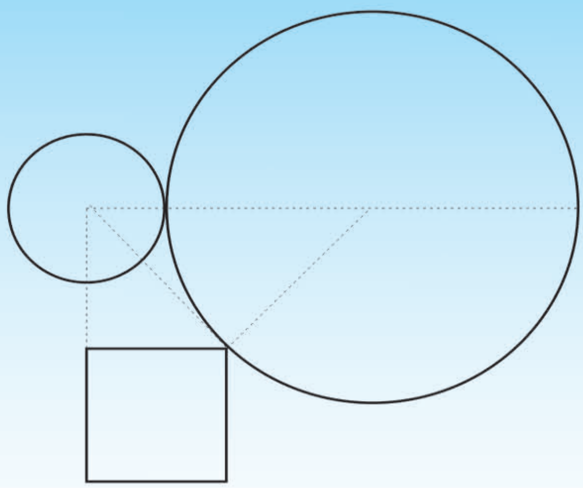
数学解题的乐趣

党永成　安惠侠　编著



$$\frac{3\times 5\times 9\times 11\times 15\times 17\times 21\cdots\cdots}{2\times 3\times 5\times 7\times 11\times 13\times 17\times 19\times 23\cdots\cdots}N > \frac{\sqrt{N}}{2}$$

陕西新华出版传媒集团
陕西科学技术出版社
Shaanxi Science and Technology Press

数学解题的乐趣

党永成 安惠侠 编著

陕西新华出版传媒集团
陕西科学技术出版社
Shaanxi Science and Technology Press

图书在版编目（CIP）数据

数学解题的乐趣 / 党永成，安惠侠编著. -- 西安 ：
陕西科学技术出版社， 2019.6
ISBN 978-7-5369-7528-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①党… ②安… Ⅲ.①数学方法－研
究 Ⅳ.①O1-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第074939号

数学解题的乐趣

党永成 安惠侠 编著

责任编辑：	潘晓洁 孙雨来
封面设计：	萨木文化

出 版 者	陕西新华出版传媒集团 陕西科学技术出版社 西安市曲江新区登高路1388号 陕西新华出版传媒产业大厦B座 电话(029)81205187 传真(029)81205155 邮编:710061 http://www.snstp.com
发 行 者	陕西新华出版传媒集团 陕西科学技术出版社 电话(029)81205180 81206809
印 刷	铜川市耀州区鸿达印务有限责任公司
规 格	880mm×1230mm 16开本
印 张	12.5
字 数	175千字
版 次	2019年6月第1版 2019年6月第1次印刷
书 号	ISBN 978-7-5369-7528-6
定 价	58.00元

前　　言

在上初中的时候，我的代数老师说：“学数学，就要多做题，特别是要多做难题。因为做会一道难题，它对于提高个人的学习成绩，效果最好。”从此，我就有了爱看难题，爱想难题，爱做难题的兴趣。在学校的时候是这样，出了学校还是这样。

最先对求解难题有了结果的是，用圆规和直尺做任意正多边形。不过在这上边我是有遗憾的，其问题是：我试用的圆规，是自己改造制作的圆规。试用的直尺是现代的标有刻度的直尺。这种方法，超越了早先对解题条件的限制。但是，我又不想墨守成规，因循守旧地在“难”字的束缚下去“坐”等，而只是一心想着为自己喜欢的难题去探寻出路。好在是有了这个圆规后，我不但能做用原来办法难以做出的正七边形、正十一边形、正十三边形等，而且使人们原来用圆规和直尺分别做正三角形，正四边形、正五边形的不同方法，在新法的基础上得到了统一。而且，利用它，我又完成了“化圆为方”和“三等分任意角”的两个几何难题的作图与证明。这些成果地取得，大大激发了我求解难题的积极性。只不过，这种积极性的表现是随意的、零碎的。着实难以形成比较系统、比较正规的数学方面的一本书。但在两个质数之和的求解上却是一个例外。

说到两个质数之和。我相信，人们完全可以用函数、概率、排列与组合、集合、数学分析、逻辑推理等方法完成对它的求证。但这必须有一个前提。这个前提就是对自然数内在结构的充分认识，及对把偶数 N 写成两数之和规律性的深刻理解。而能帮助人们做到这一点的最好的数学工具则是各种规格的质合数用表。

人们求解两个质数之和的最大障碍是随着自然数的增大，而质数的出现是越来越稀。但质合数用表的突出功能是随着用表规格的扩大，使质数在表内的分布是愈来愈密。

各种不同质合数用表的规格是分别以从 2 开始的不同数量的连续质数

的乘积，即以它们的最小公倍数为模数，而把正整数分成相应数量的同余类子集。这些子集又分成纯合数子集与质合数子集。如果把这些纯合数子集都筛掉的话，质数就全部保留在少数的质合数子集中。

如果质合数用表的模数以 2×1、2×3、2×3×5、2×3×5×7、2×3×5×7×11……的顺序递增的话，那么不同规格质合数子集中的合数则以

$\frac{1}{2}$、$\frac{4}{2\times3}$、$\frac{22}{2\times3\times5}$、$\frac{162}{2\times3\times5\times7}$、$\frac{1830}{2\times3\times5\times7\times11}$……的惊人速度在递减。

以至在这些质合数子集中，合数的密度是越来越稀，越来越少。这就是我们求解两个质数之和必然成立的信心所在。本书介绍的就是怎样遵循这样的规律性，而证明任何一个大的偶数都可以写成两个质数之和的全部过程。两个质数之和是一道数学难题，对于该命题的寓意，所有具备简单数学知识和一定算术基础的广大读者都能理解。所以，我们求证的表述也只能是尽量的简单化、通俗化、算术化，以使这些读者对论证的结果能产生共鸣，提起兴趣，达成共识。

那么，我们论证的结果是什么？简单地说，就是以求解两个质数之和的证明为中心，取得了以下成果。

1. 证明得到合数、合数+合数、质数、合数+质数、质数+质数等五个方面的计算公式。

2. 分别制成了“两轴”和“八轴”的“两个质数之和演示仪”。能完成 5000 之内所有偶数写成两个质数之和的全部求解。

3. 完成了对埃拉拖氏撒纳筛子的技改，使人们寻找质数的效率提高了几十倍、几百倍。甚至几千倍以上。

4. 计算编制成 6 万以内和 11 万以内两种质数合数一览表。

5. 发明了正多边形专用圆规和圆方同积三角极。

这些成果，都是对多少年来数学界公认难题求解的突破，我们说完成了对它们的证明，但着实是心中感到不安。因为，这必竟是我们的一孔一见，一家之言，如果有错误和不妥的地方，敬请读者朋友能不吝赐教，帮

助我们改正和提高，以使我们的疑虑得到解脱，使悬着的心放下来。

1978 年，徐迟同志的报告文学在《人民日报》上公开发表，使求解把任何一个大的偶数都可以写成两个质数之和的命题，成了全国人民关注的焦点。它是改革开放的号角，是真理标准大讨论的檄文。受他的影响，我们开始了一场名符其实的持久战。现在把我们论证的结果编成此书，算是给自己多年的努力画上一个完满的句号。它是一块砖、一块用新型技术，用轻质材料制成的没有多大分量且少棱没角的砖。希望有兴趣的读者能把它捡起来、抛出去，从而引出一些更好的东西。我们本想在纪念改革开改 40 周年之际将书出版，但许多朋友及时地提出了不少意见，经过最后的修改，虽时间可能是延误了一些，但效果是更理想、更完善的，我们深感庆幸。

此书论证的某些地方曾得到西安交通大学张贵文教授，陕西师范大学史俊孝教授及铜川市耀州区教研室主任、正高级教师党金明等同志的指导，本书的出版得到张应龙、蔡少林、段新民、冯百成、兰献春、刘银虎、党军营等同志和许多亲朋好友的支持与帮助，使我们深深体会到亲情的重要，同学的诚心、友谊的珍贵、媒体的力量。在此一并表示感谢。

作者

2019 年 2 月

读而后知受益

数学并非我的专业，我多年忙于陕西师范大学出版社化学作品的编辑工作，对于数学方面很少涉猎，也不便多说什么。前不久当老同学邀请我为他的数学新作写几句话的时候，我确实有点为难了。但是当我拜读了老同学两个质数之和的新作后，我被彻底震撼了。我的老同学党永成是一位数学爱好者，他知道研究这个问题的难度，但他明知山有虎，偏向虎山行。30 多年来他能潜下心来在枯燥的数字排列组合中，孜孜不倦地演算、推论、研究，终于结出了丰硕的成果，他研究这些难题的许多方法理念以及为便于研究而自制的数学用表、绘图工具等都是首创的。所以，也可以说是震古烁今的。在他的新作中有许多感人至深的东西。本书在我看来对于热爱数学、甚或具有数学专长的人来说都是值得一读的。

作者在书中主要介绍了两个方面的问题：

1.用直尺和自己制作的圆规作任意正多边形；用自己制作的圆规及三角板，完成了化圆为方和三等分任意角的作图与证明；并计算得到了立方倍积常数。2012 年他们自制的正多边形专用圆规和圆方同积三角板，获得了国家颁发的两项专利。

2.他们对埃氏筛法所进行的技改和求解两个质数之和。

在古希腊，有一个叫埃拉拖氏撒纳的数学家。他把自然数从 1 开始连续地写出很多很多，然后把它们张贴在一个框子上。接着从 2 开始，每隔一个数就挖去一个数；再从 3 开始，每隔两个数就挖去一个数；又从 5 开始，每隔四个数就挖去一个数；连续着从 7 开始，从 11 开始……一直到从某个数开始，再没有第二个数可以被挖去时为止。这样一来，他的框子除了满是密密麻麻的小孔外，就只剩下了一些稀稀落落的质数。后来的人为

了纪念他，就把那个曾经的框子叫“埃拉拖氏撒纳筛子”。把他所用的方法叫“埃氏筛法”。令人称奇的是本书作者编制成的两种质合数用表，竟然绕过占自然数 70%以上的，2 的合数、3 的合数及 5 的合数等。不但分别标出了 11 万和 6 万以内的其他合数，而且按各自的位置得到了其中的全部质数。它不光将筛数的效率提高了几十倍、几百倍，甚至成千倍，而且把自然数的内在结构和规律性一展无余。使人们在研究数论方面有了一把实用的“万能钥匙”。党永成先生在这部著作中独自制作的质合数用表，应当算是数学界的大事情。如果把它与古老的埃氏筛法相比较，我们把新生的质合数用表称作“党氏筛法”或“现代筛法”都不算为过。以上这些，还远不是他们研究问题的主要方面。而书中介绍的大部分内容是他们求解两个质数之和的过程。他们求解两个质数之和，整整经历了 30 多年，其中有深刻的论述、有简明的模拟、有详细的验算、有质合数用表的佐证、有两个质数之和演示仪的实用，最终才得出了一个又一个的结论。见解独到、条理清楚、方法多样、构思巧妙、语言通俗、深入浅出。他们不但把以往数学家们在求解两个质数之和方面所取得的成果作了说明和概括，而且让几百年来一直神秘莫测的两个质数之和揭开了面纱，露出了它的真容。

开卷有益，读而后知受益，无论我们对作者解题结果作怎样的评价，单凭他们所表现出来的：敢攻难题的志向、大胆创新的精神、坚持始终的恒心，都是值得学习和鉴赏的。

这本书中的解题思路运用了许多新方法，它的出版也可能引起争鸣或共鸣。我想，有争鸣和共鸣应该是好事，这正是作者抛砖引玉的初衷吧。

是故，我郑重地将此书推荐给大家，希望大家喜欢。

史俊孝

2017 年 5 月

我们读懂了两个质数之和

二十多年前，我们就知道永成同志在研究两个质数之和的事情。前一阵子，他邀请我们几个看一看他对两个质数之和的求解结果，希望能提出宝贵意见，我们几个刚开始都感到茫然。

他对自己的求解结果大概是这样表述的：

1.任何一个大的偶数，在把它写成两数之和的时候，只有“合数+合数”“合数+质数”“质数+质数”三种形式。

2.任何一个大的偶数，在把它写成两数之和的时候，它们的加数会出现如下情况：

（1）有1/2的数能被2整除，并且两两对应相加，这些数占去了1/2;

（2）有1/3的数能被3整除，让它们作被加数，加上加数，这些数占去了2/3;

（3）有1/5的数能被5整除，让它们作被加数，加上加数，这些数占去了2/5;

（4）有1/7的数能被7整除，让它们作被加数，加上加数，这些数占去了2/7;

（5）有1/11的数能被11整除，让它们作被加数，加上加数，这些数占去了2/11……

当除数大于偶数的平方根时，就再也找不出新的被加数和新的加数了。

以上这些数，被加数全是合数，而加数却有合数，也有质数，它们包括了全部的“合数+合数”与“合数+质数”。

3.去掉“合数+合数”与“合数+质数”，剩下的就只有“质数+质数”了，这样的质数，其数量多于该偶数平方根的1/2。

对于我们几个未从事数学相关研究的人来说，要弄懂两上质数之和，原本是遥不可及、云里雾里的事情，但对于他的论证结果，听起来又是那

么的条理，那么的清晰，既简单又明了，使我们感到十分的惊喜和庆幸，惊喜的是，作为兄弟，能在古稀之年通过对自然数简单地分类，完成了对两个质数之和的求解；庆幸的是，我们较早成为了他的读者，并且读懂了两个质数之和。

读完此书，我们感慨万千，只送给兄弟两个字“点赞”。

陕西省铜川市新区：　冯百成　李满红

郭孟琪　李禄林

2018 年 6 月

古稀老人痴迷数学四十载

人到暮年，结束了繁重工作，放心了儿女生活，终于有机会做自己喜欢的事儿。打打牌、跳跳舞、唱唱歌、养养花或是学学乐器成了大部分老人生活的重心。而在耀州区，有一位名叫党永成的老人，即将年过古稀的他在退休后，一直在坚持做着一件特别的事儿—那就是钻研数学。

上学时就偏爱数学的党永成在参加工作后一直把数学研究当做自己的爱好。1978 年，人民日报发表了一篇名为《哥德巴赫猜想》的文章，讲述了数学家陈景润为解决“哥德巴赫猜想”（1742 年，先由哥德巴赫提出，后被欧拉确认，并希望得到证明：任何一个大的偶数，都可以写成两个素数之和）这一世界性数学难题付出的诸多努力，尽管结果离问题的解决还有距离，但是陈景润的付出以及这个命题的产生却深深地吸引了他。于是，30 岁的他开始了漫长的求解过程。退休前老党是耀州区人大常委会办公室主任，之前还担任过乡镇干部等职务，主要从事文字工作，所以当时他都是利用业余时间来进行研究。“当初开始研究这道数学题时，遇到了很大的困难。为让更多的人了解我的证明，我逢人就讲证明过程。证明过程很繁琐，又枯燥，没人愿意听，有人还以为我神经了”，老党说。虽然一直很少有人理解他所做的事情，但他从不懈气，而是拿出更大的决心和更多的精力投入其中。2002 年退休后，他有了大量时间和精力，当别的退休老人含饴弄孙、尽享天伦之乐的时候，他却带着老伴安惠侠钻进屋子，开始全身心地投入论证“两个质数之和”。作为老党最坚定的后盾，安惠侠说：“老党有这爱好，比打牌喝酒好，我必须全力支持。”

终于，经过近 40 年的努力，老党用全新的思路和方法，在“两个质数之和”的证明上有所突破。近日，他在耀州区柳公权中学向众多老师展示了在“两个质数之和”上取得的两大成果。成果一是：确定了三大解题步骤，即确定所有任意偶数求解的取值范围；把偶数分类来确定各类偶数的取值范围；具体偶数确定后在其分类的取值范围内选出一组数，用简便方法求解。成果二是：得出了任何一个大的偶数在它所包含的自然数中，合

数和素数的数量各自是确定的，素数的数量总是多于该偶数的平方根；任何一个大的偶数，在把它写成两数之和的时候，绝大多数是合数与合数相加，而素数和剩余合数相加后，总有一部分素数把偶数写成了两个素数之和，而这样的素数，其数量多于该偶数平方根的二分之一；任何一个大的偶数，都可以写成两个素数之和，而这样的素数，随着偶数的增大，其数量呈波浪式增加等结论。为了方便求解，老党制作了“两个质数之和”演示仪，还计算编制了两个质合数用表，可以查出 11 万和 6 万以内的质数和合数。

除了论证“两个质数之和”，经过多年潜心研究及多次验证，老党还摸索出了利用圆规和直尺做任意正多边形的方法，在破解了这一数学难题后，他发明的“正多边形专用圆规”和“圆方同积三角板”还荣获了国家知识产权局颁发的两个“实用新型专利证书”。

面对老党的“数学成就”，不少人都表示了充分的肯定。耀州区教科体局教研室主任、特级教师党全明评价：“这些年，老党的努力我们看在眼里，功夫不负有心人，他取得了应有的成绩。作为一名教师，我认为老党的研究可以用在教学上，把理论具体化，对拓展学生发散性、创造性思维很有帮助。作为教研组的一分子，我觉得他的发明在机械制图、工程等方面也能发挥相当大的作用。”

问起为何要将美好的晚年时光花费在研究数学难题上，老党笑着说：“因为我对数学真的很感兴趣，我觉得在晚年做自己喜欢的事儿就是一种享受！”看得出来老党对数学是怀揣着梦想的，这些年的潜心钻研也使他的数学梦一步步得以实现。虽然不像别的老人暮年生活那般轻松悠闲，但老党却感到很幸福，因为他在用美好的晚年时光追赶毕生的梦想。他说：“我一直坚信不管什么问题，都应该有解决的办法，再难的事儿，多动脑子就能化难为易。所以只要我还有劲儿，我会继续把这些数学难题研究下去！”

（本篇摘自《铜川日报 2018 年 1 月 9 日教育版》本报记者 原玉红 田甜）

乐趣的诱惑

人有七情，而快乐首当其冲。喜欢高兴，追求快乐，是人之本能。

为了快乐，人们一起唱歌、跳舞、下棋、打牌。为了快乐，人们一起打篮球，踢足球，推排球，玩各种游戏。开展一些群聚的活动。其原因除了修炼身体外，还有就是寻求快乐。就连人们的工作与劳动来说，除了生活必须的原因外，显示自己的能力，享受成功的乐趣，也是一个非常重要的方面。所以说，快乐也是一种一定环境下的产物。失去了一定的环境，也就缺少了快乐。尤其是在一个人的时候。

我有一个爱做数学习题的习惯。在无事的时候，看看自己的课本，瞧瞧新出的奥数题，翻翻过去的资料，找一些数学题做一做。有些题，我很快就做出来了。有些题，是要花一两个小时去完成。而有些题，则要花上几天到几十天的时间。若遇到更难一些的题，却要花几年甚至更长的时间。这些一时半会难以解出的题，就常常成了我单独一人时思考的内容，于是乎我可能在坐车的时候想，在公园散步的时候想，在别人闲聊而与己无关的时候想，在休息的时候想，等等。可别说，这样长期地围绕一个问题，坚持思考，还着实解决了许多难题。其间虽付出了极大的艰辛，但解题的成功，使人心情舒畅，浑身轻松，充满自豪。从而得到快乐，享受了乐趣。

比如我自制的正多边形专用圆规、圆方同积三解板及质数之和演示仪。包括“合数”“质数”“合数+合数”“合数+质数”“质数+质数”的计算公式。加上“质数、合数一览表”以及把偶数写成两个质数之和的模拟求解。这些成果，其中任何一个都经过几年、十几年的时间。特别是关于两个质数之和的整体论述，至今已有四十年之久，它们的成功，一次又一次地给我带来了极大的欢乐和惊喜。所以。对我来说：利用空余时间做数学题，它是我保持大脑活跃的“保健操”，是化解寂寞的“调味剂”，是高

兴的“摇篮”，是乐趣的“源泉”。有了高兴，就有了幸福。有了乐趣，幸福就更上一个层次。

乐趣是可以传递的。乐趣具有极强的感染力。偏爱数学寻乐趣，勤练习题脑健康。希望我的乐趣能感染到你。

目　　录

关于正多边形专用圆规

利用圆规和直尺作任意正多边形，是一个古老的几何难题。

远在古代，人们就可以作正三角形、正四边形。后来又能作一般形式的正 4×2^n 边形和正 3×2^n 边形。再后来，人们又能作出正 5×2^n 边形及正 15×2^n 边形。然而，利用圆规和直尺作出正七边形、正十一边形、正十三边形……的任何尝试，都以失败而告终。

这种局面持续了两千多年。直到 1796 年，年仅 19 岁的高斯，他一鸣惊人，找到了用圆规和直尺作正十七边形的方法。五年后，他又公布了能否作任意正多边形的见解。

高斯认为：用圆规和直尺能作的正多边形，只是其边数为费尔玛质数的正多边形,即边数是 $2^{2n}+1$ 形式的数。如果正多边形的边数是质数，而不是费尔玛数，那么要用古典方法，即用圆规和直尺来作出它们是不可能的。也就是说，人们不能任意作出正多边形。

高斯死后，在哥廷根专门为他立了纪念碑，而这个纪念碑的坛座刚好就是一个正十七边形的棱柱。此后二百多年来，在用圆规和直尺作任意正多边形的努力上，就再也没有了什么消息。

当然了，延用古老的传统做法，我们现在仍恐难突破。但是，如果单说作任意正多边形，总还是可以想出办法的。

办法是：给圆规的圆周脚增加一个副件，这个副件，就是一个可以滚动的轮轴。

这个办法的起因来自两个方面的灵感。一个灵感是早先的：人们为什么能用圆规和直尺作出正三角形、正四边形。在我看来，这是因为在发明人的潜意识里已经有了如何把圆周平分成六等份、四等份的办法。所以，作任意正多边形的关键是如何平分圆周长。另一个灵感是：自然数之所以