【张宇数学教育系列丛书】 2019

张宇
考研数学
真题大全解

主编 张宇

（解析分册 · 数学三）

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

SHI DAI YUN TU 理工社

【张宇数学教育系列丛书】

张宇考研数学真题大全解

主编 张宇 （解析分册 · 数学三）

副主编 高昆轮

张宇数学教育系列丛书编委（按姓氏拼音排序）

蔡燧林 陈常伟 陈静静 陈湘华 崔巧莲 高昆轮 郭二芳 何理 胡金德 贾建厂 柯敬贤 兰杰 李刚 李雅 刘露 田宝玉 王慧珍 王娜 王秀军 王玉东 吴萍 徐兵 许可 严守权 亦一（笔名） 于吉霞 曾凡（笔名） 张乐 张婷婷 张心琦 张亚楠 张宇 赵修坤 郑光玉 郑利娜 朱杰

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 解析分册. 数学三 / 张宇主编. —北京：北京理工大学出版社，2018. 5

ISBN 978—7—5682—5552—3

Ⅰ.①张…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解　Ⅳ.①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 085337 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 河北新华第一印刷有限责任公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 20
字　　数 / 500 千字
版　　次 / 2018 年 5 月第 1 版　2018 年 5 月第 1 次印刷
定　　价 / 76.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 多海鹏
文案编辑 / 多海鹏
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

Preface

前言（2019版）

本书收集并详解了从 1987 到 2018 年，共 32 年的真题，称真题大全解。

我建议读者按照下面的方法来用这本珍贵的资料。

首先，要学完全部的考试内容，有了完整的知识结构以后，再来做这卷子，这是前提。

接下来，按照套卷的形式，一套一套地完成试卷，每做完 3～5 套卷子，给自己评一下分数，算一个平均值出来，做到心中有数，再去做下一个 3～5 套卷子，以期有更好的成绩，直至完成所有试卷。

第二遍，按照章节顺序去做题，有了上面第一遍做套卷的经验和教训，这一遍，重在对薄弱环节的把握，局部加力，查漏补缺，对症下药。

这样，能最好地发挥真题的作用。其他要紧的事情，请看上一版前言。

张宇

2018 年 4 月 于北京

张宇数学教育系列丛书详细说明

书名	主要内容	适用阶段
张宇带你学系列 (高等数学(上、下册)、线性代数、概率论与数理统计,共4册)	体现了本科教学要求与考研要求的差异,列出了章节学习的知识体系,给出了所有课后习题的全面解析,精选了不同数量的经典例题	大一大二学生课后习题复习及考研基础阶段
全国高校期末考试过关必备与高分指南系列 (高等数学(微积分)(上、下册)、线性代数、概率论与数理统计,共4册)	以教育部大学数学课程指导委员会编写的教学大纲为依据,以教育部全国硕士研究生招生考试数学考试大纲为参考,设置了全国高校考试通用的必考点精讲以及考试试题,命题具有通用性	大一大二学生期末复习及考研基础阶段
张宇高等数学18讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中高等数学部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题组组长参与	基础阶段
张宇线性代数9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中线性代数部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题人参与	基础阶段
张宇概率论与数理统计9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题人参与	基础阶段
张宇考研数学题源探析经典1000题 (数学一、数学二、数学三)	以考研命题所使用的所有题目源头为依据,精心挑选和编制了1 000道左右高仿真练习题,题目与考研无缝接轨,综合性强,由易到难,利于考生复习过程中对知识点逐层加深理解。原命题组组长参与	基础阶段+强化阶段
张宇考研数学真题大全解 (数学一、数学二、数学三)	囊括考研数学命题以来所有考研真题,给读者提供原汁原味的实考题,有效掌握命题方向及解题思路。原命题组组长参与	强化阶段
张宇考研数学闭关修炼一百题	原为暑期集训和国庆集训辅导过程中的内部资料。结合最新命题趋势编制的题目,题量少,但题题经典且题目综合性强。原命题组组长参与	强化阶段
考研数学命题人终极预测8套卷 (数学一、数学二、数学三)	考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(上)。实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频。原命题组组长与命题成员参与	冲刺阶段
张宇考研数学最后4套卷 (数学一、数学二、数学三)	考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(下)。实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频。原命题组组长与命题成员参与	冲刺阶段

注:主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面,市面上其他任何同名图书均非张宇所写,请考生注意鉴别。

以上书籍新浪微博答疑地址:@张宇考研数学交流小组 http://weibo.com/yuntubook/

张宇新浪微博:@宇哥考研 http://weibo.com/zhangyumaths/

Preface

前言(2018版)

先给读者讲个故事。1637 年,法国律师费马到图书馆看书,在书上读到一句话:“方程 $x^2+y^2=z^2$ 有正整数解。”现在说来,小学生都知道:$3^2+4^2=5^2$,上述命题显然成立。然而,费马没有就此罢休,他违反图书馆规定,在书上“乱写乱画”:“你们不要以为这个事情很简单,方程 $x^3+y^3=z^3$ 一定没有正整数解,方程 $x^4+y^4=z^4$ 一定没有正整数解,…,也就是说,对于方程 $x^n+y^n=z^n$,只要 $n\geqslant 3$ 为正整数,则这样的方程就一定没有正整数解了。”这等于是提出了一个前所未有的定理,是公然向数学界提出挑战。不仅如此,费马还在这个定理后写了更让人惊讶的一句话:“我已经给上述定理做了完整美妙的证明,只是这个位置太小了,所以我就不写了。”——这哪里是挑战?简直就是挑衅!

数学界应战吗?那是当然,数学界绝不缺乏天才,怎么会被一个“外行”难倒?于是,读者所熟悉的大数学家高斯、罗尔、莱布尼茨等均开始研究费马的这个定理,可是历史就是这么奇妙,他们都没有证明出来。一百年过去了,两百年过去了,三百年过去了,直到 1993 年,也就是在费马提出这个定理的 356 年之后,才被美籍英裔数学家威尔斯证明出来,单单证明就写了 1 000 多页。威尔斯的证明举世震惊,因此他也获得了至今唯一一个最高数学奖——菲尔兹奖(“唯一”是因为菲尔兹奖只授予 40 岁以下的数学家,但是当时的威尔斯已经 45 岁了,由于他的贡献太大,所以破例授予他这个数学上的最高奖)。

费马的这个定理,被数学界称为“会下金蛋的鸡”,因为在证明这个定理的数百年中,产生了许多独立的数学分支,使得数学得到了蓬勃发展,这正是:提出一个好的问题,往往比解决它更有价值。因此,费马的这个定理被正式命名为:费马大定理。你见过有几个定理叫“大定理”?很少很少。一个“大”字,足以体现这个定理的分量。

故事讲完了,这里讲了什么道理呢?读者自己体会吧——其实,我什么道理都没讲——我只想借用“费马大定理”的“大”字,把我的这本书命名为:真题“大”全解。因为,这本书,我以为,相对于其他真题书来讲,是更有分量的。

一、真题的重要性不言而喻

从 1987 年开始,考研数学实行了全国统一考试的形式,考研数学的命题也由此走上了正轨——其科学性、严肃性、稳定性逐渐达到了国家标准。直到今天,几十年下来,考研数学的命题可以说极其成熟了,也逐渐出现了如下两大特点:

第一,考研数学命题的风格稳定:重视基础,淡化技巧,计算量大。考研数学试题是命题组集体智慧的结晶,在确定了上述命题的风格和原则后,考题受到命题组各位成员自身“喜好”的影响很小。所以,做好历年真题,是熟悉考研数学风格的好路子。

第二,考研数学命题的形势特殊:命题时间短,任务重,参考以往考题成为必须。为了确保考研数学命题的安全性,不出现泄漏考题的情况,现在的考研命题时间很短,已经不再像多年前那样宽松(以前命题都是提前半年出好题,有足够的时间来校对与检验试题的正确性和科学性)——在考前集中命题,几乎没有时间去校对和检验了。所以,为了保证试题不出错且难度适中,命题人盯上了从 1987 年到今天积累下来

的命制过的试题（这里还包括从未考过的备考卷上的试题），以此为基础，“参考”“改编”甚至“照搬”这些题。故，读者应该懂得，做好历年真题，是预测考研数学考题的好路子。

二、做好真题解析的两大原则

考研数学的历年真题解析需要贯彻两个原则。

第一，**考研数学试题收录的全面性**。收录全国统考以来所有的考研数学试题，而不是部分试题，给读者提供一份完整的历史资料。从而，力图给读者提供原汁原味的历年的实考题，是本书坚持的第一个原则。

第二，**考研数学试题解析的权威性**。凡是有当年命题人自己写的答案，忠实其答案；凡是有当年考试中心组织专家写的答案，参考其答案。总之，本书对真题的答案解析，是最权威、最深刻的，这是本书坚持的第二个原则。

这两个原则，事实上，就是本书分量最重的地方——每一道题的收录，都有根有据；每一道题的解析，都有源有头。

三、本书使用说明

本书共分两册——试卷分册和解析分册。试卷分册中，我们将 1987 年至 2017 年的真题试卷完整地展现给读者，供读者检测、演练之用；解析分册中，我们提供给读者全面、深刻、由命题人把关的试题解析。其中，为了不影响考生有针对性地备考，有些较早年份的超纲题目，我做了必要的删除。那么在试卷分册被删除题目的套卷中，余下试题的分值稍作调整以使其总分仍为满分。当然，考虑到读者在做题之余需查阅答案及解析，我们在解析分册中给出了权威的解答，依据对应页码与题号可作相应查找。值得注意的是，本书仅为数学三的真题大全解，需考数学三的考生若做完了这本书的题目，想再多做演练，亦可参考数学一与数学二的真题大全解。

对于真题大全解的使用，与习题集的使用有类似之处。把题目的演算过程写到草稿纸上去，把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去，总之，不要在题目上做任何标记，这样做的目的很明确，如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了，当你下次再做这个题目时，在没有任何提示的情况下，你能保证自己一定会做吗？“干干净净”的真题集，事实上是对读者提出了高标准、严要求，希望读者把真题全部做完一遍后，第二遍就能够查漏补缺、扫清死角。

感谢从命题组中退下来的老专家们，在数学原题的收集、确认与解析中，他们作出了重要贡献。感谢北京理工大学出版社的各位领导和编辑，感谢高等教育出版社的刘佳同志，他们给作者提供了很多便利和帮助。

张宇

2017 年 5 月 于北京

Contents

目 录

第一部分　微积分

第二部分　线性代数

第三部分 概率论与数理统计

第一部分 〉〉〉

微积分

第1章　函数、极限、连续

考点分布

考点＼分值＼年份	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01	02	03
函数				3		3							3				
极限定义及性质	2	2		3	3		3										
两个基本极限	4	4	5		8		3								6	4	
洛必达法则	4	4	5	5	5	8		5								8	
夹逼准则或定积分定义求极限或单调有界								5						3			
无穷小比阶			3			6					3						
连续与间断点	2			3		5						3					12

1987—2003 年

考点＼分值＼年份	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	合计(87—18年)
函数																9
极限定义及性质	4						4	10	10		10	8	14			73
两个基本极限	4	4			9	4	4		4							63
洛必达法则	8	12	7	4			20							10		105
夹逼准则或定积分定义求极限或单调有界			4								4		4	10	10	40
无穷小比阶				4		4		4		14	4	10			10	62
连续与间断点	4				8	4				4				4		49

2004—2018 年

1.1 函数及其性质

考点点睛

1. 有界性

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

(3) $f'(x)$ 在有限区间 I 上有界，则 $f(x)$ 在 I 上有界.

2. 奇偶性

(1) $f(x)$ 是可导的奇(偶)函数，则 $f'(x)$ 是偶(奇)函数.

(2) $f(x)$ 是连续的奇函数，则其所有原函数都是偶函数；

$f(x)$ 是连续的偶函数，则其所有原函数中只有一个是奇函数.

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 上有定义，则 $f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

3. 周期性

(1) $f(x)$ 是可导的以 T 为周期的周期函数，则 $f'(x)$ 也以 T 为周期.

(2) $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则对于定义域内任意点 a，

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \text{ 以 } T \text{ 为周期} \Leftrightarrow \int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0.$$

(3) $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{T}x \text{ 以 } T \text{ 为周期.}$$

4. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，

(1) 对任意 $x\in I$，$f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调增加；

对任意 $x\in I$，$f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调减少.

(2) 对任意 $x\in I$，$f'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow f(x)$ 在 I 上单调不减；

对任意 $x\in I$，$f'(x)\leqslant 0\Leftrightarrow f(x)$ 在 I 上单调不增.

在用单调性说明方程的根的问题时只能使用(1)中的单调增加(减少)，而不能使用(2)中的单调不减(不增).

1 [1990－Ⅳ] 设函数 $f(x)=x\tan x\mathrm{e}^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数. (B) 无界函数. (C) 周期函数. (D) 单调函数.

答 应选(B).

解 由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x\tan x\mathrm{e}^{\sin x}=\infty$，则 $f(x)$ 无界.

2 [1992－Ⅴ] 设 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$________；其定义域为________.

答 应填 $\arcsin(1-x^2)$；$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

解 因为 $f[\varphi(x)]=\sin[\varphi(x)]=1-x^2$，所以 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$. 由 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$ 可得 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

3 [1999] 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数.

(C)当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必为周期函数.

(D)当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必为单调增函数.

答 应选(A).

解 直接法.据"1.1 考点点睛"中的"2.奇偶性"可知(A)正确.

排除法.(B)的反例:$f(x)=\cos x$,$F(x)=\sin x+1$ 不是奇函数;

(C)的反例:$f(x)=\cos^2 x$,$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$,不论 C 取什么常数,$F(x)$ 都不是周期函数;

(D)的反例:$f(x)=-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的,但 $F(x)=-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调减少的.

注 连续函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,考查

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C=\int_0^x -f(-u)\mathrm{d}u+C.$$

若 $f(x)$ 是奇函数,则 $f(u)=-f(-u)$,进而对任意 C 有 $F(x)=F(-x)$;

若 $f(x)$ 是偶函数,则 $f(u)=f(-u)$,进而当且仅当 $C=0$ 时有 $F(x)=-F(-x)$.

4 [2004] 函数 $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界?

(A) $(-1,0)$. (B) $(0,1)$. (C) $(1,2)$. (D) $(2,3)$.

答 应选(A).

解 $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 3}{18}$,$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 2}{4}$.

又
$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty,$$

因而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 内都是无界的,不能选(B),(C).

又
$$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\infty,$$

因而 $f(x)$ 在 $(2,3)$ 内无界,故不能选(D),只有(A)正确.

注 本题考查如何判断连续函数在开区间 (a,b) 内有界,参看"1.1 考点点睛"中的"1.有界性".

5 [2005] 以下四个命题中,正确的是

(A)若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(B)若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(C)若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(D)若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界,则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

答 应选(C).

解 直接法.据"1.1 考点点睛"中的"1.有界性"这一条,可知(C)正确.

排除法.若取 $f(x)=\ln x$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}$,于是可知选项(A)和(B)都不正确.

若取 $f(x)=\sqrt{x}$,则 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,于是可知选项(D)是不正确的.

注 任取 $x_0,x\in(0,1)$.由题意知 $f(x)$ 在 $[x_0,x]$(或 $[x,x_0]$)上满足拉格朗日中值定理的条件,于是有 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$,因而有

$$|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+|f'(\xi)||x-x_0|\leqslant|f(x_0)|+|f'(\xi)|,$$

又因为 $|f'(\xi)|$ 是有界的,故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

1.2 极限的定义及性质

6 [1988-Ⅳ] 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 都存在,则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必存在. ( )

答 应填×.

解　取 $f(x)=x, g(x)=\sin\frac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0, \lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=0$，但是 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 不存在，故错误.

注　如果条件改为：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在且不为 0，则结论正确.

7 [1991－Ⅴ]　设数列的通项为：$x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时，x_n 是

(A)无穷大量.　(B)无穷小量.　(C)有界变量.　(D)无界变量.

答　应选(D).

解
$$\lim_{k\to\infty}x_{2k+1}=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)^2+\sqrt{2k+1}}{2k+1}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left(2k+1+\sqrt{\frac{1}{2k+1}}\right)=\infty\neq\lim_{k\to\infty}x_{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}=0,$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，x_n 是无界变量.

注　要正确区分“无界”与“无穷大”的关系.

8 [2000]　设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

(A)存在且等于零.　(B)存在但不一定为零.

(C)一定不存在.　(D)不一定存在.

答　应选(D).

解　取 $\varphi(x)=f(x)=g(x)=x$，满足题设条件，但此时 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x$，极限不存在，排除(A)和(B)；再取 $\varphi(x)=f(x)=g(x)=1$，满足题设条件，但此时 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim1=1$ 存在，排除(C)，故选(D).

注　$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$ 是保证不了 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=A$（常数）的（反之成立）.

9 [2010]　设 $f(x)=\ln^{10}x, g(x)=x, h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$.　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$.

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$.　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$.

答　应选(C).

解　由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{g(x)}=+\infty$. 所以当 x 充分大时有 $f(x)<g(x)<h(x)$.

故选项(C)正确.

注　要熟悉几个常用的无穷大量：$n\to\infty$ 时，$\ln^\alpha n\ll n^\beta\ll a^n\ll n!\ll n^n$（任意 $\alpha,\beta>0, a>1$）.

10 [2014]　设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\neq0$，则当 n 充分大时有

(A) $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$.　(B) $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$.　(C) $a_n>a-\dfrac{1}{n}$.　(D) $a_n<a+\dfrac{1}{n}$.

答　应选(A).

解　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|>\dfrac{|a|}{2}\Rightarrow$ 当 $n\to\infty$ 时，$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$，故选(A).

注　在上述解法中用到以下两条结论：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$；$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$；

(2)当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B, A>B(A<B)\Rightarrow$ 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)>g(x)(f(x)<g(x))$.

对数列有着类似的上述结论.

11 [2015]　设 $\{x_n\}$ 是数列. 下列命题中不正确的是

(A)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$.　(B)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(C)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$.　(D)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

答　应选(D).

解 由数列极限存在的充要条件，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+2}=a$，可知选项(A)，(B)，(C)均正确，故选(D).

注 本题主要考查数列与其子列的极限之间的关系，是一道基本概念题.

1.3 求函数的极限

考点点睛

求函数极限首先是化简，其次是判别类型选择方法.

常用的化简方法有：①非零常数因子先求出；②有理化；③通分；④倒代换.

常用的方法有：①四则运算法则及基本极限；②等价代换；③洛必达法则；④泰勒公式.

1. 常用的等价代换($x\to0$)

$\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim x$；

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2, a^x-1\sim x\ln a, (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$；

$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3, x-\arcsin x\sim-\frac{1}{6}x^3$；

$x-\tan x\sim-\frac{1}{3}x^3, x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3$；

$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$.

2. 几个重要函数的泰勒展开式($x\to0$)

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$；

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$；

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$；

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$；

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$，

其中$o(x^k)$为$x\to0$时x的k阶无穷小量.

3. 极限值与无穷小的关系

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中$\lim\alpha=0$.

1.3.1 需要分别求左右极限的情形

求分段函数在分段点处的极限，含绝对值函数、取整函数在相应点的极限，“e^∞”及“$\arctan\infty$”型的极限往往需要分别考查左右极限. 注意：$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.

12 [1987－Ⅳ] $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$. ( )

答 应填×.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，但$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，故错误.