面向量 b_1,b_2,b_3 满足 $|b_i|=2|a_i|$，且 a_i 顺时针旋转 30°后与 b_i 同向，其中 $i=1,2,3$，则　　(　　)

A. $-b_1+b_2+b_3=0$　　B. $b_1-b_2+b_3=0$

C. $b_1+b_2-b_3=0$　　D. $b_1+b_2+b_3=0$

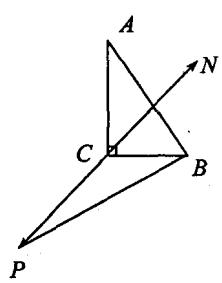
7. 已知向量 $a=(\sqrt{3},1)$，b 是不平行于 x 轴的单位向量，且 $a\cdot b=\sqrt{3}$，则 $b=$　　(　　)

A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$　　D. $(1,0)$

8. 已知点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，O 是坐标原点，向量 $\vec{OA}$，$\vec{OB}$ 满足 $|\vec{OA}+\vec{OB}|=|\vec{OA}-\vec{OB}|$，设圆 C 的方程为 $x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y=0$，求证：线段 AB 是圆 C 的直径.

9. 如图，在直角 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle ACB=90°$，$AB=c$，若长为 $2c$ 的线段 MN 的点 C 为中点，且设 $\vec{MN}$ 与 $\vec{BA}$ 的夹角为 α，试问 α 取何值时，$\vec{BM}\cdot\vec{AN}$ 取得最大值，并求出这个最大值.



第 9 题图

10. 已知平面上三点 A、B、C 满足 $|\vec{BC}|=3$，$|\vec{CA}|=4$，$|\vec{AB}|=5$，求 $\vec{BC}\cdot\vec{CA}+\vec{CA}\cdot\vec{AB}+\vec{AB}\cdot\vec{BC}$ 的值.

11. 已知 $|m|=2$，$|n|=4$，m 与 n 的夹角为 $60°$，若以 m，n 为邻边作平行四边形，求此平行四边形的两条对角线中较短的一条的长度.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，O 为中线 AD 上的一个动点，若 $|\vec{AD}|=2$，求 $\vec{OA}\cdot(\vec{OB}+\vec{OC})$ 的最小值.

课题 2　线性规划中的数形结合思想方法

一、变化迁移与能力补全

【高考最新变化简述】

1. 与 2006 年考试说明对比，2007 年的考试大纲要求我们①“了解二元一次不等式的几何意义，能用平面区域表示二元一次不等式组”；

②会从实际情境中抽象出一些简单的二元线性规划问题，并能加以解决.

(一)考试能力层级变化是：

1. 从了解线性规划的意义，到了解二元一次不等式的几何意义，能用平面区域表示二元一次不等式组，层级变化是重点在几何定义.

2. 从会简单的应用到能加以解决，突出能力是要求可以解决问题.

(二)知识的迁移体现在：

1. 从二元一次不等式的问题中抽取、几何意义，迁移到几何方法上去解.

2. 从几何角度进行问题的推理，解决. 最后又回归迁移到线性规划问题.

(三)针对这些变化，我们的策略是：

1. 利用数形结合，将二元一次不等式(组)中的几何定义进行提炼，有的放矢.

2. 在几何方面引导下，又将结果向线性规划的要求进行解答.

需要全本请访问 www.ertongbook.com