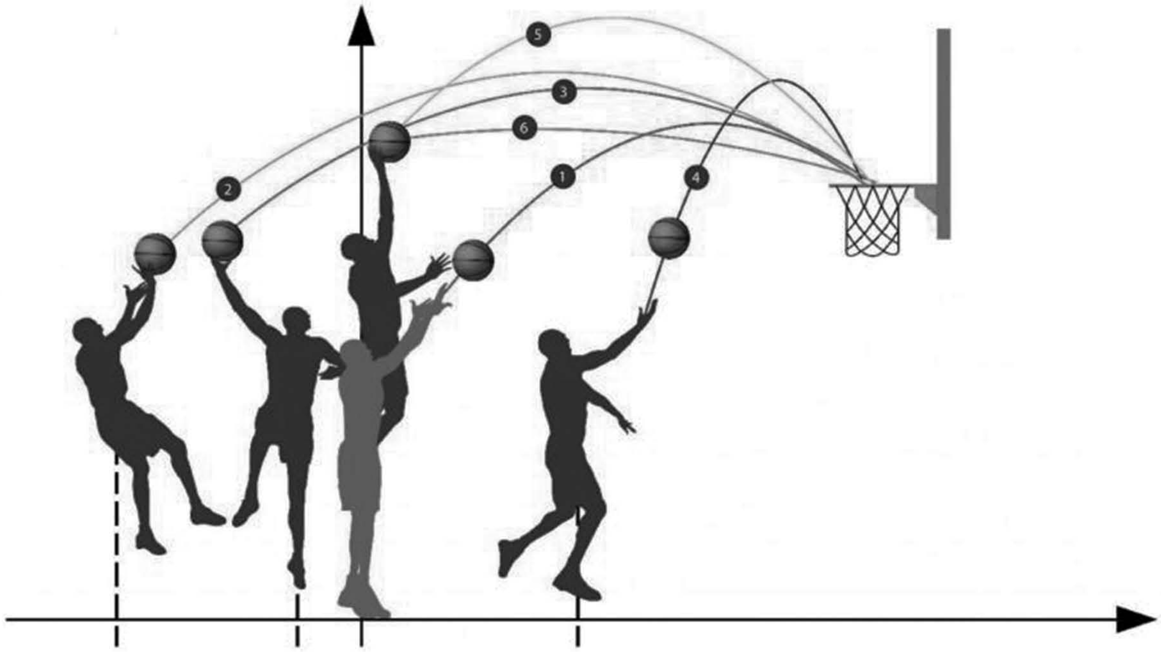
万伟华 著

点线式

秒杀中考数学压轴题

广东人民出版

菁优网 jyeoo.com 名师系列丛书



万伟华 著

点线式
秒杀中考数学压轴题

SPM 南方出版传媒 广东人民出版社
·广 州·

图书在版编目(CIP)数据

点线式秒杀中考数学压轴题/万伟华著. —广州：广东人民出版社，2017.3(2020.1 重印)
ISBN 978－7－218－11612－9

Ⅰ.①点…　Ⅱ.①万…　Ⅲ.①中学数学课—初中—题解—升学参考资料　Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 025951 号

DIANXIANSHI MIAOSHA ZHONGKAO SHUXUE YAZHOUTI

点线式秒杀中考数学压轴题

万伟华　著

版权所有　翻印必究

出 版 人： 肖风华

责任编辑： 张竹媛　梁淑娴　林窕窕
封面设计： 陈小丹
责任技编： 周　杰　吴彦斌
特约编辑： 郭军方

出版发行： 广东人民出版社
地　　址： 广东省广州市海珠区新港西路 204 号 2 号楼(邮政编码：510300)
电　　话： (020)85716809(总编室)
传　　真： (020)85716872
网　　址： http：//www.gdpph.com
印　　刷： 广东鹏腾宇文化创新有限公司
开　　本： 880 毫米×1230 毫米　1/16
印　　张： 18　　**字　　数：** 385 千
版　　次： 2017 年 3 月第 1 版
印　　次： 2020 年 1 月第 6 次印刷
定　　价： 39.80 元

如发现印装质量问题，影响阅读，请与出版社(020－85716808)联系调换。
售书热线： (020)85716826

序

第一次看到这个作品，让我惊叹不已，所谓“大道至简”，作者敏锐地捕捉到函数的本质：点、线、式。由线思点，由点列线，由线列式。方法独到，精彩绝伦。为广大师生开辟了一个全新的思维体系。

万伟华老师长期从事一线教学，潜心研究全国各地的中考数学压轴题，怀着对学生的真挚关爱及浓厚的教育情怀，结合个人的思考与教学实践，独辟蹊径，用独特的视角探索出一套针对中考数学压轴题极为有效的解题方法和思路，凭借顽强的毅力完成了《点线式秒杀中考数学压轴题》这部力作。这本书的最大特色就是运用数形结合的思想，以简驭繁、返璞归真。万老师将解决中考压轴题的各种方法精简、化归为七条黄金法则，通过点线式破解中考数学压轴题。用此法解题，目标明确，层次清晰，过程简单，故秒杀中考数学压轴题就名副其实了。

万老师聚焦中考数学压轴题，以全新的视角给出了解题的通法。本书选取了近几年全国各地具有代表性的中考数学压轴题，题型归纳精准，方法总结到位，思路新颖独特，解题简明扼要。纵览全书，作者对每个章节的通法进行高度提炼，归纳出七条黄金法则，以不变应万变，找到了解题的密匙，真正达到一法通类、多题一解、举一反三的效果。各个章节看似独立，实则联系紧密，一条主线贯穿始终。点、线、式，不仅作为本书的核心解题思想，更为笛卡尔的思想体系做了完美的补充，可谓特色鲜明，方法独到，经典秒杀。为那些在难题面前彷徨、徘徊，甚至退缩的莘莘学子点燃了挑战困难的希望，找到了克敌制胜的法宝。

与市面上林林总总的中考数学压轴题作品相比，本书的解题方法、解题思路、解题过程都显得别具一格，令人大开眼界。作品立意高，有深刻的历史背景，真正回归到笛卡尔创建坐标系的本质，纵览此书，可谓颠覆传统，构思奇妙；另辟蹊径，独具匠心；巧用点线，妙用数形；化解难题，出奇制胜；解答热点，得心应手；攻克难点，拨云驱雾；快速突破，技压群芳。吾惊叹：《点线式秒杀中考数学压轴题》，乃攻克中考数学压轴题之神盾利器也！

本书语言朴实，通俗易懂，作为中考冲刺配套教辅，特别适合中等生及优等生的快速提升。也许

不同的老师有不同的观点，数学思想方法总是能给我们带来意想不到的期待、兴奋与激动。深刻体会本书的精髓，实有醍醐灌顶之感，可以预见，此书提供的方法必将成为主流，成为中考的杀手锏。感谢万老师的力作，为我们研究中考数学压轴题打开了另一扇门窗，让我们看到了别样的风景、别样的美丽！

于新华

2017 年 2 月于常州

前　言

长期以来，中考数学压轴题一直是初中教学的软肋，也是同学们的梦魇。作为长期奋斗在教学一线的教师，如果用一句话来形容笔者在讲解压轴题的感受，那便是：“蜀道难，难于上青天。”正因为如此，笔者相信很多教师甚至完全放弃了此类问题的讲解，以致学生失去了宝贵的思维训练机会，教师的业务能力也难以得到真正的锻炼。

二次函数压轴题一般是以二次函数为载体去探讨几何图形中的点、线、角、面积、恒等式证明等问题。传统解法通常以几何知识为载体，并应用全等、相似、勾股定理等知识去解决此类问题，在解题过程中需构建多条辅助线。因此传统的几何解法不仅非常繁琐，难以思考，而且笔者认为，这种解法本身就值得商榷。

我们非常熟悉的平面直角坐标系，原名笛卡尔坐标系，在笛卡尔之前，几何与代数在数学中分属两个完全不同的研究领域。因此，笛卡尔提出必须把几何与代数的优点结合起来，建立一种“真正的数学”。笛卡尔的思想核心如下：把几何学的问题归结成代数形式的问题，用代数学的方法进行计算、证明，从而达到最终解决几何问题的目的。笛卡尔的这一天才创举为几何与代数之间建立起一座便捷的桥梁，它使几何概念和几何图形可以用代数形式来表示。于是代数和几何两个完全不同的学科就这样有机的融合，成为一个不可分割的整体。因此，建立平面直角坐标系的目的和意义就在于用代数方法来解决几何问题，真正实现数与形的完美统一。

初中阶段学生已经完全掌握了直线方程的解法，而直线方程恰恰是解决此类问题的最有力的工具。因此，笔者认为只要在初中阶段引入直线方程的几何意义，很多类似二次函数的超级难题便可迎刃而解。由此，笔者得出结论：用传统的几何解法解决此类问题，不仅让学生在初中阶段无法透彻理解学习平面直角坐标系与直线方程的真正目的和意义，更与学习平面直角坐标系的初衷背道而驰。传统的几何解法对每道题要寻找一种相应的思路，不仅解题头绪众多，思路不明朗，而且辅助线繁杂，还特别容易出现漏解，学生难以理解和掌握，大大加重了学生的负担，并引起学生和教师的普遍抵触，难以达到训练学生思维的目的。长期存在的教学窘状充分地证明了传统解法的缺陷，身处一线的各位教师应该深有感触。因此，传统的几何解法不仅不符合人的认知规律，也不符合数学思想。

引入直线方程的几何意义之后，解题方法变得非常有序，解题过程也变得十分简洁，同时也符合人的思维习惯，符合数学思想，能从真正意义上减轻学生负担，并能让学生更直观地认识到学习平面直角坐标系和直线方程的重大意义和真正价值；也更加有利于教师的教学，提高学生的学习兴趣，增强学生解决难题的能力和信心，更好为初高中知识做好衔接，尤为关键的是教师的专业能力也可通过此类问题的探究和讲解得以提升。

笔者提出了一个崭新的解题思想，即点、线、式。笔者相信，这个解题思想回归到数学本质，是对笛卡尔坐标系的有力补充。笔者将绝大部分二次函数压轴题放在该解题思想下，并将其分门别类，使得二次函数压轴题的解题方法显得非常有序，解题目标明确，解题层次清晰，解题过程简洁，同时省去了繁杂的几何构建，分类讨论也能面面俱到。虽然该方法有种种好处，但不可否认的是，某些题目计算量偏大，对运算能力要求比较高，而传统的几何构建方法有许多精巧的构思，如矩形构造法、一线三等角等，可大大简化运算。大多数情况下，几何构造相对繁杂，辅助线众多，学生难以理解和掌握。因此，在解题过程中，应根据题目本身的特点灵活应用，不可过于机械。

笔者多年的教学实践雄辩地证明本书所提出的观点是符合教学实际的，必将为初中数学的教育工作者提供崭新的教学思路，同时，也为莘莘学子提供一个全新的思维体系。中考数学压轴题本来就是为考查学生综合能力而设置的，其中所体现的解题思想或多或少会涉及高中知识，因此，对教师而言，了解此类问题深层次的背景显得尤为重要。多次的教材改革无可辩驳地说明了一个事实：“纲”并非一成不变，比如曾是大学内容的空间向量、微积分等知识引入高中数学教材，再比如曾是高中内容的概率、统计等知识编入初中数学教材，还有被奉为经典欧氏几何的众多定理从教材中删去……之所以如此，笔者相信编写教材的专家是经过反复论证、不断权衡得出的，作为一线教师，只能顺应时代潮流，与时俱进。数学王子高斯小学的时候就采用高中数列求和的知识来求 $1+2+3+\cdots+100$ 的故事之所以成为千古佳话，正因为其解题思想深刻揭示了此类问题的本质，令人拍案叫绝！因此，笔者建议初中数学教师应该多学习高中的数学内容，一方面，可丰富自己的数学涵养；另一方面，可居高临下地看待这些问题。本书所阐述的观点特别希望能得到编写初中数学教材的专家的批评和指正。

本书的创作得到全国多位数学专家的启迪：江苏省数学特级教师、江苏省十大杰出青年、中国数学奥赛教练员、全国知名教研员于新华老师(数学王子)，黑龙江省数学高级教师、知名教研员孙立军老师(金狮子)，浙江省数学特级教师、知名教研员郦兴江老师，江苏省数学高级教师、知名教研员钱德春老师，四川成都极客数学帮帮主吴小平老师(两把刷子)，江苏省数学特级教师庞彦福老师，正高级教师、特级教师李长春老师，浙江省数学教师刘俊勇老师，安徽省数学高级教师储王水老师，安徽省数学高级教师刘会群老师，黑龙江省数学高级教师王几何老师，北京市数学教师方白雪老师，全国著名几何画板专家、天津市数学高级教师李玉强老师，江苏省数学教师王震伟老师，福建省数学高级教师林福凯老师，黑龙江省数学高级教师林志坚老师，黑龙江省数学高级教师聂文钰老师，云南省数学教师郑帆老师，江苏省数学教师万广磊老师，北京市数学教师占岩老师，四川省成都七中范波老师，黑龙江省数学教师窦龙(DL)老师，江苏省数学教师吴佑谦老师，湖北省天门市华泰中学刘思洋老师，北京市数学教师谭计韬老师，重庆市万州国本中学校牟方田老师，江西省南昌市第二中学高级教师刘冰老师，南昌二十八中高新实验学校校长、高级教师李仲华老师，深圳市龙华中学高级教师康海芯老师，南昌市第一中学高级教师罗仁茂，菁优教育(835922)联合创始人刘日芬老师，广东人民出版社特约编辑郭军方老师，以上诸位老师为本书提供了许多宝贵的意见和建议，在此笔者对诸位老师的指点和帮助表示由衷的感谢!

由于笔者水平有限，成书仓促，有些疏漏在所难免，恳请读者指出，笔者万分感谢。

万伟华
2017 年 2 月于南昌

目　录

第一部分　点线式秒杀解题方法大揭秘

第二部分　点线式秒杀解题思路详解

后　记

第一部分

点线式秒杀解题方法大揭秘

七条黄金法则的表述、用途及其证明

各位九年级的莘莘学子，你们将迎来人生一个重要的时刻——中考，面对中考数学压轴题，你想快速掌握解题诀窍吗？你想立刻找到解题思路吗？那么请和笔者一起来揭秘中考数学压轴题.

课堂上令人眼花缭乱的辅助线是否让你如坠云雾？纷繁复杂的思路是否让你一筹莫展？各种中考真题是否让你束手无策？如果笔者告诉你，只用一套公式化的解题方法和程式化的解题思路，便可横扫绝大部分二次函数中考压轴题，你愿意学吗？

笔者从事数学教育工作多年，经过长期的探索和积淀，终于探索出一套针对中考数学压轴题极为有效的解题方法和解题思路，不仅解题思路简单，而且速度超快. 解答中考数学压轴题绝非你想象的那样高不可攀，事实上，本人仅用几个简单的公式和解题策略就轻松搞定. 相信你精读此书后定会茅塞顿开，豁然开朗，并得出结论，中考数学压轴题，不过尔尔.

为解决平面直角坐标系中出现的垂直问题，本书引用于新华老师提出的“纵横比”的观点，在此笔者表示崇高敬意.

“纵横比”：依附直线上任意两点，构建直角三角形，使得横直角边平行 x 轴，纵直角边平行 y 轴，纵直角边与横直角边的长度之比，即为“纵横比”. 引入“纵横比”的概念之后，可有效解决平面直角坐标系中的垂直问题，特别是题目涉及的参数点较为复杂，如出现高次或不止一个参数，通常优先选择“纵横比”，利用相似求解. 其解题的核心思想就是“斜转直”，即将倾斜的两条直角边之比转化为横平竖直的直角边之比，利用相似，从而求解. 事实上，初中阶段解决垂直问题的主要通法有两种：一是利用相似；二是利用勾股定理.

“宽高公式”：为解决平面直角坐标系中出现的面积问题，本书引入三角形的面积公式：“宽高公式”，即水平底与铅垂高的积的一半. 此公式由三角形面积公式衍生而来，是解决面积问题的利器，一般通过三角形的动点作 x 轴或 y 轴的垂线的方法，动点用参数表示其坐标，代入公式便可列式求解. 特别注意的是，若水平底或铅垂高的位置关系非常明确，可以直接使用；若水平底或铅垂高的位置关系不明确，务必使用绝对值. 其解题的核心思想仍是“斜转直”，即将任意三角形的面积通过割补，转化为横平竖直的点坐标，利用“宽高公式”，从而求解.

闲话少叙，进入正题，首先你要学习以下七个公式，由于这些公式是构成本书的重要工具，因此笔者称之为七条黄金法则.

一、七条黄金法则的表述

1. （平行公式）若 $l_1 /\!/ l_2$，则 $k_1 = k_2$；若 $k_1 = k_2$，且 $b_1 \neq b_2$，则 $l_1 /\!/ l_2$.

2. （垂直公式）若 $l_1 \perp l_2$（直线 l_1，l_2 不为坐标轴），则直线 l_1 与 l_2 的“纵横比”互为倒数.

若直线 l_1 与 l_2 不关于直线 $y = x$ 或 $y = -x$ 对称且直线 l_1 与 l_2 的“纵横比”互为倒数，则 $l_1 \perp l_2$.

若 $a^2 + b^2 = c^2$，则 $l_1 \perp l_2$；若 $l_1 \perp l_2$，则 $a^2 + b^2 = c^2$.

3. （“纵横比”）依附直线上任意两点，构建两直角边分别平行 x 轴、y 轴的直角三角形，“纵直角边”与“横直角边”的长度之比.

4. （两点的间距离公式）$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

5. （中点公式）$x_{中} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$，$y_{中} = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

6. （三角形的面积公式）$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}|水平底 \times 铅垂高|$.

7. （直线对称公式）若直线 l_1 与 l_2 关于 x 轴或 y 轴或平行 x 轴或 y 轴的直线对称，则描述两直线的倾斜程度的 k 互为相反数.

以上七个公式大家一定要牢牢记住，并要求熟练掌握和应用，绝大部分二次函数中考压轴题都可用这些公式解决.

二、七条黄金法则的用途

黄金法则一用于两直线平行时求直线的倾斜程度的问题.

黄金法则二用于垂直问题的构建和证明.

黄金法则三主要用于表示直线上任意两点的“纵横比”.

黄金法则四主要用于求两点间的距离(线段的长度).

黄金法则五主要用于求线段的中点.

黄金法则六由三角形面积公式演化而来，主要用于表示动点面积.

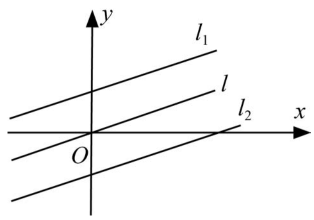
黄金法则七主要用于直线的对称、折叠等问题

大家可以发现，其实这七个公式都与点的坐标有关，因此我们的解题方针就是三部曲：列点、列线、列式.

所谓列点，就是找出所有与题目相关的点的坐标，包括定点和动点，定点自然简单，动点一般用参数 t 表示其坐标，这是解题的灵魂，所以一定要认真和仔细，确保每个点的精确表达. 所谓列线，就是按照题目要求列出线与线的数量或位置关系，并分类讨论. 所谓列式，就是在列线的基础上把点的坐标代入，得出等式，这样就可以求解了.

三、七条黄金法则的证明

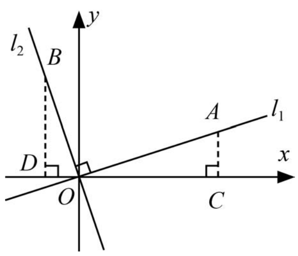
黄金法则一：平行公式



若 $k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$，则 $l_1/\!/l_2$.（源于教材中一次函数的图象平移）

若 $l_1/\!/l_2$(不与 y 轴平行)，则 $k_1=k_2$.（源于教材中一次函数的图象平移）

黄金法则二：垂直公式



若 $l_1\perp l_2$(直线 l_1，l_2 不为坐标轴)，则两直线的“纵横比”互为倒数.

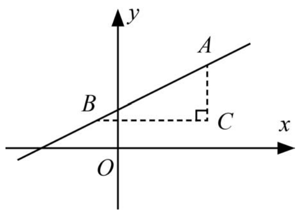
若 $l_1\perp l_2$(直线 l_1，l_2 不为坐标轴)，则$\dfrac{AC}{OC}=\dfrac{OD}{BD}$.

如图，易证$\triangle ACO\backsim\triangle ODB$. 所以$\dfrac{AC}{OC}=\dfrac{OD}{BD}$.

若两直线的“纵横比”互为倒数，且直线 l_1，l_2 不关于 $y=x$ 或 $y=-x$ 对称，则 $l_1\perp l_2$.

若$\dfrac{AC}{OC}=\dfrac{OD}{BD}$，则 $l_1\perp l_2$. 证明略.

黄金法则三：“纵横比”



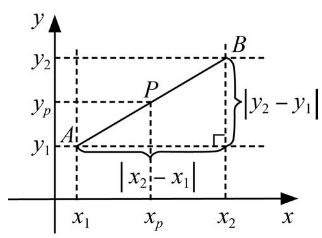
直线上任意两点构建直角三角形，两直角边分别平行坐标轴，纵直角边与横直角边的长度之比为“纵横比”.

如图，若 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点在直线 AB 上，则直线 AB 的“纵横比”为$\left|\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right|$.

黄金法则四：两点间的距离公式

如图，在平面直角坐标系中，A，B 两点的坐标分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由勾股定理，得 $AB^2=|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2$.

所以 $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.



黄金法则五：中点公式

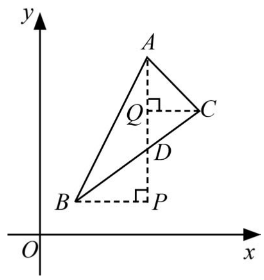
如图，设线段 AB 的中点 P 的坐标为（x_P，y_P），由 $x_P-x_1=x_2-x_P$，得 $x_P=\dfrac{x_1+x_2}{2}$. 同理 $y_P=\dfrac{y_1+y_2}{2}$. 所以线段 AB 的中点 P 的坐标

为$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

黄金法则六：三角形的面积公式 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|$水平底×铅垂高$|$

如图，若 B，C 两点位于 AD 的异侧，则

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}\\&=\frac{1}{2}AD\cdot BP+\frac{1}{2}AD\cdot CQ\\&=\frac{1}{2}AD(BP+CQ).\end{aligned}$$

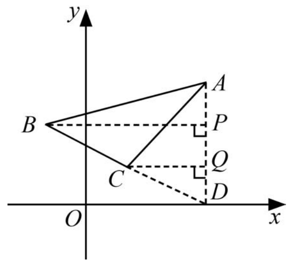


$\because AD=y_A-y_D$（铅垂高），$BP+CQ=x_C-x_B$（水平底），

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|(y_A-y_D)(x_C-x_B)|$.

如图，若 B，C 两点位于 AD 的同侧，则

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle ACD}\\&=\frac{1}{2}AD\cdot BP-\frac{1}{2}AD\cdot CQ\\&=\frac{1}{2}AD(BP-CQ).\end{aligned}$$



$\because AD=y_A-y_D$（铅垂高），$BP-CQ=x_C-x_B$（水平底），

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|(y_A-y_D)(x_C-x_B)|$.

黄金法则七：直线对称公式

如图，已知 $A(a, b)$．若直线 OA 与 OB 关于 y 轴对称，则 $k_{OA}+k_{OB}=0$；若直线 OA 与 OC 关于 x 轴对称，则 $k_{OA}+k_{OC}=0$.

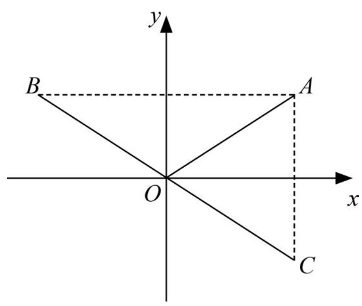
$\because A(a, b)$，$\therefore$ 直线 OA 的方程为 $y=\frac{b}{a}x$.

$\because B$，A 两点关于 y 轴对称．$\therefore B(-a, b)$.

$\therefore$ 直线 OB 的方程为 $y=-\frac{b}{a}x$.

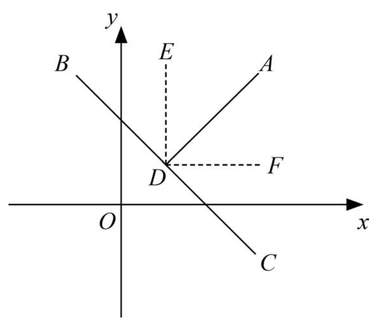
$\therefore k_{OA}+k_{OB}=0$.

同理可得 $k_{OA}+k_{OC}=0$.



如图，已知 $A(a, b)$．若直线 DA 与 DB 关于平行 y 轴的直线 DE 对称，则 $k_{DA}+k_{DB}=0$；若直线 DA 与 DC 关于平行 x 轴的直线 DF 对称，则 $k_{DA}+k_{DC}=0$.

此时的图形可视为是上一种情形的图形平移而来，同理可证明.



“坐标平移法”名词解释及其例题赏析

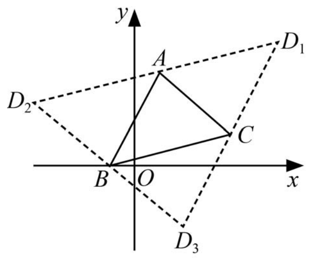
“坐标平移法”：由于平行四边形的一边可看成由另一条对边平移而成，相应的点的坐标也可视为平移而来．用“坐标平移法”解题时，应根据具体题目灵活使用，某些问题选择其他方法处理可能更为简便，但此法是解决平行四边形的通法．

若 A，B，C 三点的坐标已知，则以 $\triangle ABC$ 构建的平行四边形的顶点 D_1，D_2，D_3 的坐标可由 A，B，C 三点的坐标确定．若 A，B 两点的坐标已知，点 C 为直线上的动点，则可用参数 t 表示点 C 的坐标，以点 $\triangle ABC$ 构建的平行四边形的顶点 D_1，D_2，D_3 的坐标也可用参数 t 表示．

特别注意：若平行四边形的四个顶点之间无逗号隔开，则只有一种可能性；若平行四边形的四个顶点有逗号隔开，则有多种可能性．

【例 1】如图，已知 $A(1,3)$，$B(-1,0)$，$C(4,1)$，点 D 为平面直角坐标系上的一点．若以 A，B，C，D 四点为顶点的四边形为平行四边形，求点 D 的坐标．

解：由以 A，B，C，D 四点为顶点的四边形为平行四边形，得点 D 的坐标有以下三种情况：



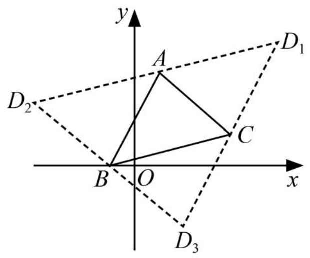
①$\because \begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B, \\ y_D - y_A = y_C - y_B, \end{cases} \therefore \begin{cases} x_D = x_C + x_A - x_B, \\ y_D = y_C + y_A - y_B. \end{cases} \therefore D_1(6,4).$

②$\because \begin{cases} x_D - x_A = x_B - x_C, \\ y_D - y_A = y_B - y_C, \end{cases} \therefore \begin{cases} x_D = x_B + x_A - x_C, \\ y_D = y_B + y_A - y_C. \end{cases} \therefore D_2(-4,2).$

③$\because \begin{cases} x_D - x_B = x_C - x_A, \\ y_D - y_B = y_C - y_A, \end{cases} \therefore \begin{cases} x_D = x_C + x_B - x_A, \\ y_D = y_C + y_B - y_A. \end{cases} \therefore D_3(2,-2).$

【例 2】如图，已知 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$C(x_C,y_C)$，点 D 为平面直角坐标系上的一点．若以 A，B，C，D 为顶点的四边形为平行四边形，求点 D 的坐标．

解：由以 A，B，C，D 四点为顶点的四边形为平行四边形，得点 D 的坐标有以下三种情况：



①$\because \begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B, \\ y_D - y_A = y_C - y_B, \end{cases} \therefore \begin{cases} x_D = x_C + x_A - x_B, \\ y_D = y_C + y_A - y_B. \end{cases} \therefore D_1(x_C + x_A - x_B, y_C + y_A - y_B).$

②$\because \begin{cases} x_D - x_A = x_B - x_C, \\ y_D - y_A = y_B - y_C, \end{cases} \therefore \begin{cases} x_D = x_B + x_A - x_C, \\ y_D = y_B + y_A - y_C. \end{cases} \therefore D_2(x_B + x_A - x_C, y_B + y_A - y_C).$

③$\because \begin{cases} x_D - x_B = x_C - x_A, \\ y_D - y_B = y_C - y_A, \end{cases} \therefore \begin{cases} x_D = x_C + x_B - x_A, \\ y_D = y_C + y_B - y_A. \end{cases} \therefore D_3(x_C + x_B - x_A, y_C + y_B - y_A).$

解题感悟

“开锁法”名词解释及其例题赏析

“开锁法”：已知$\triangle ABC$为等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$．若A，C两点的坐标已确定，则点B可视为点A绕点C顺时针旋转$90°$而成．将点C平移到原点C'，则点A平移后的对应点为点A'．将点A'绕原点顺时针旋转$90°$，得点B'．将点C'平移回点C，则点B'平移后即为点B.

此类问题分三种情况：

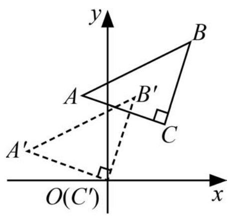
(1)已知两定点，可直接通过“开锁法”确定第三点的坐标；

(2)已知一定点一动点，可直接通过“开锁法”确定第三点的参数坐标；

(3)已知同一参数的两动点，可直接通过“开锁法”确定第三点的参数坐标.

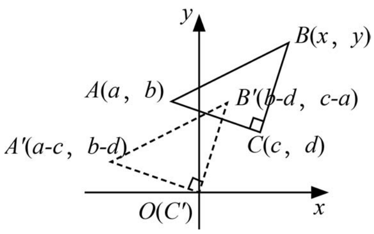
【例1】如图，已知$\triangle ABC$等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，$A(-1,3)$，$C(2,2)$，求点B的坐标.

解：因为$\triangle ABC$是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，所以点B可视为点A绕点C顺时针旋转$90°$而成．将点$C(2,2)$平移到原点$C'(0,0)$，则点$A(-1,3)$平移后的对应点为$A'(-3,1)$．将点$A'(-3,1)$绕原点顺时针旋转$90°$，得点$B'(1,3)$．将点$C'(0,0)$平移回点$C(2,2)$，则点$B'(1,3)$平移后即为点$B(3,5)$.



【例2】如图，已知$\triangle ABC$是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，$A(a,b)$，$C(c,d)$，求点B的坐标.

解：因为$\triangle ABC$是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，所以点B可视为点A绕点C顺时针旋转$90°$而成．将点$C(c,d)$平移到原点$C'(0,0)$，则点$A(a,b)$平移后的对应点为$A'(a-c,b-d)$．将点A'绕原点顺时针旋转$90°$，得点$B'(b-d,c-a)$．将点$C'(0,0)$平移回点$C(c,d)$，则点$B'(b-d,c-a)$平移后即为点B．所以点B的坐标为$(b-d+c,c-a+d)$.



注：开锁过程：

第一步，将钥匙平移至锁眼位置；

第二步，将钥匙绕锁眼顺时针旋转$90°$；

第三步，将钥匙平移回原位，开锁过程结束.

“开锁法”(把等腰直角三角形看成钥匙，原点看成锁眼)：

第一步，将等腰直角三角形的直角顶点平移至原点位置；

第二步，将斜边上一点绕原点顺时针旋转$90°$；

第三步，将等腰直角三角形平移回原位，求出另一点的坐标.

类比一下整个过程，两者是否有异曲同工之妙？

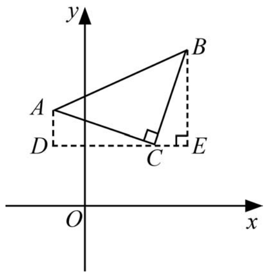
解题感悟

“矩形构造法”之全等构造例题赏析

“矩形构造法”之全等构造：一般在涉及等腰直角三角形的构建或与直线成45°角的问题，可通过构造矩形得出两个三角形全等，从而确定点的坐标. 此法可很好地替代“开锁法”，计算简练，叙述优美，其缺点是构造的辅助线较多. 记住“矩形构造法”的口诀：**遇直角，构矩形，得全等，求结果.**

【例1】如图，已知$\triangle ABC$是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，$A(-1,3)$，$C(2,2)$，求点B的坐标.

解：过点C作x轴的平行线，分别过A，B两点作该平行线的垂线，垂足分别为D，E两点.



$\because \triangle ABC$是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，$\therefore AC=BC$.

$\because AC\perp BC$，$\therefore \angle ACD+\angle BCE=90°$.

$\because AD\perp DE$，$\therefore \angle ACD+\angle CAD=90°$. $\therefore \angle BCE=\angle CAD$.

$\because AD\perp DE$，$BE\perp DE$，$\therefore \angle D=\angle E=90°$.

$\because$ 在$\triangle BCE$和$\triangle CAD$中，$\begin{cases}\angle BCE=\angle CAD,\\ \angle D=\angle E=90°,\\ AC=BC,\end{cases}$

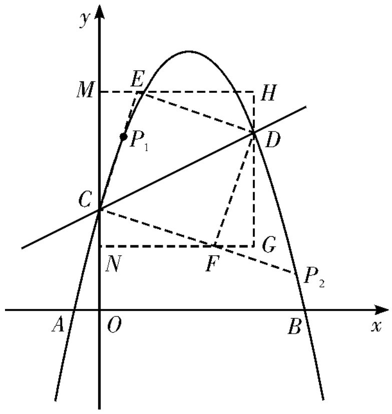
$\therefore \triangle BCE\cong\triangle CAD(\mathrm{AAS})$. $\therefore AD=CE$，$BE=CD$.

$\therefore x_B-2=3-2$，$y_B-2=2+1$. $\therefore B(3,5)$.

【例2】抛物线$y=-x^2+\dfrac{7}{2}x+2$与直线$y=\dfrac{1}{2}x+2$交于C，D两点，其中点C在y轴上，点P是y轴右侧的抛物线上一个动点，是否存在点P，使$\angle PCD=45°$？若存在，请求出点P的坐标；若不存在，请说明理由.

解：以CD为对角线，作正方形$CEDF$，

作正方形$CEDF$的“外接矩形”$GHMN$.



当点P在直线CD上方时，

$\because l_{CD}$：$y=\dfrac{1}{2}x+2$，抛物线$y=-x^2+\dfrac{7}{2}x+2$，

$\therefore C(0,2)$，$D\left(3,\dfrac{7}{2}\right)$.

易证$\triangle CME\cong\triangle EHD$. $\therefore ME=HD$，$MC=HE$.

设$ME=HD=m$，$MC=HE=n$.

$\therefore \begin{cases}m+n=3,\\ m-n=\dfrac{3}{2}.\end{cases}\therefore \begin{cases}m=\dfrac{9}{4},\\ n=\dfrac{3}{4}.\end{cases}\therefore E\left(\dfrac{9}{4},\dfrac{11}{4}\right)$.

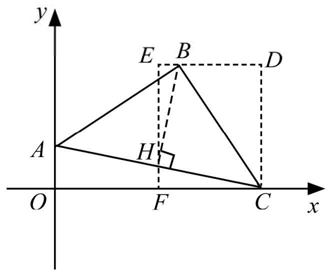
$\therefore l_{CE}$：$y=3x+2$. $\because y=-x^2+\dfrac{7}{2}x+2$，$\therefore P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right)$.

当点P在直线CD下方时，同理可得$P\left(\dfrac{23}{6},\dfrac{13}{8}\right)$.

综上所述，满足题意的点P的坐标为$P_1\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right)$，$P_2\left(\dfrac{23}{6},\dfrac{13}{18}\right)$.

【例3】如图，在平面直角坐标系中，$A\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$，$B(5,4)$. 在$x$轴上是否存在点$C$，使得$\angle ACB=45°$？若存在，请求出点$C$的坐标；若不存在，请说明理由.

解：(方法一)过点B作$BH\perp AC$，垂足为点H，作$\triangle BHC$的“外接矩形”$CDEF$.



$\because BH\perp AC$，$\therefore \angle BHE+\angle CHF=90°$.

$\because EF\perp CF$，$\therefore \angle HCF+\angle CHF=90°$. $\therefore \angle BHE=\angle HCF$.

$\because EF\perp CF$，$EF\perp DE$，$\therefore \angle E=\angle HFC=90°$.

$\because \angle ACB=45°$，$BH\perp AC$，$\therefore HB=HC$.

$\because$ 在$\triangle BHE$和$\triangle HCF$中，$\begin{cases}\angle E=\angle HFC=90°,\\ \angle BHE=\angle HCF,\\ HB=HC,\end{cases}$

$\therefore \triangle BHE\cong\triangle HCF(AAS)$. $\therefore BE=HF$，$EH=CF$.

$\because$ 点C在x轴上，$\therefore$ 可设$C(t,0)$.

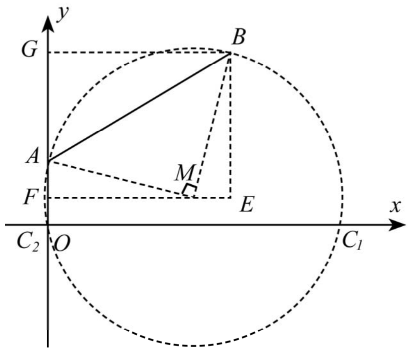
$\because B(5,4)$，$\therefore x_B-x_H=y_H-y_C$，$x_C-x_H=y_B-y_H$.

$\therefore \begin{cases}5-x_H=y_H,\\ t-x_H=4-y_H.\end{cases}$ $\therefore H\left(\dfrac{t+1}{2},\dfrac{9-t}{2}\right)$. $\because A\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$，$\therefore l_{AC}$：$y=-\dfrac{3}{2t}x+\dfrac{3}{2}$.

$\therefore -\dfrac{3}{2t}\cdot\dfrac{t+1}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9-t}{2}$，即$2t^2-15t-3=0$. $\therefore t=\dfrac{15\pm\sqrt{249}}{4}$.

$\therefore C_1\left(\dfrac{15+\sqrt{249}}{4},0\right)$，$C_2\left(\dfrac{15-\sqrt{249}}{4},0\right)$.

（方法二）**解题思路**：因为$\angle ACB=45°$，AB为定长，所以以AB为斜边可构造点M为直角顶点的等腰直角三角形. 显然点M为$\triangle ABC$的外接圆的圆心. 构造$\triangle ABM$的“外接矩形”，可求出点M的坐标，再根据半径相等得出等量关系进行求解.



构造如图的辅助圆，显然$\triangle AFM\cong\triangle MEB$.

$\therefore AF=ME$，$FM=BE$.

设$AF=ME=a$，$FM=BE=b$，

$\therefore a+b=5$，$a+\dfrac{5}{2}=b$. $\therefore a=\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{15}{4}$.

$\therefore M\left(\dfrac{15}{4}.\ \dfrac{1}{4}\right)$. 设$C(m,0)$，$\because MC=MA$，

$\therefore \left(\dfrac{15}{4}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(m-\dfrac{15}{4}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$.

$\therefore m=\dfrac{15\pm\sqrt{249}}{4}$. $\therefore C_1\left(\dfrac{15+\sqrt{249}}{4},0\right)$，$C_2\left(\dfrac{15-\sqrt{249}}{4},0\right)$.

【例4】如图，已知平行四边形$ABCD$的顶点$A(-12,0)$，$B(0,9)$，$C\left(0,\dfrac{21}{4}\right)$. 若点$Q$为线段$CD$上的一点，$\angle AQD=45°-\angle BQC$，求点$Q$的横坐标.

解：（方法一）过点A作$AH\perp BQ$，垂足为点H，作$\triangle AHQ$的“外接矩形”$EFGQ$.

$\because$ 四边形$ABCD$为平行四边形，$\therefore D\left(-12,-\dfrac{15}{4}\right)$.

$\because C\left(0,\dfrac{21}{4}\right)$，$\therefore l_{CD}$：$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{21}{4}$.

$\because$ 点Q在线段CD上，$\therefore$ 可设$Q\left(t,\dfrac{3}{4}t+\dfrac{21}{4}\right)$.

设$H(m,n)$，易证$\triangle QHE\cong\triangle AHF$.

$\therefore QE=HF$，$EH=AF$.

$\therefore \begin{cases}\dfrac{3}{4}t+\dfrac{21}{4}-n=m+12,\\ t-m=0-n.\end{cases}$ $\therefore H\left(\dfrac{7t-27}{8},\dfrac{-t-27}{8}\right)$.