时代云图
SHI DAI YUN TU

【张宇数学教育系列丛书】

张宇考研数学

闭关修炼一百题

全新优化命制

一百道综合好题

减轻学生负担

解析分册

主 编◎张 宇

中国政法大学出版社

时代云图 SHI DAI YUN TU

【张宇数学教育系列丛书】

张宇考研数学

闭关修炼一百题

张宇出品

解析分册

主编 ◎ 张宇

副主编 ◎ 高昆轮 朱杰

张宇数学教育系列丛书编委（按姓氏拼音排序）

蔡燧林 陈常伟 陈静静 陈湘华 崔巧莲 高昆轮 郭二芳 何理 胡金德 贾建厂 柯敬贤 兰杰 李刚 李雅 刘露 田宝玉 王慧珍 王娜 王秀军 王玉东 吴萍 徐兵 许可 严守权 亦一（笔名） 于吉霞 曾凡（笔名） 张乐 张婷婷 张心琦 张亚楠 张宇 赵修坤 郑光玉 郑利娜 朱杰

中国政法大学出版社

2018·北京

1.（A）【**解析**】因 $x_n>0$，所以数列 $\{x_n\}$ 有下界. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}<1$，由数列极限的保号性可知，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$，即当 $n>N$ 时数列 $\{x_n\}$ 是单调递减的. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是存在的. 结合极限的运算法则，通过反证法易知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

【注】(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$ 与 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$ 之间的区别在于：前者从第 N 项开始满足 $x_{n+1}<x_n$，而后者从指定项（默认第一项）开始满足. 但从考查极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的角度而言，两个条件没有本质上的区别.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=2$，令 $u_n=\dfrac{1}{x_n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{2}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 利用无穷小与无穷大之间的关系，知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 可能存在，也可能不存在. 如当 $x_n=\dfrac{1}{n}$ 时存在，当 $x_n=n$ 时不存在.

2.【**解**】这是"$\infty-\infty$"型极限，先转化为"$\dfrac{0}{0}$"型极限. 由原极限有确定的值，确定其中的参数 a 与 b 的值. 解题关键是用到一个已知的结论：若极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，又 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，则必有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal{\text{记}} \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^6+ax^3}-(x^3+x^2+bx)e^{-\frac{1}{x}}\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty}x^3\left[\sqrt{1+\frac{a}{x^3}}-\left(1+\frac{1}{x}+\frac{b}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}\right] \\
&\xlongequal{t=\frac{1}{x}} \lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+at^3}-(1+t+bt^2)e^{-t}}{t^3} \\
&= \lim_{t\to0^+}\frac{(\sqrt{1+at^3}-1)-[(1+t+bt^2)-e^t]e^{-t}}{t^3},
\end{aligned}
$$

其中
$$\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+at^3}-1}{t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}at^3}{t^3}=\frac{1}{2}a\left(t\to0\text{ 时},\sqrt{1+at^3}-1\sim\frac{1}{2}at^3\right),$$
$$\lim_{t\to0^+}e^{-t}=1.$$

现只需再求
$$J\xlongequal{\text{记}}\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t+bt^2)-e^t}{t^3}.$$

解法一 用洛必达法则得

$$J=\lim_{t\to0^+}\frac{1+2bt-e^t}{3t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{2b-e^t}{6t}=\begin{cases}-\dfrac{1}{6}, & b=\dfrac{1}{2},\\ \infty, & b\neq\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

解法二　用泰勒公式得

$$J=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t+bt^2)-\left[1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+o(t^3)\right]}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)t^2-\frac{1}{6}t^3}{t^3}=\begin{cases}-\frac{1}{6}, & b=\frac{1}{2},\\ \infty, & b\neq\frac{1}{2}.\end{cases}$$

由 $I=\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$，可得 $a=\frac{1}{3}$. 故 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{2}$.

3.(D)　**【解析】**当 $x<0$ 时，$g(x)<0$，且 $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=0$；

当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+(e^{\frac{1}{x}})^2}=0$.

故　$$\lim_{x\to0^-}f[g(x)]\xlongequal{\text{令 }g(x)=u}\lim_{u\to0^-}f(u)=\lim_{u\to0^-}\frac{\ln(1+u^3)}{\arcsin u-u}=\lim_{u\to0^-}\frac{u^3}{\frac{1}{6}u^3}=6,$$

$$\lim_{x\to0^+}f[g(x)]\xlongequal{\text{令 }g(x)=u}\lim_{u\to0^+}f(u)=\lim_{u\to0^+}\frac{e^{-u}+\frac{1}{2}u^2+u-1}{u\sin\frac{u}{6}}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{1-u+\frac{(-u)^2}{2}+\frac{1}{2}u^2+u-1+o(u^2)}{\frac{1}{6}u^2}=6.$$

故 $\lim\limits_{x\to0}f[g(x)]=6$. 选(D).

【注】本题若试图先求 $f[g(x)]$ 的表达式，再进行极限计算，将在形式上产生极大的复杂性而导致各种错误. 事实上，本题的命制特点在于考查考生的整体观和换元思想，是一道区分度高的优秀试题，属中等难度题.

4.【解】当 $k\leqslant0$ 时，$I=-\infty$，极限不存在；

当 $k>0$ 时，$I\xlongequal[x=\frac{1}{t}]{\infty-\infty}\lim\limits_{t\to0^+}\left[\left(\frac{1}{t^\alpha}+\frac{8}{t^4}+2\right)^k-\frac{1}{t}\right]$（注意 $\alpha\geqslant5$）

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)^k-t^{\alpha k-1}}{t^{\alpha k}}.$$

只有当 $\alpha k-1=0$，即 $k=\frac{1}{\alpha}$ 时，极限为"$\frac{0}{0}$"型，否则极限为 ∞，不存在.

故　$$I=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}-1}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{\alpha}(8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)}{t}.$$

当 $\alpha=5$ 时，$I=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{5}\cdot\frac{8t+2t^5}{t}=\frac{8}{5}$，此时 $k=\frac{1}{5}$；

当 $\alpha>5$ 时，$I=0$，此时 $k=\frac{1}{\alpha}$.

【注】此题是含参数的函数极限问题，既含有参数 α，也含有参数 k，讨论起来有些复杂，考生需对未定式有熟练、深刻的掌握，这是中等难度题.

5.【解】（Ⅰ）注意，当 n 改为 $n+1$ 时，u_n 中的每一项都要改变，且其项数也要多一项，因此较难比较 u_{n+1} 与 u_n 的大小关系. 由题设，知

$$u_n<\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\frac{n}{n}=1,$$

$$u_n>\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}},$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}<u_n<1,$$

两边取极限，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$.

（Ⅱ）设 $a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，则显然

$$a=\sqrt[n]{a^n}\leqslant u_n\leqslant\sqrt[n]{ka^n}=\sqrt[n]{k}\cdot a,$$

两边取极限，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1$ 及夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$.

【注】使用夹逼定理时，常常需要先知道某些极限，如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1$，这里 k 是大于零的常数.

6.【解】（Ⅰ）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2.$

（Ⅱ）
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+(i-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2.$$

7.（Ⅰ）**【证】**对任意的 x_1,x_2，且 $0<x_1<x_2<+\infty$，在 $[x_1,x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,+\infty)$，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0,$$

则 $f(x_2)>f(x_1)$，从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加.

（Ⅱ）【证】令 $g(x)=\ln f(x)=-\dfrac{1}{x}\ln(n^x+1)(x>0)$，则

$$g'(x)=\frac{1}{x^2}\ln(n^x+1)-\frac{1}{x}\cdot\frac{n^x\ln n}{n^x+1}>\frac{1}{x^2}\ln n^x-\frac{1}{x}\ln n=0(x>0),$$

则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加，故 $f(x)=e^{g(x)}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加.

（Ⅲ）【解】用（Ⅱ）的结论对 x_n 进行适当放大与缩小，有

$$\frac{n}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(n+1)^{-1}<x_n<\sum_{k=1}^{n}(n^n+1)^{-\frac{1}{n}}=\frac{n}{(1+n^n)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}},$$

即
$$\frac{n}{n+1}<x_n<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

两边取极限，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{1^0}=1$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

8.【解】考查 $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{2}u_n(u_n^2+1)-u_n=\dfrac{1}{2}u_n(u_n^2-1)$，可见，若 $u_1>1$，则 $u_2>u_1>1$，由数学归纳法知，对一切 n，有 $u_n>1$，且 $u_{n+1}>u_n$，即数列 $\{u_n\}$ 单调增加；若 $u_1<1$，则 $u_2<u_1<1$，由数学归纳法知，对一切 n，有 $u_n<1$，且 $u_{n+1}<u_n$，即数列 $\{u_n\}$ 单调减少；若 $u_1=1$，则对一切 n，有 $u_n=1$，即数列 $\{u_n\}$ 为常数列.

以下讨论有界性.

易知 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$，故数列 $\{u_n\}$ 有下界. 若 $u_1<1$，则由数列 $\{u_n\}$ 单调减少有下界，推知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在，记为 a，将迭代定义式两边取极限得

$$a=\frac{1}{2}a(a^2+1),$$

即
$$a(a-1)(a+1)=0,$$

解得 $a=-1,0,1$. 因为 $0<u_n<1$，数列 $\{u_n\}$ 单调减少，故只能是 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a=0$；

若 $u_1=1$，则由于数列 $\{u_n\}$ 是常数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a=1$；

若 $u_1>1$，则数列 $\{u_n\}$ 单调增加. 如果数列 $\{u_n\}$ 有上界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在，其极限 $a>1$，但由于 a 只可能是 $-1,0,1$ 三者之一，矛盾，所以数列 $\{u_n\}$ 单调增加无上界，于是推知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在.

总之，若 $0<u_1<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$；若 $u_1=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$；若 $u_1>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在.

【注】此题的单调性还可用下述方法证明. 由迭代定义式有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}(u_n^2+1),$$

如果 $u_1>1$，则 $u_2>u_1$，再由数学归纳法推知数列 $\{u_n\}$ 单调增加. 类似地可推知：若 $u_1=1$，则数列 $\{u_n\}$ 为常数列；若 $u_1<1$，则数列 $\{u_n\}$ 单调减少.

一般地，如果 u_n 为某连乘积时，采用比值 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 的方法考查数列 $\{u_n\}$ 的单调性，显然比用 $u_{n+1}-u_n$ 的方法简单方便.

9.【证】（Ⅰ）记 $F_1(x)=\ln(1+x)-x$，则 $F_1'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$F_1'(x)<0$，于是 $F_1(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调减少，由 $F_1(0)=0$，知 $F_1(x)<0,x\in(0,1)$，从而

$$\ln(1+x)<x;$$

记 $F_2(x)=x-e^x+1$，则 $F_2'(x)=1-e^x$，当 $x\in(0,1)$ 时，$F_2'(x)<0$，于是 $F_2(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调减少，由 $F_2(0)=0$，知 $F_2(x)<0,x\in(0,1)$，从而

$$x<e^x-1.$$

故有当 $0<x<1$ 时，$\ln(1+x)<x<e^x-1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $0<x<1$ 时，$\ln(1+x)<x<e^x-1$.

由 $0<x_1<1$，可知

$$0<e^{x_2}-1=\ln(1+x_1)<x_1<1,$$

从而 $0<x_2<1$.

同理可证当 $0<x_k<1$ 时，x_{k+1} 同样满足 $0<x_{k+1}<1$.

由数学归纳法知对一切 $n=1,2,\cdots$，有 $0<x_n<1$，即数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

又当 $0<x_n<1$ 时，$x_{n+1}<e^{x_{n+1}}-1=\ln(1+x_n)<x_n$，即 $\{x_n\}$ 单调减少.

由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 将该极限值记为 a，则 $a\geqslant 0$.

对 $\ln(1+x_n)=e^{x_{n+1}}-1$ 两边取极限，得 $\ln(1+a)=e^a-1$.

设 $f(x)=e^x-1-\ln(1+x)$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{1+x}>0$，因此 $f(x)$ 单调增加. 由 $f(0)=0$，可知 $f(x)>0$，从而只有 $a=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

10.【分析】对于（Ⅰ），由连续性及 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，再利用介值定理可证 ξ 的存在性. 因为这里函数不一定可导，所以无法用导函数证明唯一性，可采用反证法证明.

【证】（Ⅰ）由 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|$，对于任意固定的 $x_0\in[a,b]$ 作为其中的 x_2，并将 x_1 记为 x，于是有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant k|x-x_0|.$$

当 $x\to x_0$ 时，$|f(x)-f(x_0)|\to 0$，于是有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，可知 $f(x)$ 在 $x_0\in[a,b]$ 处连续，由 x_0 的任意性，知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

令 $\varphi(x)=f(x)-x$，则

$$\varphi(a)=f(a)-a\geqslant 0,\varphi(b)=f(b)-b\leqslant 0.$$

若上述两不等式中至少有一个等号成立，例如 $\varphi(a)=0$，则取 $\xi=a\in[a,b]$，有 $\varphi(\xi)=f(\xi)-\xi=0$.

若上述两不等式中无一个等号成立，即 $\varphi(a)=f(a)-a>0,\varphi(b)=f(b)-b<0$. 于是由连续函数介值定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi(\xi)=f(\xi)-\xi=0$.

再证唯一性，用反证法证明.

设存在 $\eta\in[a,b],\eta\neq\xi$，使得 $\varphi(\eta)=f(\eta)-\eta=0$. 于是

$$f(\eta)-f(\xi)=\eta-\xi,$$

则

$$|\eta-\xi|=|f(\eta)-f(\xi)|\leqslant k|\eta-\xi|,$$

即 $$(1-k)|\eta-\xi|\leqslant 0.$$
但因 $1-k>0$，$|\eta-\xi|>0$，导致矛盾. 证明了唯一性.

(Ⅱ) 为证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$，考虑
$$|x_n-\xi|=|f(x_{n-1})-f(\xi)|\leqslant k|x_{n-1}-\xi|\leqslant\cdots\leqslant k^{n-1}|x_1-\xi|,$$
其中 x_1 与 ξ 都是确定的值.

所以当 $n\to\infty$ 时，$|x_n-\xi|\to 0$，从而证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且等于 ξ. 证毕.

【注1】若此题条件改为"$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $|f'(x)|\leqslant k<1$"，则可应用拉格朗日中值定理来构造不等式：

对 $[a,b]$ 上的任意两点 x_1,x_2，均有
$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)(x_1-x_2)|\leqslant k\,|x_1-x_2|,$$
也能继续证明本题的结论.

【注2】其子题亦可如此设置：

设 $f(x)=p+q\sin x$，p 为任意常数，$0<q<1$.

(Ⅰ) 证明 $f(x)=x$ 有唯一实根 ξ；

(Ⅱ) 定义 $x_{n+1}=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\xlongequal{\text{存在}}\xi$.

提示：(Ⅰ) 记 $F(x)=f(x)-x$，则 $F'(x)=f'(x)-1=q\cos x-1<0$，$F(x)$ 单调减少. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=+\infty$，故 $f(x)=x$ 有唯一实根. 证毕.

(Ⅱ) $|x_n-\xi|=|f(x_{n-1})-f(\xi)|\leqslant q\,|x_{n-1}-\xi|\leqslant\cdots\leqslant q^{n-1}|x_1-\xi|\xrightarrow{n\to\infty}0.$

11. (Ⅰ)【证】$\varphi'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}}\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi'(x)$（已知存在，故此处洛必达法则成立），证毕.

(Ⅱ)【解】当 $x<0$ 时，$F'(x)=\left\{\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u\right\}'_x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$；

当 $x>0$ 时，由于 $F(x)=\int_{-x}^0\ln[1+f(x+t)]\mathrm{d}t\xlongequal{x+t=u}\int_0^x\ln[1+f(u)]\mathrm{d}u$，于是 $F'(x)=\ln[1+f(x)]$；

当 $x=0$ 时，由题设知 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处连续. 因为
$$\lim_{x\to 0^+}F'(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln[1+f(x)]=\ln[1+f(0)]=0$$
存在，由(Ⅰ)可知，$F'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}F'(x)=0$.

同理，因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$ 存在，故 $F'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}F'(x)=0$.

于是 $F'(0)=0$. 因此
$$F''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F'(x)-F'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln[1+f(x)]}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=0,$$

$$F''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{F'(x)-F'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)=0,$$

故 $F''(0)=0$.

12.【解】(Ⅰ)由 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续知 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{1}{2}(A-x^2)=\frac{1}{x_0}$,所以

$$A=x_0^2+\frac{2}{x_0}. \tag{①}$$

由于

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{\frac{1}{2}(A-x^2)-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=-x_0(\text{利用式①}), \tag{②}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=-\frac{1}{x_0^2}, \tag{③}$$

所以 $l_-:y=-x_0x+x_0^2+\frac{1}{x_0}$,$l_+:y=-\frac{1}{x_0^2}x+\frac{2}{x_0}$(它与 x 轴交点的横坐标为 $2x_0$).于是 D_1,D_2 如图 1 所示.由图并利用式①得

$$S_1=\int_0^{x_0}\left[-x_0x+x_0^2+\frac{1}{x_0}-\frac{1}{2}(A-x^2)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x_0^3,$$

$$S_2=\int_{x_0}^4\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\cdot x_0\cdot\frac{1}{x_0}=-\ln x_0+2\ln 2-\frac{1}{2},$$

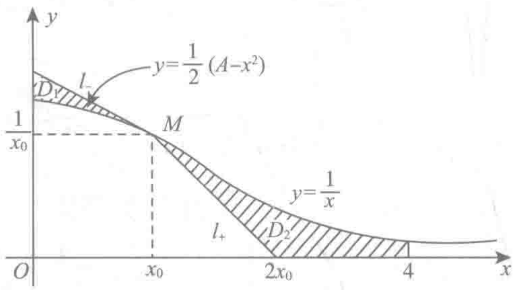

图 1

所以
$$S=S_1+S_2=\frac{1}{6}x_0^3-\ln x_0+2\ln 2-\frac{1}{2}(0<x_0<2). \tag{④}$$

由于
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x_0}=\frac{1}{2}x_0^2-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0^3-2}{2x_0}\begin{cases}<0, & 0<x_0<\sqrt[3]{2},\\ =0, & x_0=\sqrt[3]{2},\\ >0, & \sqrt[3]{2}<x_0<2,\end{cases}$$

所以,使 S 取最小值的 $x_0=\sqrt[3]{2}$.

(Ⅱ)由 $f(x)$ 在点 x_0 处可导(此时 $f(x)$ 在点 x_0 处必连续)得 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$,由式②和式③得 $-x_0=-\frac{1}{x_0^2}$,所以 $x_0=1$.将它代入式①得 $A=3$,并且由式④知对应的 S 的

值为

$$S=\left(\frac{1}{6}x_0^3-\ln x_0+2\ln 2-\frac{1}{2}\right)\Big|_{x_0=1}=2\ln 2-\frac{1}{3}.$$

【注】当函数 $F(x)$ 在(a,b) 内连续时，在(a,b) 内未必有最大值或最小值，但是如果 $F(x)$ 在(a,b) 内有唯一极小值点 x_0（或唯一极大值点 x_0），则 x_0 即为使 $F(x)$ 在(a,b) 内取到最小值（或最大值）的点.

13.【解】 先求 $y=\tan^n x$ 在点$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$处的切线方程. 由

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=n\tan^{n-1}x\cdot\sec^2 x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=2n,$$

得切线方程

$$y-1=2n\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

在 x 轴上的截距 $x_n=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n}$，故

$$\lim_{n\to\infty}y(x_n)=\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-\tan\frac{1}{2n}}{1+\tan\frac{1}{2n}}\right]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\tan\frac{1}{2n}\right)^n}{\left(1+\tan\frac{1}{2n}\right)^n}\overset{(*)}{=\!=}\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=e^{-1},$$

其中（*）处做如下处理：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1\pm\tan\frac{1}{2n}\right)^n\overset{\text{“}1^\infty\text{”型}}{=\!=\!=}\lim_{n\to\infty}\left(1\pm\tan\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{\pm\tan\frac{1}{2n}}\cdot\frac{\pm\tan\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}}}=e^{\pm\frac{1}{2}}.$$

14.【解】（Ⅰ）由题设知，$f(x)$ 在$(-2,+\infty)$ 内连续，所以

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln|1+x|}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}=\frac{1}{2},$$

$$f(-1)=\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{\ln|1+x|}-\frac{1}{x}\right)=1.$$

（Ⅱ）考虑 $f(x)$ 的单调性. 当 $x\neq -1$ 且 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=\frac{-1}{(1+x)\ln^2|1+x|}+\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{(1+x)\ln^2|1+x|-x^2}{x^2(1+x)\ln^2|1+x|}.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

令

$$g(x)=(1+x)\ln^2|1+x|-x^2, \text{有 } g(0)=0,$$
$$g'(x)=2\ln|1+x|+\ln^2|1+x|-2x, \text{有 } g'(0)=0,$$
$$g''(x)=\frac{2}{1+x}+\frac{2\ln|1+x|}{1+x}-2$$
$$=\frac{2}{1+x}(\ln|1+x|-x)<0(-1<x<+\infty \text{ 且 } x\neq 0),$$

由泰勒公式,有

$$g(x)=\frac{1}{2}g''(\xi)x^2<0, -1<x<+\infty \text{ 且 } x\neq 0,$$

其中 ξ 在 0 和 x 之间,且 $g(0)=0$.

所以当 $-1<x<+\infty$ 且 $x\neq 0$ 时,$f'(x)<0$. 又因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $f(x)$ 在区间$(-1,+\infty)$ 内单调减少.

此外,由 $f'(x)$ 的表达式

$$f'(x)=\frac{(1+x)\ln^2|1+x|-x^2}{x^2(1+x)\ln^2|1+x|}$$

直接可知,当 $-2<x<-1$ 时,分子小于 0,分母亦小于 0,所以 $f'(x)>0$. 从而知 $f(x)$ 在区间$(-2,-1)$ 内单调增加.

所以 $f(-1)=1$ 是 $f(x)$ 的极大值,也是唯一的一个极值.

15.(Ⅰ)(D) **【解析】**由题意,易得 $y'=\frac{1}{x}, y''=-\frac{1}{x^2}$,由曲率公式,有

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}(x>0).$$

则

$$\frac{dK}{dx}=\frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}}.$$

令 $\frac{dK}{dx}=0$,得 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,$\frac{dK}{dx}>0$;当 $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,$\frac{dK}{dx}<0$,则 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 为 K 的唯一驻点且是极大值点,故在 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处 K 取最大值,最大值 $K=\frac{2}{3^{3/2}}$. 选(D).

(Ⅱ)**【解】**收益函数 $R(Q)=Q\overline{R}(Q)=aQ-\frac{1}{2}bQ^2$,当取得最大利润时,边际收益等于边际成本,即

$$MR=MC.$$

又 $MR=\frac{dR}{dQ}=a-bQ$,于是

$$44=\frac{dC}{dQ}=2Q^2-32Q+100, \text{即 } Q^2-16Q+28=0,$$

解得 $Q_1=14, Q_2=2$.

又 $\frac{d^2R}{dQ^2}=-b<0, \frac{d^2C}{dQ^2}=4Q-32, \left.\frac{d^2C}{dQ^2}\right|_{Q=14}=24>0, \left.\frac{d^2C}{dQ^2}\right|_{Q=2}=-24$,

故当 $Q=14$ 时,$\frac{d^2R}{dQ^2}<\frac{d^2C}{dQ^2}$,企业利润取极大值.

由于 $MR=\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=p\left(1-\dfrac{1}{E_p}\right)$,即 $44=p\left(1-\dfrac{19}{41}\right)$,得 $p=82$.

又 $\overline{R}(Q)=p$,于是,当 $Q=14$ 时,有$\begin{cases}82=a-\dfrac{1}{2}b\cdot 14,\\44=a-b\cdot 14,\end{cases}$解得 $a=120,b=\dfrac{38}{7}$.

当 $Q=2$ 时,得 $b=38$,不满足 $0<b<24$ 的条件.故舍去.

所以当产量 $Q=14$ 时,企业利润取极大值,也是最大值.常数 $a=120,b=\dfrac{38}{7}$.

16.【解】 当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f(x)$ 单调增加 $\Leftrightarrow f'(x)\geqslant 0$ 且在 $(0,+\infty)$ 的任意子区间上 $f'(x)\not\equiv 0$. 由 $f(x)=k\ln(1+x)-\arctan x$,则

$$f'(x)=\frac{k}{1+x}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{k(1+x^2)-(1+x)}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{kx^2-x+k-1}{(1+x)(1+x^2)}.$$

若 $k\leqslant 0$,则 $f'(x)<0(x>0)$,于是只需考查 $k>0$ 的情形.

令 $g(x)=kx^2-x+k-1$,则当 $x>0$ 时 $f'(x)$ 与 $g(x)$ 同号.

由于 $g(x)$ 满足

$$g'(x)=2kx-1\begin{cases}<0, & 0<x<\dfrac{1}{2k},\\[2mm] =0, & x=\dfrac{1}{2k},\\[2mm] >0, & x>\dfrac{1}{2k},\end{cases}$$

可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值 $\min g(x)=g\left(\dfrac{1}{2k}\right)=\dfrac{k}{4k^2}-\dfrac{1}{2k}+k-1=k-1-\dfrac{1}{4k}$. 为使 $\min g(x)\geqslant 0$ 成立,只需 k 满足 $k-1-\dfrac{1}{4k}\geqslant 0\Leftrightarrow 4k(k-1)\geqslant 1\Leftrightarrow k^2-k-\dfrac{1}{4}\geqslant 0\Leftrightarrow k\geqslant\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$. 则当 $x>0$ 时,使得 $f(x)=k\ln(1+x)-\arctan x$ 单调增加的 k 是大于或等于 $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$ 的一切正数.

17.【证】(Ⅰ)由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,又 $f(a)<0,f(b)>0$,由闭区间连续函数的零点定理知,存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$,又由 $f'(x)>0$ 知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加,故 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内恰有一个根 ξ.

(Ⅱ)为便于叙述,画出坐标轴与各点如图 2 所示,

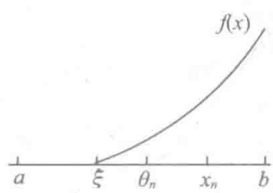

图 2

由泰勒公式，有 $f(\xi)=f(x_n)+f'(x_n)(\xi-x_n)+\frac{f''(\theta_n)}{2}(\xi-x_n)^2$，$\theta_n$ 介于 ξ,x_n 之间. 由 $f''(x)>0,f(\xi)=0$，知

$$f(x_n)+f'(x_n)(\xi-x_n)=-\frac{f''(\theta_n)}{2}(\xi-x_n)^2<0,$$

从而解出 $\xi<x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_{n+1}$，由 $f(x)$ 单调增加，则

$$f(x_{n+1})>f(\xi)=0,\text{于是 } x_{n+1}-x_n=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}<0,x_{n+1}<x_n,$$

所以 $\{x_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上单调减少.

又 $x_n>\xi>a$，$\{x_n\}$ 有下界，由单调有界准则，得 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $A\in[a,b]$，且 $A=A-\frac{f(A)}{f'(A)}$，即 $f(A)=0$，由(Ⅰ)知零点唯一，故 $A=\xi$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

18.【证】(Ⅰ)由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=2$，知 $f(0)=0,f(1)=0$，$f'_+(0)=1,f'_-(1)=2$.

又由 $f(0)=0,f'_+(0)=1>0$，知在 $x=0$ 右半邻域内存在 x_1，使 $f(x_1)>0$；再由 $f(1)=0,f'_-(1)=2>0$，知在 $x=1$ 左半邻域存在点 x_2，使 $f(x_2)<0$，且 $x_1<x_2$. 由连续函数的介值定理知存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使 $f(\xi)=0$，即存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$.

(Ⅱ)令 $\varphi(x)=e^xf(x)$，由 $f(0)=f(\xi)=f(1)=0$ 知 $\varphi(0)=\varphi(\xi)=\varphi(1)=0$，由罗尔定理知存在 $\xi_1\in(0,\xi),\xi_2\in(\xi,1)$ 使 $\varphi'(\xi_1)=\varphi'(\xi_2)=0$，又 $\varphi'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]$，则

$$f(\xi_1)+f'(\xi_1)=0,f(\xi_2)+f'(\xi_2)=0.$$

令 $g(x)=e^{-x}[f(x)+f'(x)]$，则

$$g(\xi_1)=g(\xi_2)=0,$$

由罗尔定理知，存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$，使 $g'(\eta)=0$，而

$$g'(x)=e^{-x}[f''(x)-f(x)],$$

则

$$f''(\eta)-f(\eta)=0,$$

即

$$f''(\eta)=f(\eta).$$

19.【分析】改 ζ 为 x 得

$$f'(x)=2xf(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=2x\Rightarrow\ln f(x)=x^2+C_1\Rightarrow e^{-x^2}f(x)=C.$$

可构造辅助函数 $$F(x)=e^{-x^2}f(x).$$

【证】令 $F(x)=e^{-x^2}f(x)$，则由题设知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，又

$$f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}f(x)dx\xlongequal[\text{存在}\eta\in\left[0,\frac{1}{3}\right]]{\text{积分中值定理}}3\times\left(\frac{1}{3}-0\right)e^{1-\eta^2}f(\eta)=e^{1-\eta^2}f(\eta),$$

$$F(\eta)=\mathrm{e}^{-\eta^2}f(\eta),$$

得
$$F(1)=\mathrm{e}^{-1}f(1)=\mathrm{e}^{-\eta^2}f(\eta)=F(\eta).$$

对 $F(x)$ 在区间 $[\eta,1]$ 上应用罗尔定理知,存在 $\zeta\in(\eta,1)\subset(0,1)$ 使 $F'(\zeta)=0$,即

$$f'(\zeta)=2\zeta f(\zeta).$$

20.【证】将函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处用泰勒公式展开得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\eta)}{3!}x^3,\eta\text{ 介于 }0,x\text{ 之间},$$

分别取 $x=-1,1$ 得

$$0=f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\zeta_1)}{6},\zeta_1\in(-1,0),$$

$$1=f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\zeta_2)}{6},\zeta_2\in(0,1),$$

两式相减消去 $f(0)$,$f''(0)$ 得

$$1=2f'(0)+\frac{1}{3}\cdot\frac{f'''(\zeta_1)+f'''(\zeta_2)}{2}$$

$$=\frac{1}{3}f'''(\zeta)(\text{对 }f'''(x)\text{ 在}[\zeta_1,\zeta_2]\text{上应用介值定理}),$$

所以,存在 $\zeta\in(-1,1)$ 使 $f'''(\zeta)=3$.

21.(A) **【解析】**$I=\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin t)\mathrm{d}t,$

$$J=\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos t)\mathrm{d}t.$$

于是 $\cos(\sin t)-\sin(\cos t)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin t\right)-\sin(\cos t)$,令 $f(t)=\frac{\pi}{2}-\sin t-\cos t$,则 $f'(t)=-\cos t+\sin t$,故 $f(t)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调减少,在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加,所以 $f(t)\geqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}>0$,从而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin t)\mathrm{d}t>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos t)\mathrm{d}t$,即 $I>J$.

22.【解】由 $f^2(x)=r^2-x^2$,知 $r^2=x^2+f^2(x)=x^2+y^2$,故这里的 r,θ 分别为极坐标中的极径与极角,于是 $\theta=\arctan\frac{y}{x}=\arctan\frac{f(x)}{x}$,所以

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\left[\arctan\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{1}{1+\frac{f^2(x)}{x^2}}\cdot\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2},$$

即 $\mathrm{d}\theta=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2+f^2(x)}\mathrm{d}x$,则

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta\xlongequal{\theta=\arctan\frac{f(x)}{x}}\int_a^b[x^2+f^2(x)]\cdot\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2+f^2(x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b[xf'(x)-f(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b x\mathrm{d}[f(x)]-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$=bf(b)-af(a)-2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

故原式 $=bf(b)-af(a)$.

23.（Ⅰ）**【证】** 令 $x=\pi-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，当 $x=0$ 时，$t=\pi$；当 $x=\pi$ 时，$t=0$，于是

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_\pi^0(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]\mathrm{d}t=\pi\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x,$$

故
$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

（Ⅱ）**【解】** 在 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x$ 两边同乘 $\sin x$，并从 $-\pi$ 到 π 积分得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+0=2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2},$$

所以

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\frac{\pi^2}{2}.$$

24.（Ⅰ）**【证】** 因为 $\int_{-a}^{a}\dfrac{f(x)}{1-e^x}\mathrm{d}x=\int_0^a\dfrac{f(x)}{1-e^x}\mathrm{d}x+\int_{-a}^0\dfrac{f(x)}{1-e^x}\mathrm{d}x$，其中

$$\int_{-a}^0\frac{f(x)}{1-e^x}\mathrm{d}x\xlongequal{x=-t}-\int_a^0\frac{f(-t)}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t=\int_0^a\frac{f(t)}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_{-a}^a\frac{f(x)}{1-e^x}\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\left(\frac{1}{1-e^x}+\frac{1}{1-e^{-x}}\right)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

（Ⅱ）**【解】** 由（Ⅰ），有 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^6 x}{1-e^x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\mathrm{d}x=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5}{32}\pi.$

25.【证】（Ⅰ）令

$$F(x)=\left[\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right]^2-\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t\cdot\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t,$$

则 $F(a)=0$.

当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，

$$F'(x)=2\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)g(x)-f^2(x)\cdot\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t-g^2(x)\cdot\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t$$
$$=-\int_a^x\{[f(x)g(t)]^2-2f(t)g(t)f(x)g(x)+[g(x)f(t)]^2\}\mathrm{d}t$$
$$=-\int_a^x[f(x)g(t)-g(x)f(t)]^2\mathrm{d}t\leqslant 0,$$

故 $F(x)$ 单调不增.

于是当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$F(x)\leqslant 0$，则 $F(b)\leqslant 0$，即

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

（Ⅱ）由 $f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$，再由（Ⅰ）可知，当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时有

$$f^2(x)=\left[\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2\leqslant\int_a^x 1^2\mathrm{d}t\cdot\int_a^x[f'(t)]^2\mathrm{d}t$$
$$=(x-a)\int_a^x[f'(t)]^2\mathrm{d}t\leqslant(x-a)\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t,$$

两边对 x 从 a 到 b 积分，便得 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x$.

【注】（Ⅰ）中所证不等式叫柯西—施瓦茨不等式，它是定积分中的一个重要不等式，常可用来证明一些其他不等式.

26.（Ⅰ）**【证】** 令 $\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x$，由于 $f(x)$ 单调增加，可知

$$f(k)=\int_k^{k+1}f(k)\mathrm{d}x<\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x<\int_k^{k+1}f(k+1)\mathrm{d}x=f(k+1),$$

故

$$\sum_{k=1}^{n-1}f(k)<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x<\sum_{k=1}^{n-1}f(k+1),$$

即
$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)<\int_1^n f(x)\mathrm{d}x<f(2)+f(3)+\cdots+f(n).$$

（Ⅱ）**【证】** 取 $f(x)=\ln x$，由（Ⅰ），得

$$\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln(n-1)<\int_1^n\ln x\mathrm{d}x<\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n,$$

即

$$\ln[(n-1)!]<\int_1^n\ln x\mathrm{d}x<\ln(n!).$$

又

$$\int_1^n\ln x\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_1^n-\int_1^n\mathrm{d}x$$
$$=n\ln n-(n-1)$$
$$=\ln n^n+1-n,$$

代入上面的不等式，可得

$$\ln[(n-1)!]<\ln n^n+(1-n)<\ln(n!)，即 (n-1)!<\mathrm{e}^{1-n}\cdot n^n<n!,$$

整理可得
$$\mathrm{e}^{1-n}\cdot n^n<n!<\mathrm{e}^{1-n}\cdot n^{n+1}.$$

（Ⅲ）**【解】** 由（Ⅱ），得 $\mathrm{e}^{1-n}<\frac{n!}{n^n}<\mathrm{e}^{1-n}\cdot n$，则

$$\frac{\sqrt[n]{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}<\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}<\frac{\sqrt[n]{n\mathrm{e}}}{\mathrm{e}},$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mathrm{e}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\mathrm{e}}=1$，由夹逼定理，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

27.【解】 去掉绝对值符号，可得

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-1}^{x}(x-t)e^{t}dt+\int_{x}^{1}(t-x)e^{t}dt\\&=x\int_{-1}^{x}e^{t}dt-\int_{-1}^{x}te^{t}dt+\int_{x}^{1}te^{t}dt-x\int_{x}^{1}e^{t}dt,\\&=x(e^{x}-e^{-1})-(xe^{x}-e^{x}+e^{-1}+e^{-1})+\\&\quad(e-e-xe^{x}+e^{x})-x(e-e^{x})\\&=-e^{-1}x+2e^{x}-ex-2e^{-1}.\end{aligned}$$

故

$$F'(x)=-e^{-1}+2e^{x}-e,$$

令 $F'(x)=0$，解得 $x_0=\ln\dfrac{e+e^{-1}}{2}$，又 $F''(x_0)=e+e^{-1}>0$，可知 $x_0=\ln\dfrac{e+e^{-1}}{2}$ 是 $F(x)$ 的极小值点，$F(x_0)=e-e^{-1}-(e+e^{-1})\ln\dfrac{e+e^{-1}}{2}$ 为极小值，也是最小值.

考查 $F(x)$ 在区间两端点处值的大小.

$$F(-1)=e+e^{-1},F(1)=e-3e^{-1},$$

所以 $F(-1)=e+e^{-1}$ 为最大值.

28.【解】（Ⅰ）由题意得

$$\lim_{x\to+\infty}y=\int_{0}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\int_{0}^{-\infty}e^{-t^2}dt\xlongequal{t=-u}\int_{0}^{+\infty}e^{-u^2}(-du)=-\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故 y 的全部渐近线为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

（Ⅱ）曲线与其渐近线及 y 轴所围图形如图 3 阴影部分所示，则

$$\begin{aligned}S&=2\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_{0}^{x}e^{-t^2}dt\right)dx\\&=2\left[x\cdot\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_{0}^{x}e^{-t^2}dt\right)\Big|_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}x\cdot(-e^{-x^2})dx\right]\\&=2\left[\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_{0}^{x}e^{-t^2}dt\right)-\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}d(-x^2)\right]\\&=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}-\displaystyle\int_{0}^{x}e^{-t^2}dt}{\dfrac{1}{x}}-e^{-x^2}\Big|_{0}^{+\infty}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{-x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}+1\\&=2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}+1=1.\end{aligned}$$

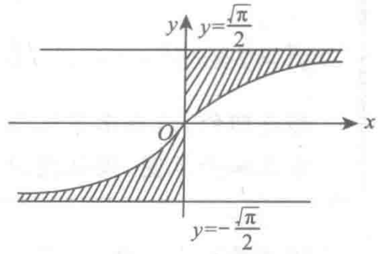

图 3

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com