■ Move-learning版

高等数学

上册

总主编 陆 全
主 编 陆 全
副主编 冯晓慧

西北大学出版社

■ Move-learning版

高等数学

上册

总主编 陆 全
主 编 陆 全
副主编 冯晓慧
编 者 张 莹 于 美

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 陆全主编. —西安：西北大学出版社，2015.10

ISBN 978-7-5604-3756-9

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①陆…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 257811 号

高等数学(上)

主　　编　陆　全
出版发行　西北大学出版社
地　　址　西安市太白北路 229 号
邮　　编　710069
电　　话　029－88303042
经　　销　全国新华书店
印　　装　陕西奇彩印务有限责任公司
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张　22
字　　数　476 千字
版　　次　2015 年 11 月第 1 版　2015 年 11 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5604-3756-9
定　　价　49.00 元

前　　言

高等数学是高等学校工科学生重要的数学基础课程.随着现代科学技术和数学科学的发展,现代数学的内容更丰富,方法更综合,应用更广泛.数学教育对培养高素质科技人才起到越来越重要的作用.本书按照教学大纲的基本要求,根据编者多年的教学经验编写而成,力图使之成为既反映新形势下数学基础课程教学理念和教学内容的改革精神又继承传统优点的教材.

本书主要面向接受网络教育的大学生.与在校大学生相比,他们的学习条件更艰苦,学习时间更宝贵.怎样使本书方便他们的学习,编者做了不少工作,使之具有以下特点:①简明化.对基本内容的阐述力求简明扼要,以必需、够用为度.②系统化.在保证数学概念的准确性和基本内容的逻辑性的基础上,对传统教学内容进行了必要的调整.尽可能从自然科学的实例出发,借助几何直观引入数学概念,深入浅出,循序渐进,保持教学内容的系统性,易教易学.③条理化.力求使教材表述流畅,条理清晰.并根据远程教学的特点,在每章的开篇设置"教学内容","重要概念、结论与公式"栏目,按章总结,便于查阅.④实用化.通过几何、物理等方面的应用实例,提高学生的学习兴趣,拓宽视野,同时培养学生的应用意识与能力.这有益于学生学以致用,体现以应用为目的.⑤层次化.兼顾多种需求,结合教学内容配置丰富的例题,并剖析综合性例题.按节配置适量习题,每章配有总习题.采用多种题型:判断题,填空题,选择题,计算题等,从不同角度检查各知识点的掌握,适应不同层次的教学需求.⑥配套化.教材配有作业集——《高等数学同步练习与自测》,《高等数学》授课光盘,便于学生自学,复习、考试使用.且在书后附有视频课件二维码,扫码后可直接观看教学视频。

本书的作者有第1章:陆全、仝秋娟;第2章:陆全、郑薇;第3章:陆全、山瑞平;第4章:陆全、季莎;第5章:冯晓慧、于世航;第6章:冯晓慧、李诚;第7章:冯晓慧、蒋彰;第8—11章:张军亮;第12章:冯晓慧、郭凯.全书由西北工业大学陆全教授统纂定稿.

由于水平所限,书中疏漏和不妥之处恳请同行和读者指正.

编　者

2015年7月

目 录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是对客观世界中变量之间相依关系的一种抽象，它是高等数学研究的主要对象. 极限是研究函数的基本方法，是微积分的灵魂. 本章介绍函数、极限与连续的基本概念及重要性质，为以后的学习奠定必要的基础.

一、教学内容

集合、区间与邻域，函数的概念及性质，复合函数与反函数，基本初等函数与初等函数.

数列极限、函数极限的描述性定义及分析定义，函数的左、右极限的概念，无穷小与无穷大的定义及其关系，无穷小的性质，极限的四则运算，两个重要极限，无穷小比较.

连续函数定义，间断点的概念，连续函数的和、差、积、商的连续性，连续函数的反函数、复合函数的连续性，基本初等函数、初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

二、重要概念、结论与公式

1. 邻域

(1) 邻域 $U(x_0,\delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$.

(2) 去心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$.

2. 函数

(1) 有界函数 $f(x)$: $x \in X \subset D$，存在 $M > 0$，使 $|f(x)| \leqslant M$.

(2) 单调增加(减少) 函数 $f(x)$: $x \in I \subset D$，当 $x_1 < x_2$ 时，$f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

(3) 奇(偶) 函数 $f(x)$: $x \in [-a,a]$，$f(-x) = -f(x)$ $(f(-x) = f(x))$.

(4) 周期函数 $f(x)$: $x \in (-\infty, +\infty)$，存在 $T > 0$，使 $f(x + T) = f(x)$.

3. 极限

(1) 极限存在的充要条件：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$$

(2) 两个重要极限：

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$(或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$).

(3) 无穷小的性质：

1) 有限个无穷小的和(或积)仍为无穷小.

2) 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小.

3) 无穷小(不取零值)的倒数为无穷大,无穷大的倒数为无穷小.

4) 若无穷小 $\alpha_1 \sim \alpha_2, \beta_1 \sim \beta_2$,且$\lim \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$ 存在,则$\lim \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$.

4. 连续

(1) $f(x)$ 在点 x_0 连续 $\overset{\text{定义}}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$$

(2) 基本初等函数在其定义域内连续,初等函数在其定义区间内连续.

(3) 闭区间上连续函数性质：

1)(最值定理) 闭区间上连续函数在该区间上一定能取得最大值 M 和最小值 m.

2)(有界性定理) 闭区间上连续函数一定是有界函数.

3)(介值定理) 闭区间上连续函数一定能取得最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

4)(零点定理) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f(a)f(b) < 0$,则存在 $\xi \in (a,b)$,使 $f(\xi) = 0$.

1.1 函　　数

一、集合与区间

集合是现代数学的一个基本概念,我们称具有某种特定性质的事物的全体为

集合，构成集合的事物称为集合的元素. 例如某教室中的全体学生，全体实数，直线 $y = x$ 上的所有点，都分别构成一个集合.

通常用大写字母 A,B,C 等表示集合，用小写字母 a,b,c 表示集合的元素，用 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 的元素，用 $a \overline{\in} A$ 表示 a 不是集合 A 中的元素.

含有有限个元素的集合称为有限集，含有无穷多元素的集合称为无限集，不含任何元素的集合称为空集，记为 Φ. 一般地，用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集.

区间是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集. 区间分为有限区间和无限区间.

设 $a,b \in \mathbf{R}, a < b$，则有限区间分为：

开区间：$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$；

闭区间：$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；

半开半闭区间：$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$，$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$；

无限区间分为：

$(a,+\infty) = \{x \mid a < x\}$；$[a,+\infty) = \{x \mid a \leqslant x\}$；$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$；$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\}$；$(-\infty,+\infty) = \mathbf{R}$.

如果我们所讨论的问题在任何区间上都成立时，将用 I 表示此泛指的区间.

所谓点 x_0 的邻域，是指以点 x_0 为中心的任何开区间，记作 $U(x_0)$.

所谓点 x_0 的 δ 邻域，是指以 x_0 为中心，以 $\delta(\delta > 0)$ 为半径的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，如图 1.1(a) 所示，记作 $U(x_0,\delta)$，即 $U(x_0,\delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$. 所谓点 x_0 的去心 δ 邻域，是指在 x_0 的 δ 邻域中去掉 x_0 所得集合，记为 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$，即

$$\overset{0}{U}(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

如图 1.1(b) 所示.

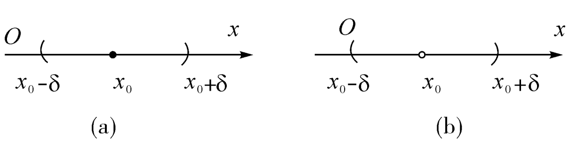

图 1.1

例如，$0 < |x - 1| < 2$ 表示以点 $x_0 = 1$ 为中心，以 2 为半径的去心邻域.

二、函数的概念

例 1 某物体以 2 m/s 的速度做匀速直线运动，则该物体所经过的路程 S 和时间 t 有如下关系：$S = 2t(t \geqslant 0)$，对于变量 t 和 S，当 t 在 $[0, +\infty)$ 内任取一定值 t_0 时，S 都有唯一确定的值 $S_0 = 2t_0$ 与之对应. 变量 t 与 S 之间的这种对应关系，即是函数概念的实质.

定义 1 设 x 和 y 为两个变量，D 为非空实数集合，f 为一个对应法则，使每个 $x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y = f(x)$，称 x 为自变量，y 为因变量，称数集 D 为函数的定义域，可记为 D_f.

函数的定义域 D 是使函数关系式有意义的自变量的取值范围，而在实际问题中，函数的定义域由问题的实际意义确定.

在函数定义中，对每个取定的 $x_0 \in D$，按照对应法则 f，总有唯一确定的 y 值与之对应，这个值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 中一切值时，对应的函数值构成的集合称为函数的值域，记为 Z_f，即

$$Z_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

例如，在例 1 中的 $D_f = [0, +\infty)$，$Z_f = [0, +\infty)$.

由函数定义可知，确定函数的两个要素是定义域 D 和对应法则 f，而值域可由以上两要素确定，因此，两个函数相同是指它们的定义域和对应法则分别相同.

例 2 确定下列函数的定义域 D.

(1) $y = \ln(x-1)$；(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$.

解 (1) $D = \{x \mid x > 1\} = (1, +\infty)$

(2) 由 $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) > 0$ 得定义域

$$D = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

例 3 下列各对函数是否相同，为什么？

(1) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$；(2) $f(x) = x + 1, g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

解 (1) 不相同. 因为虽然定义域 $D_f = D_g = (-\infty, +\infty)$，但 $g(x) = |x|$，两函数的对应法则不同.

(2) 不相同. 因为 $f(x)$ 的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$，$g(x)$ 的定义域 $D_g = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$，$D_f \neq D_g$.

函数的表示方法主要有三种：图示法、表格法和公式法(解析法). 图示法可使抽象问题直观化，表格法(如数学用表，统计报表等)便于查找函数值，公式法便于运算和分析. 高等数学主要讨论用公式法表示的函数.

所谓函数 $y=f(x)$ 的图形，是指平面直角坐标系 xOy 中点的集合 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\}$. 函数的图形通常是平面内的一条曲线.

下面给出几个常用函数.

例 4　绝对值函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，其图形如图 1.2 所示.

例 5　符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$，其图形如图 1.3 所示.

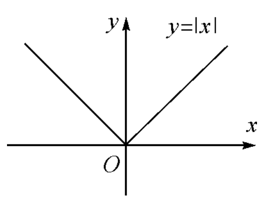

图 1.2

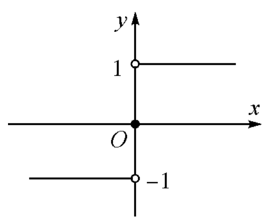

图 1.3

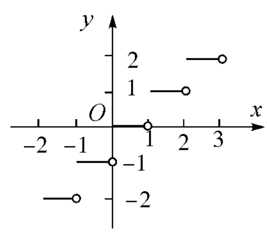

图 1.4

例 6　取整函数 $y=[x]$ 表示“变量 y 是不超过 x 的最大整数”.

此函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对应法则是 y 取不超过 x 的最大整数. 如 $\left[-\frac{1}{2}\right]=-1$，$\left[\frac{3}{2}\right]=1$，$[\sqrt{10}]=3$，它的图形为阶梯形，如图 1.4 所示.

例 4 至例 6 中的函数具有如下特征：在自变量的不同取值范围内，其对应法则由不同解析式表示，通常称这类函数为分段函数，它是自然科学和工程技术中常见的函数形式.

三、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M，使得对于一切 x

$\in X$,有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界,否则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如,函数 $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界,因为存在正数 $M=1$,无论 x 取任何实数,总有 $|\sin x| \leqslant 1, |\cos x| \leqslant 1$.又如函数 $f(x)=e^x$ 在$(-\infty,0]$内有界,总有 $|e^x| \leqslant 1$,但在$(-\infty,+\infty)$内无界.

2.单调性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义,如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.单调增加和单调减少函数统称单调函数.

例如,函数 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的;函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$内是单调减少的,在$(0,+\infty)$内是单调增加的,在$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

3.奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.

(1)如果对于任意的 $x \in D$,总有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;

(2)如果对于任意的 $x \in D$,总有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

例7 判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=1+\cos x$;(2)$f(x)=x\sin^2 x$;(3)$f(x)=x+x^2$.

解 (1)因为 $f(-x)=1+\cos(-x)=1+\cos x=f(x)$,所以 $f(x)=1+\cos x$ 为偶函数.

(2)因为 $f(-x)=(-x)\sin^2(-x)=-x\sin^2 x=-f(x)$,所以 $f(x)=x\sin^2 x$ 是奇函数.

(3)因为 $f(-x)=(-x)+(-x)^2=-x+x^2 \neq f(x)$,且 $f(-x)\neq -f(x)$,所以 $f(x)=x+x^2$ 既非偶函数,也非奇函数.

4.周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在正数 T,使得对于任意 $x \in D$,有 $x \pm T \in D$,且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期,通常我们说函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $\sin x$、$\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数,$\tan x$、$\cot x$ 都是以 π 为周期的函数.