■ Move-learning版

高等数学



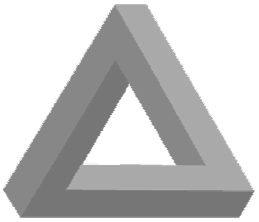
下册

总主编　陆　全
主　编　张军亮
副主编　冯晓慧

西北大学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

■ Move-learning版



高等数学

下册

总主编　陆　全
分册主编　张军亮
副主编　冯晓慧
编　者　陈峥立

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册 / 张军亮主编.—西安：西北大学出版社，2015.10

ISBN 978-7-5604-3757-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等学校—高等学校—教材 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 258861 号

高等数学(下)

主　　编　张军亮
出版发行　西北大学出版社
地　　址　西安市太白北路 229 号
邮　　编　710069
电　　话　029－88303042
经　　销　全国新华书店
印　　装　西安华新彩印有限责任公司
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张　15.75
字　　数　221 千字
版　　次　2015 年 10 月第 1 版　2015 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5604-3757-6
定　　价　30.00 元

目 录

第 8 章 向量代数与空间解析几何 …… (1)
8.1 向量及其线性运算 …… (2)
一、空间直角坐标系 …… (2)
二、向量的线性运算 …… (4)
三、向量的坐标表示 …… (6)
习题 8.1 …… (9)
8.2 向量的乘法运算 …… (10)
一、向量的数量积 …… (10)
二、向量的向量积 …… (13)
习题 8.2 …… (17)
8.3 平面与直线 …… (17)
一、点的轨迹方程的概念 …… (17)
二、平面 …… (19)
三、直线 …… (22)
四、平面与直线的夹角 …… (26)
五、点到平面的距离 …… (27)
习题 8.3 …… (28)
8.4 曲面与空间曲线 …… (29)
一、几种常见的曲面及其方程 …… (29)
二、二次曲面 …… (34)
三、空间曲线 …… (37)
习题 8.4 …… (40)
总习题 8 …… (42)
第 9 章 多元函数微分学 …… (45)
9.1 多元函数 …… (47)

一、区域 …… (47)
二、二元函数的概念 …… (48)
三、二元函数的极限 …… (50)
四、二元函数的连续性 …… (52)
习题 9.1 …… (53)
9.2 偏导数 …… (54)
一、偏导数的概念 …… (54)
二、高阶偏导数 …… (57)
习题 9.2 …… (59)
9.3 全微分 …… (59)
习题 9.3 …… (63)
9.4 多元复合函数和隐函数的求导法则 …… (63)
一、多元复合函数的求导法则 …… (63)
二、隐函数的求导法则 …… (67)
习题 9.4 …… (69)
9.5 偏导数在几何上的应用 …… (70)
一、空间曲线的切线与法平面 …… (70)
二、曲面的切平面与法线 …… (73)
习题 9.5 …… (76)
9.6 多元函数的极值 …… (76)
一、二元函数的极值 …… (77)
二、二元函数的最值 …… (79)
三、条件极值 …… (81)
习题 9.6 …… (85)
总习题 9 …… (85)
第 10 章 重积分 …… (90)
10.1 二重积分的概念与性质 …… (91)
一、二重积分的概念 …… (91)
二、二重积分的性质 …… (94)
习题 10.1 …… (96)
10.2 二重积分的计算 …… (97)

需要全本请访问 www.ertongbook.com

一、利用直角坐标计算二重积分 …… (97)
二、利用极坐标计算二重积分 …… (103)
习题 10.2 …… (108)
10.3 三重积分 …… (109)
一、三重积分的概念 …… (109)
二、利用直角坐标计算三重积分 …… (110)
三、利用柱面坐标计算三重积分 …… (113)
习题 10.3 …… (115)
10.4 重积分应用举例 …… (116)
一、体积 …… (117)
二、曲面的面积 …… (118)
三、质量与质心 …… (120)
习题 10.4 …… (121)
总习题 10 …… (122)
第 11 章 曲线积分* …… (126)
11.1 对弧长的曲线积分 …… (127)
一、对弧长的曲线积分的概念 …… (127)
二、对弧长的曲线积分的计算方法 …… (128)
习题 11.1 …… (131)
11.2 对坐标的曲线积分 …… (131)
一、对坐标的曲线积分的概念 …… (131)
二、对坐标的曲线积分的计算方法 …… (134)
习题 11.2 …… (138)
总习题 11 …… (139)
第 12 章 无穷级数 …… (143)
12.1 常数项级数的基本概念和性质 …… (144)
一、常数项级数的概念 …… (144)
二、无穷级数的基本性质 …… (147)
习题 12.1 …… (149)
12.2 正项级数及其审敛法 …… (150)
一、正项级数收敛的充要条件 …… (150)

二、正项级数的比较审敛法及极限形式 …… (151)
三、正项级数的比值审敛法 …… (154)
习题 12.2 …… (155)
12.3 任意项级数及其审敛法 …… (155)
一、交错级数及其审敛法 …… (156)
二、绝对收敛与条件收敛 …… (156)
习题 12.3 …… (158)
12.4 幂级数 …… (159)
一、幂级数的基本概念 …… (159)
二、幂级数的收敛半径与收敛域 …… (160)
三、幂级数的四则运算 …… (162)
四、幂级数的分析运算 …… (162)
习题 12.4 …… (165)
12.5 函数展开成幂级数 …… (166)
一、泰勒级数 …… (166)
二、间接展开法 …… (168)
三、幂级数展开式在近似计算上的应用* …… (170)
习题 12.5 …… (171)
总习题 12 …… (171)
附录 二阶、三阶行列式简介 …… (174)
习题答案与提示 …… (177)
参考文献 …… (192)

第 8 章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何是用代数方法研究空间图形的一门数学学科，它在工程技术等领域有着广泛的应用，本章引入向量的概念和运算，并以此为工具研究空间点、线、面等空间解析几何问题.

一、数学内容

向量：空间直角坐标系和向量的定义，向量的坐标表示，向量的线性和乘法运算及其坐标表示.

空间解析几何：曲面、空间曲线方程的定义，平面的点法式方程和一般方程，直线的点向式方程和一般方程，平面与直线的夹角，几种常见曲面及其方程，二次曲面，空间曲线及在坐标面上的投影.

二、重要概念、结论与公式

1. 向量

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}\qquad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}\qquad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

(2) $\vec{a}\pm\lambda\vec{b}=(a_x\pm\lambda b_x)\vec{i}+(a_y\pm\lambda b_y)\vec{j}+(a_z\pm\lambda b_z)\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & b_y & a_z\\ a_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

(3) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\qquad \vec{a}\ /\!/\ \vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$

2. 空间解析几何

(1) 平面点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

平面一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$

(2) 直线点向式方程式：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

直线一般方程：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

(3) 平面与直线夹角：$\sin\varphi=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

(4) 点到平面距离：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

8.1 向量及其线性运算

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

取空间一定点 O，过点 O 作三条具有相同长度单位且两两相互垂直的数轴，这三条数轴分别叫 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴) 和 z 轴(竖轴)，统称坐标轴. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线. 坐标轴的正向要遵循右手法则，即以右手握住 z 轴，当四个手指从 x 轴正向以 $\dfrac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向(图 8.1). 这样就建立了空间直角坐标系，O 称为坐标原点.

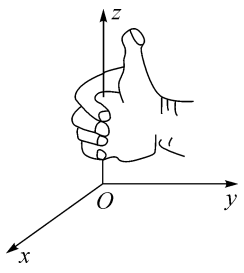


图 8.1

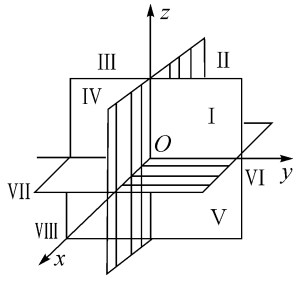


图 8.2

三条坐标轴中任意两条可以确定一个平面，x 轴 y 轴所确定的平面称为 xOy 坐标面，依次有 yOz 坐标面和 zOx 坐标面. 三个坐标面将空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限，依次称为第一至第八卦限(图 8.2).

设 M 为空间一点，过 M 分别作三条坐标轴的垂直平面，交 x 轴、y 轴和 z 轴于点 P,Q,R. 这三点在数轴上的坐标依次为 x,y,z，于是点 M 唯一地确定有序数组 x,y,z. 反之，给定有序数组 x,y,z，总能在三个坐标轴上找到以它们为坐标的点 P,Q,R. 过这三点分别作坐标轴的垂直平面，三个平面必交于点 M，这样空间的点就与一组有序数组之间建立了一一对应关系（图 8.3）. 有序数组 x,y,z 称为点 M 的坐标，分别称为 x 坐标（横坐标），y 坐标（纵坐标）和 z 坐标（竖坐标），记为 $M(x,y,z)$.

显然，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$，坐标轴上点的坐标至少有两个坐标为 0. 坐标面上点的坐标至少有一个坐标为 0. 例如，x 轴上点 P 的坐标可表示为 $P(x,0,0)$，xOy 坐标面上点 N 的坐标可表示为 $N(x,y,0)$.

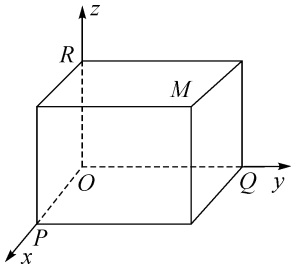


图 8.3

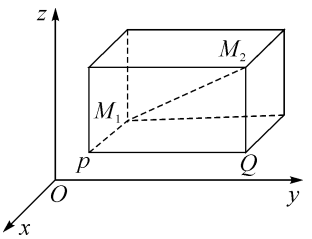


图 8.4

2. 两点间的距离公式

设空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$，求它们之间的距离 $d=|M_1M_2|$. 过 M_1,M_2 各作三张平面分别垂直于三个坐标轴，形成如图 8.4 所示的长方体. 由图易看出

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1Q|^2 + |QM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |PQ|^2 + |QM_2|^2 \end{aligned}$$

由于 $|M_1P| = |x_2-x_1|$，$|PQ| = |y_2-y_1|$，$|QM_2| = |z_2-z_1|$，所以

$$d^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} \tag{1}$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与原点的距离

$$d = |OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例 1　在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$ 和 $B(5,7,-5)$ 等距离的点.

解　因为所求的点在 y 轴上，故可设它为 $M(0,y,0)$，依题意有

$$\sqrt{(1-0)^2+(-3-y)^2+(7-0)^2}=\sqrt{(5-0)^2+(7-y)^2+(-5-0)^2}$$

得解

$$y=2$$

因此,所求的点为 $M(0,2,0)$.

二、向量的线性运算

1. 向量的概念

在我们的生活中,除了温度、时间等仅有大小的量(称为标量)外,还有位移、速度、力等既有大小又有方向的量,称为向量或矢量.

我们常用有向线段表示向量,以 A 为起点 B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$,如图 8.5. 也可用一个黑体字母或一个拉丁字母上面加一个箭头来表示向量,如向量 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$,$\vec{F}$ 等.

向量 $\vec{a}$ 的大小称为向量的模,记作 $|\vec{a}|$,模为 1 的向量称为单位向量,模为 0 的向量称为零向量,记为 $\vec{0}$,其方向规定为任意的.

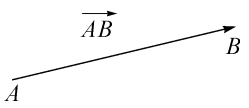


图 8.5

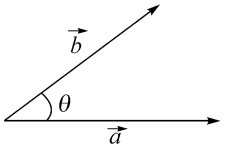


图 8.6

由于向量是由大小和方向所确定的,我们规定,两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不论起点是否一致,只要其方向相同、模相等,就称它们是相等的,记作 $\vec{a}=\vec{b}$. 即经平行移动后,两向量完全重合,允许平行移动的向量称为自由向量,本书讨论的向量均为自由向量. 如果向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同或相反,称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行,记作 $\vec{a}\ /\!/\ \vec{b}$. 起点相同的两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 分别所在的两条射线之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角,记作 $(\vec{a},\vec{b})$(图 8.6). 当 $(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{2}$ 时,称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直,记作 $\vec{a}\perp\vec{b}$.

2. 向量的线性运算

在物理学中,如果有两个力 $\vec{F}_1$,$\vec{F}_2$ 作用在同一质点上,则它们的合力 $\vec{F}$ 可按平行四边形法则或三角形法则求得,由此可以定义向量的加法.

定义 1 设有两个非零向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$,以 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 为边的平行四边形的对角线所表示的向量(图 8.7),称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和向量,记为 $\vec{a}+\vec{b}$.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

这是向量加法的平行四边形法则定义，由图可以看出，若以向量 $\vec{a}$ 的终点为向量 $\vec{b}$ 的起点，则由 $\vec{a}$ 的起点到 $\vec{b}$ 的终点的向量也是 $\vec{a}+\vec{b}$，这是向量加法的三角形法则.（图 8.8）特殊地，当 $\vec{b}=\vec{0}$ 时，规定 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}$.

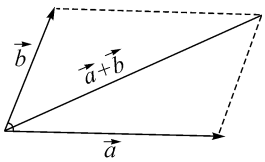


图 8.7

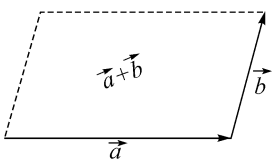


图 8.8

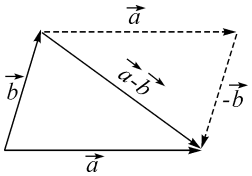


图 8.9

与向量 $\vec{b}$ 的模相等且方向相反的向量称为 $\vec{b}$ 的负向量，记作 $-\vec{b}$，向量 $\vec{a}$ 与 $-\vec{b}$ 的和称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差，记作 $\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ 可按图 8.9 的方法作出.

定义 2　数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积仍是一个向量，记作 $\lambda\vec{a}$，且

(1) $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$.

(2) $\lambda\vec{a}$ 的方向规定为：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向.

如果 $\lambda=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$，规定 $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

不难由定义看出，向量 $\vec{b}$ 的负向量 $-\vec{b}$ 就是 -1 与向量 $\vec{b}$ 的乘积向量. $\vec{a}\neq\vec{0}$，则 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 一定是单位向量.

向量的加法和数与向量的乘积称为向量的线性运算，具有以下运算性质：

(1) 交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(2) 结合律师　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$

(3) 分配律　$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

定理　向量 $\vec{b}$ 与非零向量 $\vec{a}$ 平行的充要条件是存在唯一实数 λ，使 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

证　按照数与向量乘积定义，充分性是显然的，下面证明必要性.

设 $\vec{b}\ /\!/\ \vec{a}$，当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向时取 $\lambda=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$；当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向时取 $\lambda=-\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向，且

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=|\vec{b}|$$

因此

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}$$

再证数 λ 的唯一性,设另有数 μ 使用权 $\vec{b}=\mu\vec{a}$,

则

$$\lambda\vec{a}-\mu\vec{a}=\vec{b}-\vec{b}=0$$

即

$$(\lambda-\mu)\vec{a}=0$$

因 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 故 $\lambda=\mu$.

例 2 证明三角形两边中点连线平行且等于第三边的一半.

证 如图 8.10 所示,D,E 分别为 $\triangle ABC$ 两边的中点,有

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\quad \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

而在 $\triangle ADE$ 中,有

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$$

在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$$

所以 $$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

故 $\overrightarrow{DE}\ /\!/\ \overrightarrow{AB}$,且 $|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$.

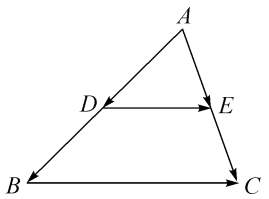


图 8.10

三、向量的坐标表示

1. 向量的坐标

在空间直角坐标系中,与 x 轴、y 轴、z 轴正向相同的单位向量分别记为 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$,称为基本单位向量.下面介绍通过用基本单位向量表示向量,从而给出向量的坐标表示法.

设向量 $\vec{a}$ 的起点为坐标原点 O,终点为 $P(x,y,z)$.过点 P 作三个垂直于坐标轴的平面,设垂足依次为 A,B,C(图 8.11),则点 A 在 x 轴上的坐标为 x,根据数与向量的乘法运算得 $\overrightarrow{OA}=x\vec{i}$,同理 $\overrightarrow{OB}=y\vec{j}$,$\overrightarrow{OC}=z\vec{k}$.于是由向量加法的三角形法则,有

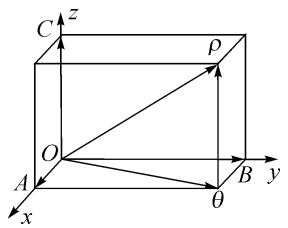


图 8.11

$$\vec{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

称 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 为向量 $\vec{a}$ 的坐标表示式,记作

$$\vec{a}=(x,y,z)$$

其中 x,y,z 称为向量 $\vec{a}$ 的坐标

例 3　求以 $A(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，$B(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标表示式.

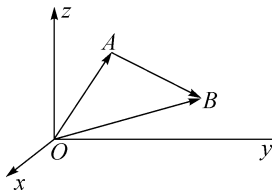


图 8.12

解　如图 8.12，有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})-(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\\&=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}\\&=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\end{aligned}$$

由例 3 看出，起点不在原点的向量的坐标，恰好等于终点坐标与起点坐标之差.

2. 向量的线性运算的坐标表示

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. 则

$$\begin{aligned}\vec{a}\pm\vec{b}&=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\pm(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k}\\&=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_x\pm b_z)\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\lambda\vec{a}&=\lambda(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\\&=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k}\\&=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)\end{aligned}\tag{3}$$

例 4　已知 $\vec{a}=(2,-1,-3)$，$\vec{b}=(2,1,-4)$，求 $\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$3\vec{a}-2\vec{b}$.

解　$\vec{a}+\vec{b}=(2+2,-1+1,-3-4)=(4,0,-7)$

$\vec{a}-\vec{b}=(2-2,-1-1,-3-(-4))=(0,-2,1)$

$3\vec{a}-2\vec{b}=(6,-3,-9)-(4,2,-8)=(2,-5,-1)$

由此看到，利用向量的坐标将原本采用几何方式定义的加法、减法等线性运算代数化了，起到了简化的作用.

3. 向量模与方向余弦的坐标表示

向量是由它的模和方向确定的，如果已知了非零向量的坐标，那么它的模和方向也可以用坐标表示. 不妨设向量 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_i)$ 以原点为起点，以 $M(a_x,a_y,a_z)$ 为终点，如图 8.13，由两点距离公式得

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\tag{4}$$

设向量 $\vec{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角分别为 α,β,γ（其中 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant$

$\pi, 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi)$,称为向量 $\vec{a}$ 的方向角,$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦.

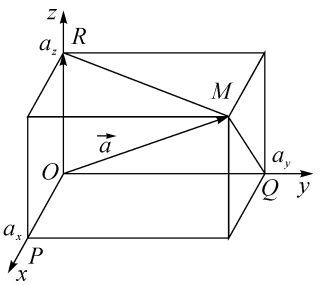


图 8.13

不难由图 8.13 看出,非零向量 $\vec{a}$ 的三个方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \tag{5}$$

因为 $\triangle OPM, \triangle OQM, \triangle ORM$ 都是直角三角形.且容易验证

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{6}$$

即任一非零向量的方向余弦的平方和等于 1.

例 5 设 $\vec{a} = (2, -2\sqrt{2}, -2)$,求 $\vec{a}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 由公式(4)及(5)得

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{2})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\beta = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\gamma = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

于是 $\alpha = 60°, \beta = 135°, \gamma = 120°$.

例 6 设向量 $\vec{a}$ 的两个方向余弦 $\cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}$,又 $|\vec{a}| = 6$,求向量 $\vec{a}$ 的坐标.

解 由公式(6)可知

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \pm\frac{2}{3}$$

由公式(5)得

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

$$a_y = |\vec{a}|\cos\beta = 6 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

$$a_z = |\vec{a}|\cos\gamma = 6 \cdot \left(\pm\frac{2}{3}\right) = \pm 4$$

所以 $\vec{a} = (2,4,4)$，或 $\vec{a} = (2,4,-4)$

例 7　设向量 $\vec{a} = \lambda\vec{i} + 2\vec{j} - k, \vec{b} = -\vec{j} + \mu\vec{k}$，问 λ,μ 为何值时 $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

解　因 $\vec{a}$ 为非零向量，由定理知 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的充要条件是存在唯一实数 λ_0，使 $\vec{b} = \lambda_0\vec{a}$，即

$$-\vec{j} + \mu\vec{k} = \lambda_0(\lambda\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$$

$$-\vec{j} + \mu\vec{k} = \lambda_0\lambda\vec{i} + 2\lambda_0\vec{j} - \lambda_0\vec{k}$$

得到

$$\begin{cases} 0 = \lambda_0\lambda \\ -1 = 2\lambda_0 \\ \mu = -\lambda_0 \end{cases}$$

解得 $\lambda_0 = -\frac{1}{2}, \lambda = 0, \mu = \frac{1}{2}$，此时 $a \parallel B$.

习题 8.1

1. 在空间直角坐标系中，说明以下各点的位置的特殊性：

$A(0,-1,0)$；$B(2,-2,0)$；$C(0,2,-2)$；$D(0,0,3)$

2. 在空间直角坐标系中，作出点 $A(3,1,2)$，并写出其关于：(1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 原点的对称点的坐标.

3. 求点 $M(4,-3,5)$ 到(1) 坐标原点；(2) 各坐标轴；(3) 各坐标面的距离.

4. 试证以点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

5. 平行四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 M，又 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$，试用向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$.

6. 已知向量 $\vec{a} = (3,5,-1), \vec{b} = (2,2,2), \vec{c} = (4,-1,-3)$，求 $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$.

7. 已知点 $M_1(-2,0,5)$ 和 $M_2(2,0,2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模和方向余弦.

8. 若 $\vec{a},\vec{b}$ 均为非零向量,问它们分别具有什么特征时,下列各式成立?

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$;　　(2) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$;

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;　　(4) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$.

9. 设向量 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$,若它满足下列条件之一:(1)$\vec{a}$ 与 z 轴垂直;(2)$\vec{a}$ 垂直于 xOy 面;(3)$\vec{a}$ 平行于 yOz 面,那么它的坐标有什么特征?

10. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(4,-4,7)$,它的终点坐标为 $B(2,-1,7)$,求它的起点 A 的坐标.

11. 设向量 $\vec{a}$ 与各坐标轴成相等的锐角,$|\vec{a}|=2\sqrt{3}$,求向量 $\vec{a}$ 的坐标.

12. 试确定数 m 和 n,使向量 $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+n\vec{k}$ 和向量 $\vec{b}=m\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ 平行.

8.2　向量的乘法运算

一、向量的数量积

1. 数量积的定义与性质

设有一质点在恒力(大小和方向均保持不变)F 的作用下,由点 A 处沿直线移动到了点 B 处,如图 8.14. 由物理学知识可求得力 $\vec{F}$ 所作的功为:

$$W=|\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos(\widehat{\vec{F},\overrightarrow{AB}})$$

像上式这样由两个向量的模与其夹角余弦所作的三项乘积,在很多计算量中经常出现.

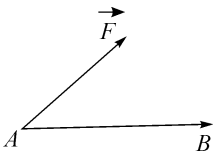


图 8.14

定义 1　两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的模及其夹角余弦的乘积称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积(又称点积或内积),记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$,即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \tag{1}$$

由数量积的定义,上述力 $\vec{F}$ 所作的功 W 就是力向量和位移向量的数量积

$$W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

定义 2　$|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ 称为向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影. 记为 $Prj_{\vec{b}}\vec{a}$,即

$$Prj_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \tag{2}$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com