全国高职高专教育“十三五”规划教材

GAODENG YINGYONG SHUXUE

高等应用数学

（下册）（第二版）

陈华峰 袁 佳 万 轩◆主编

西南交通大学出版社

文轨车书　交通天下
http://www.xnjdcbs.com

责任编辑　张宝华
封面设计　墨创 H.C CULTURE

高等应用数学

GAODENG YINGYONG SHUXUE

（下册）（第二版）

ISBN 978-7-5643-5640-8

定价：31.00元

全国高职高专教育"十三五"规划教材

高等应用数学（下册）

（第二版）

主　编　陈华峰　袁　佳　万　轩

副主编　章向明　范正权　朱志富　邹　杰

李元红　瞿先平　沈玉玲

主　审　李连启

西南交通大学出版社

·成　都·

内容简介

本书是在认真分析、总结、吸收部分高校高等应用数学课程教学改革经验基础上，本着"必需、够用、发展"的原则，以教育部高职高专教学课程的基本要求与课程改革精神及人才培养目标为依据编写的. 在取材上力求注重基础与完整，结合生活、专业课学习及运用，在讲述上深入浅出，从而达到既为学生专业功能服务，又加强基本思维素质训练的目的.

本书分为上下两册，上册内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分等，下册内容包括微分方程、无穷级数、矩阵代数、离散初步、概率初步等.

本书特色主要体现在：(1)保留并丰富了各章节知识点，采用了模块化设计；(2)根据高职学生的学习特点，对练习题进行了基础、能力、拓展三个阶段的分层进阶；(3)每章给出了知识框图，有利于学生对本章进行系统的学习.

本书内容比较全面，语言简洁、通俗，例题和练习题量比较大，细分了难易程度. 可作为高职高专院校各专业数学通用教材，也可供其他人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学. 下册 / 陈华峰，袁佳，万轩主编.
—2 版. —成都：西南交通大学出版社，2017.8
全国高职高专教育"十三五"规划教材
ISBN 978-7-5643-5640-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… ②袁… ③万… Ⅲ. ①应用数学 - 高等职业教育 - 教材 Ⅳ. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 182634 号

全国高职高专教育"十三五"规划教材

高等应用数学（下册）（第二版）

陈华峰　袁　佳　万　轩　主编

责任编辑　张宝华
装帧设计　墨创文化

印张　13.25　　字数　329千
成品尺寸　185 mm× 260 mm
版本　2017年8月第2版
印次　2017年8月第4次
印刷　成都中铁二局永经堂印务有限责任公司
出版 发行　西南交通大学出版社
网址　http://www.xnjdcbs.com
地址　四川省成都市二环路北一段111号
西南交通大学创新大厦21楼
邮政编码　610031
发行部电话　028-87600564　028-87600533

书号：ISBN 978-7-5643-5640-8　　定价：31.00元

课件咨询电话：028-87600533

第二版前言

高等应用数学是一门高职高专院校各专业公共基础必修课程，它对培养学生的思维能力有着重要的作用．本书第二版是根据教育部制定的《各专业教学标准和人才培养目标及规格》对高等应用数学课程教学基本要求，考虑到高职高专学生的特点和各专业需要，在第一版的基础上修订而成．本次修订充分吸取了教师和学生对第一版教材的建议，在保留第一版特色的同时对部分内容进行了增删，使之更能适应高职高专的教学实际和学生学习的特征．

第一版前言

时代在发展，社会在进步，人们对人才的要求越来越高. 对于高职学生来讲，只掌握专业知识已不能适应社会和企业的要求，还必须具备较强的适应能力、应变能力、学习能力、创新能力等，这样才能在日益激烈的竞争中有所成就，才能为祖国做出应有的贡献. 而这些能力的基础就是既要有丰富的专业基础知识，又要有良好的思维品质. 高等应用数学的学习就最能体现这两方面.

高等应用数学是高职高专院校各专业一门公共基础必修课程，它对于培养学生的思维能力有着重要的作用. 通过高等应用数学的学习，学生不但可以掌握处理数学问题的描述工具和方法，为后续课程的学习创造条件，而且可以提高抽象思维和逻辑推理能力，提高观察事物现象、分析问题本质、解决问题的能力，养成良好的意志力以及逻辑性、新颖性等思维习惯，并为以后的学习、工作和生活打下坚实的基础.

因此，本教材在具体编写过程中，力求既介绍高等应用数学基础知识的核心内容，做到简明扼要、通俗易懂，又注重理论联系实际，融入启发式思维训练，着重培养学生良好的思维品质，加强学生系统性、创新性、发散性、坚韧性的思维训练. 本教材是编者在结合多年高等应用数学教学经验的基础上，根据高职高专学生的学习规律与特点，参考了国内众多教材的优点并借鉴国外相关教材的特点编写而成的. 本书的主要特点如下：

（1）内容选择科学.

本教材的整个体系保持了高等应用数学具有代表性的核心内容，坚持少而精、释义清楚、学以致用的原则，内容安排上由浅入深，符合认知规律，理论严谨、叙述明确简练、逻辑性强，知识点脉络清晰. 第 1 ~ 5 章为各专业的基础必修模块，第 6 ~ 10 章为各专业的选修模块，可根据实际情况选修其中的一章或几章.

（2）结构安排先进.

教材大部分例题都融入启发式思维训练，重点突出解题思路，注重培养学生的数学思维能力和分析问题、解决问题的能力. 每一节练习题都分为基础、提高、拓展三个阶段，符合高职学生对数学学习的认知过程，而且将基础理论与相关实际问题相结合，变抽象思维

为形象思维，提高学生的思考能力，培养学生优秀的思维品质.

（3）系统组织实用.

每章都列出了知识框图，以便学生及时掌握知识点和知识结构. 并配以大量习题和思考题，每章结束均配有自测题，可供学生检测自己学习的情况.

本书内容和结构体现了我校近年来教学改革的成果. 全书分为上、下两册，共 10 章. 其中第 1、2 章由袁佳编写，第 3、7、10 章由瞿先平（重庆理工大学研究生）编写，第 4、5、6 章由万轩编写，第 8、9 章由陈华峰编写；每章节的应用题例部分由范正权和朱志富编写；全书由陈华峰统稿.

最后，特别感谢李连启教授为审阅本书所付出的辛勤劳动. 感谢西南交通大学出版社的大力支持，使本书得以顺利出版.

由于编者水平有限，加之完成时间仓促，书中难免有不妥或错误之处，恳请广大读者批评指正.

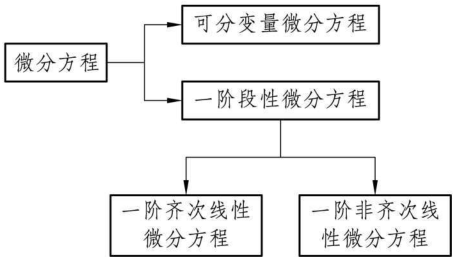
编　者

2015 年 1 月

目　录

第六章　微分方程

微分方程是现代数学的一个重要分支，是人们解决各种实际问题的有效工具，它在几何、力学、物理、电子技术、自动控制、航天、生命科学、经济等领域都有着广泛的应用．本章主要讨论微分方程的一些基本概念以及常见的简单微分方程的解法．其知识结构图如下：



【学习能力目标】

- 知道微分方程，了解微分方程的阶、解、通解、特解、初始条件等概念，能够熟练地判断微分方程的阶数．
- 理解微分方程特解与通解的关系．
- 掌握可分离变量微分方程及一阶线性微分方程的解法．
- 会建立简单的微分方程模型．

第一节　微分方程的概念

函数是客观事物的内部联系在数量方面的反映，利用函数关系可以对客观事物的规律进行研究．因此如何寻找出所需要的函数关系，在实践中具有重要意义．在许多问题中，往往不能直接找出所需要的函数关系，但是根据问题所提供的情况，有时可以列出含有要找的函数及其导数的关系式，这样的关系式就是所谓的微分方程．微分方程建立以后，对它进行研究，找出未知函数，这就是解微分方程．

例 1. 1　一曲线通过点 $(1,2)$ ，且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为 $2x$ ，求该曲线的方程．

解　设所求曲线的方程为 $y=f(x)$ ，由导数的几何意义可知 $y'=2x$ ，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$$

即

$$\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x \tag{1}$$

同时还满足以下条件：

$$当\ x=1\ 时，\ y=2 \tag{2}$$

对（1）式两边同时求积分可得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x$$

解得

$$y=x^2+C \tag{3}$$

其中 C 为任意常数．

把条件（2）代入（3）式，可得

$$2=1^2+C$$

即 $C=1$，于是所求曲线的方程为

$$y=x^2+1 \tag{4}$$

例 1.2　汽车在平直线路上以 25 m/s 的速度行驶，当制动时汽车获得加速度 $-0.5\ \mathrm{m/s^2}$，求开始制动后多少时间才能使汽车停住，以及汽车在这段时间里行驶了多少距离？

解　设汽车开始制动后 t s 时行驶了 s m．根据题意，所求函数 $s=s(t)$ 满足：

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-0.5 \tag{5}$$

同时还满足以下条件：

$$当\ t=0\ 时，\ s=0，\ v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=25 \tag{6}$$

对（5）式两边同时求积分可得

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-0.5t+C_1 \tag{7}$$

再积分一次，即对（7）式两边同时求积分可得

$$s=-0.25t^2+C_1t+C_2 \tag{8}$$

其中 C_1 和 C_2 均为任意常数．

把条件（6）中"$t=0$ 时，$v=25$"和"$t=0$ 时，$s=0$"分别代入（7）式和（8）式，得 $C_1=25$，$C_2=0$．将 $C_1=25$ 和 $C_2=0$ 代入（7）式和（8）式，得

$$v=-0.5t+25 \tag{9}$$

$$s=-0.25t^2+25t \tag{10}$$

在（9）式中令 $v=0$，得汽车从开始制动到完全停止所需的时间：

$$t=\frac{25}{0.5}=50(\mathrm{s})$$

再把 $t=50$ 代入(6.10)式，得到汽车在制动阶段行驶的距离：

$$s=-0.25\times 50^2+25\times 50=625(\mathrm{m})$$

上述两例中，(1）式和（5）式都是含有未知函数的导数（或微分），它们都是微分方程．

一般地，凡含有未知函数的导数（或微分）的方程叫做微分方程．微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶．

例如：（1）式，$F(x,y,y')=0$，$y'=f(x,y)$ 均是一阶微分方程；

（5）式，$y''+2xy=\cos x+\mathrm{e}^x+2$ 均是二阶微分方程；

$y^{(4)}+3y''+5y=x+2$ 是四阶微分方程；

$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$，$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 均是 n 阶微分方程．

形如

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

的微分方程，称为线性微分方程；否则，称为非线性微分方程．

未知函数及未知函数的导数都是一次函数是线性微分方程的必要条件，但不是充分条件．

例如：$y'+P(x)y=Q(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\sin^2 x$ 和 $xy'''+2y''+x^2y=0$ 均为线性微分方程，而 $x(y')^2-2yy'+x=0$，$yy'+x=1$ 和 $y'+x\sin y=x^2+1$ 均是非线性微分方程．

如果将某个函数以及它的各阶导数代入微分方程，能使得方程恒成立，这个函数称为微分方程的解．

例如：（3）式和（4）式均是微分方程（1）的解，（8）式和（10）式均是微分方程（5）的解．

微分方程的解有两种不同的形式：

一种是微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解；

例如：一阶微分方程（3）是微分方程（1）的通解，其中有一个任意常数；

二阶微分方程（8）是微分方程（5）的通解，其中有两个任意常数；

一阶微分方程 $y'=y$ 的通解为 $y=C\mathrm{e}^x$，其中 C 为任意常数；

二阶微分方程 $y''+y=0$ 的通解为 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$，其中 C_1 和 C_2 均为任意常数．

另一种是确定了通解中的任意常数以后得到的解，即不含任意常数的解叫做微分方程的特解．

例如：（4）式是微分方程（1）的特解；（10）式是微分方程（5）的特解．

用于确定通解中任意常数的条件，称为初始条件，例如，（2）式和（6）式．

例 1.3　验证：函数 $x=C_1\cos t+C_2\sin t$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x=0$ 的解，并求满足初始条件 $x\big|_{t=0}=1,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0$ 的特解．

解　所给函数的导数及二阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-C_1\sin t+C_2\cos t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-C_1\cos t-C_2\sin t$$

将 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ 及 x 的表达式代入所给方程，得

$$-C_1\cos t - C_2\sin t + C_1\cos t + C_2\sin t \equiv 0$$

这表明函数 $x = C_1\cos t + C_2\sin t$ 是微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x = 0$ 的解．

将初始条件 $x\big|_{t=0} = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 0$ 分别代入 x 及 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 的表达式可得 $C_1 = 1$ ，$C_2 = 0$ ．将 $C_1 = 1$ 和 $C_2 = 0$ 代入 $x = C_1\cos t + C_2\sin t$ 中，可得特解

$$x = \cos t$$

习题 6.1

基础练习

1．指出下列微分方程的阶，并判断它们是否为线性微分方程．

（1） $x^2y'' + xy' + 2y = \cos x$ ；　（2） $(1+y)y'' + xy' + y = \mathrm{e}^x$ ；

（3） $y''' + \sin(x+y) = \sin x$ ；　（4） $y^{(n)} + y' + xy = 0$ ；

（5） $y' + P(x)y = Q(x)$ ；　（6） $y' + xy^2 = x^3 + 1$ ．

2．验证下列各函数是否为相应微分方程的解．

（1） $y' = y^2 - (x^2+1)y + 2x$ ，$y = x^2 + 1$ ；

（2） $(1-x^2)y' + xy = 2x$ ，$y = 2 + C\sqrt{1-x^2}$ ，C 为任意常数．

提高练习

3．对下列每个微分方程分别求出 r 的值，使得 $y = \mathrm{e}^{rx}$ 是它的解．

（1） $y' + 2y = 0$ ；　（2） $y'' - y = 0$ ；

（3） $y'' + y' - 6y = 0$ ．

4．一质量为 $m\,\mathrm{g}$ 的物体从 $1\,\mathrm{m}$ 的高度以初速度 $20\,\mathrm{m/s}$ 铅直向上抛出．设空气阻力可以忽略，试建立该物体的运动方程，并计算它达到最高点时的时间和高度．

拓展练习

5．给定一阶微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$ ．

（1）求出它的通解；

（2）求通过点 $(1,4)$ 的特解；

（3）求出与直线 $y = 2x + 3$ 相切的解；

（4）求出满足条件 $\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x = 2$ 的解．

第二节　可分离变量的微分方程

如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$$

的形式，就是说，能把微分方程写成一端只含 y 的函数和 $\mathrm{d}y$，另一端只含 x 的函数和 $\mathrm{d}x$，那么原方程就称为可分离变量的微分方程．

例如：微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}}$ 可改写为

$$y^{-\frac{4}{5}}\mathrm{d}y = 2x^2\mathrm{d}x$$

则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}}$ 为可分离变量的微分方程．

可分离变量的微分方程的解法：

第一步：分离变量，将方程改写成 $g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$ 的形式；

第二步：两端同时积分：$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$ ，积分后得 $G(y) = F(x) + C$ ；

第三步：求出由 $G(y) = F(x) + C$ 所确定的隐函数 $y = \Phi(x)$ 或 $x = \Psi(y)$ ．

注意：$G(y) = F(x) + C$ ，$y = \Phi(x)$ 和 $x = \Psi(y)$ 均为方程的通解，其中 $G(y) = F(x) + C$ 称为隐式（通）解．

例 2.1　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy$ 的通解．

解　此方程为可分离变量的微分方程，分离变量后得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$$

对上式两端同时积分，得

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int 2x\mathrm{d}x$$

即
$$\ln|y| = x^2 + C_1$$

从而
$$y = \pm \mathrm{e}^{x^2 + C_1} = \pm \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}$$

因为 $\pm \mathrm{e}^{C_1}$ 仍是任意常数，把它记作 C ，便得所给方程的通解

$$y = C\mathrm{e}^{x^2}$$

例 2.2　求微分方程 $y' = y^2 + 2xy^2$ 的通解．

解　此方程为可分离变量的微分方程，分离变量后得

$$\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = (1 + 2x)\mathrm{d}x$$

对上式两端同时积分，可得

$$\int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \int (1+2x)\mathrm{d}x$$

即
$$-\frac{1}{y} = x + x^2 + C$$

故所给方程的通解为
$$y = -\frac{1}{x + x^2 + C}$$

例 2.3 求微分方程 $(1+x)y\mathrm{d}x + (1-y)x\mathrm{d}y = 0$ 的通解．

解 此方程为可分离变量的微分方程，分离变量后得

$$\frac{1-y}{y}\mathrm{d}y = -\frac{1+x}{x}\mathrm{d}x$$

对上式两端同时积分，可得

$$\int \frac{1-y}{y}\mathrm{d}y = -\int \frac{1+x}{x}\mathrm{d}x$$

解之可得所给方程的通解

$$\ln|y| - y = -\ln|x| - x + C \quad \text{或} \quad \ln|x| + \ln|y| + x - y = C$$

习题 6.2

<u>基础练习</u>

1．判断下列微分方程是否为可分离变量的微分方程．

（1）$y' = 2xy(1+y^2)$；（2）$(1+xy)y' + xy = 0$；

（3）$(y-1)^2 y' = 2x + 3$；（4）$xy' + xy = 1$；

（5）$y' = \mathrm{e}^{x-y}$；（6）$y' + \sin(x+y) = \sin x$．

2．求下列微分方程的通解．

（1）$y' = xy + y$；（2）$y'\sin y = 2x + \mathrm{e}^x$；

（3）$(3y^2 + 4y)y' + 2x + \cos x = 0$；（4）$x^2 y' = y - xy$；

（5）$(1+x^2)y' + y = 0$；（6）$y' = (2x + 4x^3)\mathrm{e}^{-y}$．

3．求微分方程 $(y-2)y' = x^2 + 3x + 2$ 满足初始条件 $y(1) = 4$ 的特解．

<u>提高练习</u>

4．求下列微分方程的通解．

（1）$(y+1)^2 y' = x^2 y \ln x$；（2）$xy' = \ln x$；

（3）$2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{x\sin x}{y}$；（4）$(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$；

（5）$y' + x\mathrm{e}^{x-y} = 0$；（6）$xy' = (y^2+1)(2\ln x + 1)$．

5．求微分方程 $y'=\mathrm{e}^{2x-y}$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解．

拓展练习

6．求微分方程 $(1+x^4)\mathrm{d}y+x(1+4y^2)\mathrm{d}x=0$ 的通解．

7．设雪球在融化时体积的变化率与表面积成比例，且在融化过程中它始终为球体．该雪球在开始时半径为 6 cm，经过 2 h 后，其半径缩小为 3 cm．求雪球的体积随时间变化的关系．

第三节　一阶线性微分方程

形如

$$y'+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$

的微分方程称为一阶线性微分方程．当 $Q(x)=0$ 时，(1) 式称为一阶齐次线性微分方程；当 $Q(x)\neq 0$ 时，(1) 式称为一阶非齐次线性微分方程．

方程 $y'+P(x)y=0$ 叫做对应于一阶非齐次线性方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的一阶齐次线性方程．

一阶齐次线性方程 $y'+P(x)y=0$ 是一个可分离变量的微分方程，分离变量后得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=-P(x)\mathrm{d}x$$

对上式两端同时积分，可得

$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+C_1$$

即

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\quad (C=\pm\mathrm{e}^{C_1}) \tag{2}$$

这就是一阶齐次线性方程的通解（积分中不再加任意常数）.

在给出一阶非齐次线性微分方程的求解方法之前，先看一个例子．

例 3.1　求微分方程 $y'+y=1$ 的通解．

解　此方程不是可分离变量的微分方程，很难直接积分．但是，若在微分方程的两端同时乘以 e^x，原方程就变成

$$\mathrm{e}^x y'+\mathrm{e}^x y=\mathrm{e}^x$$

可以看出，上式的左端是函数 $\mathrm{e}^x y$ 的导数，而右端是只含 x 的表达式，故对等式两端同时积分

$$\int(\mathrm{e}^x y'+\mathrm{e}^x y)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

即
$$\int(\mathrm{e}^x y)'\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

得
$$\mathrm{e}^x y=\mathrm{e}^x+C$$

两端同时除以 e^x，得原方程的通解为