普通高等教育“十三五”规划教材

全国普通高等教育基础医学类系列教材

罗亚玲　姚莉　主编

医用高等数学

MEDICAL MATHEMATICS

供临床、儿科、预防、麻醉、影像、药学、口腔、基础、检验、法医、中药等医学类专业使用

科学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

(R-7519.01)

医用高等数学
医用高等数学学习指导

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-057356-8

9 787030 573568 >

定 价：68.00 元

科学出版社互联网入口

科学EDU

科学出版社 高等医学教育出版分社
联系电话：010-64033532 64033746
E-mail：sp-med@mail.sciencep.com

普通高等教育“十三五”规划教材

全国普通高等教育基础医学类系列教材

供临床、儿科、预防、麻醉、影像、药学、口腔、基础、检验、法医、中药等医学类专业使用

医用高等数学

MEDICAL MATHEMATICS

罗亚玲　姚　莉　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本教材是按照教育部非数学专业数学基础课程教学指导分委员会指定的“医学类本科数学基础课程教学基本要求”、在长期教学实践的基础上，为普通医学高等院校相关专业少学时类高等数学课程编写的高等数学教材。

本教材包括微积分、概率论与线性代数三个部分。其中，微积分部分的内容有：函数、极限与连续，导数与微分，不定积分，定积分，多元函数微积分，常微分方程数，无穷级数；概率论部分的内容有：随机事件与概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征；线性代数的内容有：行列式和矩阵，矩阵的初等变换，n维向量，矩阵的特征值与特征向量。

本教材的适用对象主要是医学院校各专业本科生，也可作为研究生以及医药学工作者的数学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

医用高等数学 / 罗亚玲，姚莉主编. —北京：科学出版社，2018.6
普通高等教育“十三五”规划教材·全国普通高等教育基础医学类系列教材
ISBN 978-7-03-057356-8

Ⅰ. ①医… Ⅱ. ①罗… ②姚… Ⅲ. ①医用数学–高等学校–教材
Ⅳ. ①R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第091468号

责任编辑：王 颖 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：赵 博 / 封面设计：陈 敬

版权所有，违者必究。未经本社许可，数字图书馆不得使用

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018年6月第 一 版 开本：889×1194 1/16
2018年6月第一次印刷 印张：18 1/2
字数：489 000
定价：68.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《医用高等数学》
编写委员会

主　编

罗亚玲　姚　莉

副 主 编

梁　波　万里平

编　委

（以姓氏笔画为序）

万里平(重庆医科大学)

罗亚玲(重庆医科大学)

姚　莉(重庆医科大学)

梁　波(重庆医科大学)

需要全本请访问 www.ertongbook.com

全国普通高等教育基础医学类

系列教材

专家指导委员会

主任委员

侯一平

副主任委员

孙　俊　王应雄　程晓斌　胡华强

委　员

（以姓氏笔画为序）

王应雄(重庆医科大学)
王建伟(重庆医科大学)
王聚乐(西藏大学)
龙汉安(西南医科大学)
孙　俊(昆明医科大学)
阮永华(昆明医科大学)
李　华(四川大学华西基础医学与法医学院)
杨　林(成都大学)
杨　明(贵州医科大学)
张　波(川北医学院)
张宗诚(成都医学院)
欧刚卫(遵义医学院)
侯一平(四川大学华西基础医学与法医学院)
胡华强(中国科技出版传媒股份有限公司)
柯享宁(宁夏医科大学)
钟近洁(新疆医科大学)
高永翔(成都中医药大学)
郭宪国(大理大学)
淤泽溥(云南中医学院)
程晓斌(陆军军医大学)

前　言

《医用高等数学》是高等医学院校的重要基础课程，其目的在于为医学生提供必要的数学基础、文化素养和知识储备，使其在医疗卫生信息化时代具备合理的知识结构，为相关课程的学习及今后的发展打下良好的基础。

本教材的特点主要有：

1. 体系完整：本书保留了知识的完整性，在纳入经典高等数学知识体系的同时，整合了概率论和线性代数，力求使内容尽量覆盖医药学领域中通常涉及到的数学知识，以使学生在较少的学时内系统化地了解较为完整的数学理论，为后续数学课程的深入学习以及其他相关课程的学习打下必备的数学基础。

2. 实用性强：本书注重了内容的实用性，在兼顾理论体系完整的前提下，对概念和定理适当忽略理论推导、加强实际意义的解释和应用，以使学生既能理解其意义，又能掌握其应用，突出了基础学科与医学应用的结合。

3. 案例丰富：本书纳入了丰富的医学应用案例，具有鲜明的医学应用特色，突出了利用数学理论解决医学问题的思想。

本教材第 1 章、第 2 章由重庆医科大学罗亚玲编写，第 3 章、第 5 章、第 6 章由重庆医科大学姚莉编写，第 4 章、第 8 章、第 9 章由重庆医科大学梁波编写，第 7 章、第 10 章由重庆医科大学万里平编写。

本教材在编写过程中参考了各种层次的高等数学教材以及各医学院校同仁编写的医学（医用）高等数学教材，在此表示衷心感谢！科学出版社为本书的出版给予了大力的支持和帮助，在此一并致谢！

期待各位专家、同行和广大读者对本书的不足和疏漏之处予以指教。

编　者

2017 年 3 月 30 日于重庆

目　录

前言

第 1 章　函数、极限与连续　1

1.1　函数　1
1.2　初等函数　4
1.3　极限的概念　9
1.4　极限的计算　16
1.5　无穷小量与无穷大量　20
1.6　函数的连续性　23
习题一　28

第 2 章　函数的导数与微分　32

2.1　导数概念　32
2.2　基本导数公式　37
2.3　函数的求导法则　38
2.4　高阶导数　47
2.5　函数的微分　49
习题二　54

第 3 章　中值定理和导数的应用　58

3.1　微分中值定理　58
3.2　洛必达法则　60
3.3　函数的单调性与曲线的凹凸性　63
3.4　函数的极值与最大值最小值　66
3.5　函数图形的描绘　70
习题三　72

第 4 章　不定积分　74

4.1　不定积分的基本概念与性质　74
4.2　换元积分法　77
4.3　分部积分法　81
4.4　有理函数的积分　83
4.5　积分表的使用　88
习题四　89

第 5 章　定积分　92

5.1　定积分的概念与性质　92
5.2　牛顿-莱布尼茨公式　97
5.3　定积分的计算　101
5.4　广义积分　108
5.5　定积分的应用　113
习题五　117

第 6 章　多元函数微积分　120

6.1　多元函数的基本概念　120
6.2　偏导数　127

6.3 全微分及其应用 130
6.4 多元复合函数的求导方法 133
6.5 二元函数的极值 135
*6.6 最小二乘法 137
6.7 二重积分 141
习题六 148

第7章 微分方程 151

7.1 微分方程的基本概念 151
7.2 可分离变量的微分方程 154
7.3 一阶线性微分方程 159
7.4 几种可降阶的微分方程 164
7.5 二阶常系数线性齐次微分方程 167
7.6 微分方程在医药学中的应用 172
习题七 183

第8章 级数理论 186

8.1 数项级数 186
8.2 幂级数 193
8.3 傅里叶级数 201
习题八 209

第9章 概率论基础 211

9.1 随机事件与样本空间 211
9.2 概率与古典概型 213
9.3 条件概率 216
9.4 独立性与伯努利概型 220
9.5 离散型随机变量 222
9.6 连续型随机变量 225
9.7 随机变量的数字特征 228
习题九 232

第10章 线性代数基础 234

10.1 行列式 234
10.2 矩阵 246
10.3 矩阵的初等变换 256
10.4 n 维向量 265
10.5 矩阵的特征值与特征向量 273
习题十 275

主要参考文献 278

附录 279

附录1 积分表 279
附录2 泊松分布概率函数值表 286
附录3 标准正态分布概率函数值表 288

第 1 章

函数、极限与连续

函数是微积分学的基本研究对象，极限是微积分学研究函数的基础方法，连续函数是微积分学主要讨论的重要函数。因此，函数、极限与连续是微积分学乃至整个高等数学的重要基础。

本章介绍函数及相关概念、极限的概念及计算方法、连续函数的概念及性质。

1.1 函　　数

1.1.1 区间及邻域

区间及邻域是函数表达所必须的基本概念，描述如下：

已知实数 a、b，$a<b$。称由 a、b 之间的全体实数组成的集合为**开区间**(open interval)，记为(a, b)；称数 a 为区间的**左端点**，数 b 为区间的**右端点**，统称为**区间端点**；称由开区间(a, b)和端点 a、b 组成的集合为**闭区间**(closed interval)，记为$[a, b]$。用集合表示为

$$(a,b)=\{x|a<x<b,x\in\mathbf{R}\},\ [a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\};$$

称由开区间(a, b)和左端点a组成的集合为**左闭右开区间**，记为$[a,b)$；由开区间(a, b)和右端点b组成的集合为**左开右闭区间**，记为$(a,b]$。用集合表示为

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\};\ (a,b]=\{x|a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}。$$

区间$[a,b)$ 和$(a,b]$ 统称为**半开半闭区间**。

以上区间统称为**有限区间**。以下区间统称为**无穷区间**：

$$(a,+\infty)=\{x|x>a,x\in\mathbf{R}\},\ [a,+\infty)=\{x|x\geqslant a,x\in\mathbf{R}\},$$

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a,x\in\mathbf{R}\},\ (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\},$$

$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}。$$

邻域是一种特殊的区间，描述为：

已知实数 a，实数 $\delta>0$。称与点 a 的距离小于 δ 的全体实数组成的集合为**点 a 的 δ 邻域**(neighbourhood)，记为$\cup(a,\delta)$，简记为$\cup(a)$；称从点 a 的 δ 邻域中去掉数 a 所得的集合为**点 a 的空心 δ 邻域**，记为$\cup^{\circ}(a,\delta)$。用集合表示为

$$\cup(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\},\ \cup^{\circ}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$$

可见，点 a 的 δ 邻域是区间 $(a-\delta,a+\delta)$，几何上是以点 a 为中心、以 δ 为半径的开区间；点 a 的空心 δ 邻域是区间 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$。

点 a 的右 δ 邻域用记号$\cup^{+}(a,\delta)$表示，定义为数集

$$\cup^{+}(a,\delta)=\{x|0<x-a<\delta,x\in\mathbf{R}\}$$

点 a 的左 δ 邻域用记号$\cup^{-}(a,\delta)$表示，定义为数集

$$\overset{\circ}{\cup}(a,\delta)=\{x\mid 0<a-x<\delta, x\in\mathbf{R}\}$$

1.1.2 函数的定义

定义 1.1.1(函数) 设有两个变量 x、y，如果变量 x 在其变化范围 D 内任取确定的数值时，按照某个对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**(function)。记为：

$$y=f(x),\quad x\in D$$

其中，x 称为**自变量**(independent variable)，y 称为**因变量**(dependent variable)或**函数变量**(function variable)，D 称为函数的**定义域**(domain of definition)或**存在域**，f 表示由 x 确定 y 的对应法则。当 x 在 D 中取定某个值时，与之对应的 y 值称为**函数值**(function value)，全体函数值组成的集合称为函数的**值域**(range)，记为 $f(D)$，$f(D)=\{y\mid y=f(x), x\in D\}$。

决定一个函数的因素是其对应法则 f 及函数的定义域 D。一般地，函数的定义域由数学上函数有无意义来确定。当函数关系由实际问题给出时，定义域也由实际问题确定。

例 1.1.1 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x-15}}{x-3}$ 的定义域。

解 要使函数有意义，变量 x 必须同时满足

$$\begin{cases}x^2-2x-15\geqslant 0\\ x-3\neq 0\end{cases},\ \text{即}\begin{cases}(x-5)(x+3)\geqslant 0\\ x\neq 3\end{cases}$$

解得 $x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 5$。所以该函数的定义域为 $(-\infty,-3]\cup[5,+\infty)$。

例 1.1.2 英国人口学家马尔萨斯(Malthas)于 1798 年建立了人口增长的指数模型：

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{rt} \tag{1.1.1}$$

其中，t 表示时间，$N(t)$ 表示 t 时刻的人口数量，N_0 表示初始时刻 $t=0$ 时的人口基数，r 表示人口的增长率(常数)。

则 模型函数(1. 1. 1)的定义域是 $[0,+\infty)$。

例 1.1.3 对于 1～6 个月的婴儿，由月龄估计体重的经验公式如下：

$$y=3+0.6x \tag{1.1.2}$$

这里，x 表示月份，y 表示体重(kg)。指出函数(1.1.2)的定义域，并据此估计 3 个月婴儿的标准体重。

解 根据题意，函数(1.1.2)的定义域是 $[1,6]$。

由于 $y(3)=3+0.6\times 3=4.8(\text{kg})$，所以 3 个月婴儿的标准体重估计为 4.8kg。

1.1.3 函数的表示法

常用的函数表示法有三种。

1. 解析法

解析法即用数学式子表示函数的方法，又称**公式法**。其优点在于函数关系清楚，容易从自变量的值求出对应的函数值，便于从理论上研究函数的特性，并且可由此得出函数表、函数图形，是函数表示法中最重要的一种。

有些函数在其定义域的不同范围内需要用不同的数学式子表示，称这种函数为**分段函数**。

例 1.1.4 静脉注射 G 钠盐 100 000 单位后，血清中的药物浓度 C 为时间 t 的函数 $C(t)$：

$$C(t)=\begin{cases}14.38t, & 0\leqslant t<0.25\\ 4.66-4.26t, & 0.25\leqslant t<1\\ 0.6-0.2t, & 1\leqslant t\leqslant 3\end{cases} \tag{1.1.3}$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

其中，时间 t 的单位为 h，浓度 $C(t)$ 的单位为：单位/ml。

分段函数是一个函数，不是几个函数。其定义域是自变量各取值范围的并；求函数值时，应将不同范围的自变量代入相应的表达式计算；作图时，应在不同分段上根据相应表达式作出相应的图形。

例1.1.4中，函数(1.1.3)的定义域是 $[0,3]$；$C(0.5)=4.66-4.26\times0.5=2.53$ (单位/ml)，$C(2)=0.6-0.2\times2=0.2$ (单位/ml)；函数 $C=C(t)$ 的图像如图1-1。

2. 列表法

列表法是指用表格列出一系列自变量值及其所对应的函数值，以直接显示函数的对应关系的方法。其特点是简单直观，但表达函数不完整，难以直接反映出变量间的内在规律。医学等实验科学中常用此法。

例1.1.5　葡萄糖耐糖试验。对正常人、轻度糖尿病人及重度糖尿病人，都按1.75g/kg 体重的量口服葡萄糖。服糖前($t=0$ 时)及服糖后 0.5 、1 、2 以及 3 小时各测一次血糖，有如下数据(表1-1)：

表1-1

口服葡萄糖后时刻 t(h)	0	0.5	1	2	3
正常人血糖水平 y_1(mg%)	95	135	150	100	88
轻度糖尿病人血糖水平 y_2(mg%)	115	150	175	165	120
重度糖尿病人血糖水平 y_3(mg%)	200	230	250	255	260

3. 图像法

图像法是把变量之间的函数关系借助图形表示出来的方法。其特点是能形象直观地反映函数的变化情况，但表达函数欠准确。医学等实验科学中也经常使用，例如心电图、脑电图等。

由图1-1可分析出，静脉注射使血液中的药物浓度迅速升高(呈直线增加)，在 $\frac{1}{4}$ h 左右，血清中的药物浓度达到高峰，但很快消失，3h 后就很难测到了。

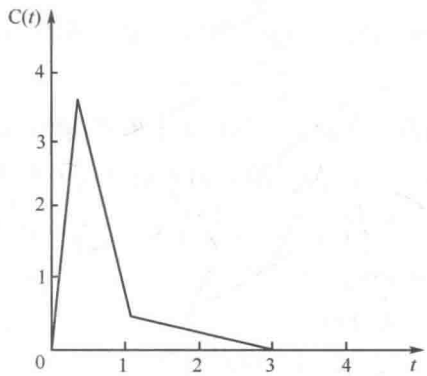


图 1-1

1.1.4　函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subset D$。如果存在某常数 K_1，使得对任意 $x\in I$，都有

$$f(x)\leqslant K_1,$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上有上界，并称 K_1 为函数 $f(x)$ 的一个**上界**(upper bound)。如果 K_1 是 $f(x)$ 在 I 上的一个上界，则任何大于 K_1 的数都是 $f(x)$ 在 I 上的上界；如果存在某常数 K_2，使得对任意 $x\in I$，都有

$$f(x)\geqslant K_2,$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有下界**，并称 K_2 为函数 $f(x)$ 的一个**下界**(lower bound)。如果 K_2 是 $f(x)$ 在 I 上的一个下界，则任何小于 K_2 的数都是 $f(x)$ 在 I 上的下界。

如果函数 $y=f(x)$ 在 I 上既有上界，又有下界，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界**(bounded)，并称函数 $f(x)$ 为集合 I 上的**有界函数**(bounded function)。如果 $f(x)$ 在集合 I 上有界，则必然存在某正数 K，使得对任何 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant K\ 。$$

几何上，有界函数的图像必落在直线 $y=K$ 与 $y=-K$ 之间的带形区域内。

例 1.1.6　判别下列函数在指定区间上的有界性：

(1) $y=x^2$，$x\in[-1,2]$；(2) $y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$；(3) $y=\tan x$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$。

解 (1) 由于函数 $y=x^2$ 在区间 $[-1,2]$ 上有最小值 0、最大值 4，所以 $y=x^2$ 在 $[-1,2]$ 上有界，$y=x^2$ 的图像落在 $y=4$ 与 $y=-4$ 之间的带形区域内。

(2) 由于当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，函数 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，其图像落在 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间的带形区域内。

(3) 由 $y=\tan x$ 的图像可知，$\tan x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内有下界，无上界，所以 $\tan x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内无界。

2. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，D 是对称于原点的数集。如果对任何 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**(odd function)；如果对任何 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**(even function)。

几何上，奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称。

例如，函数 $y=x$ 是奇函数，函数 $y=x^2$ 是偶函数。

3. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$。如果对区间 I 上任意两个数 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调递增**(monotone increase)；如果对区间 I 上任意两个数 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调递减**(monotone decrease)。单调递增和单调递减的函数统称为**单调函数**(monotone function)。如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调的，则称区间 I 为函数 $f(x)$ 的**单调区间**。

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的，在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的。

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D。如果存在某个正数 T，使得对任何 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**(periodic function)，并称 T 为 $f(x)$ 的**周期**(period)。

显然，若 T 为函数 $f(x)$ 的周期，则 $2T$、$3T$、…也都为 $f(x)$ 的周期，故周期函数一定有无限多个周期。若在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中有一个最小周期 T，则称 T 为 $f(x)$ 的**基本周期**。一般说到周期函数的周期时，指的都是基本周期。但周期函数不一定有最小周期，如常数函数 $y=C$。

例如，函数 $y=\sin x$ 为周期函数，其周期为 $2k\pi,k\in\mathbf{Z}^+$，基本周期为 2π.

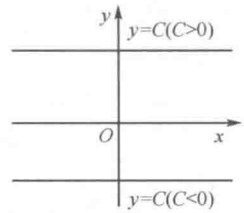
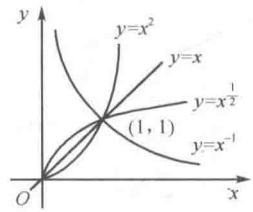
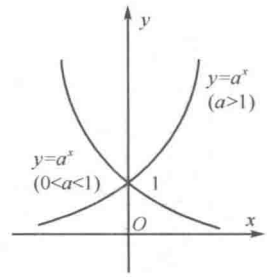
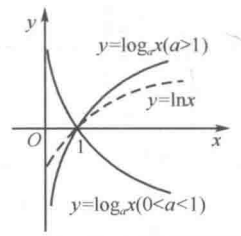
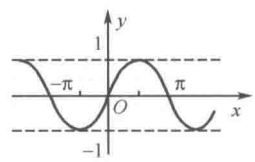
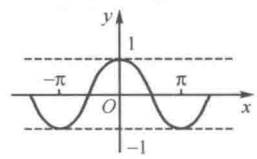
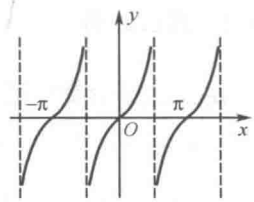
1.2 初等函数

初等函数是微积分中最常见的函数，它是由基本初等函数按一定方式构成的。

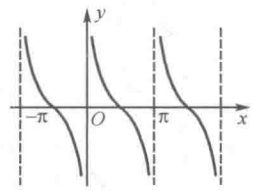
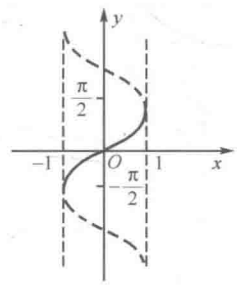
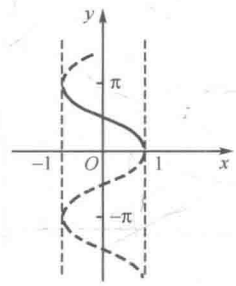
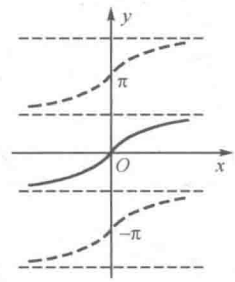
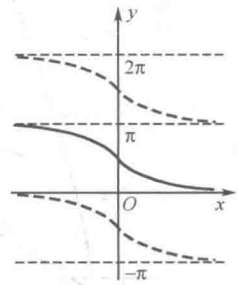
1.2.1 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数统称为**基本初等函数**(basic elementary function)。它们的表达式、定义域、值域、特性及图形详见表 1-2。

表1-2

函数名称		表达式	定义域和值域	特性	图形
常数函数		$y=C$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$\{y \mid y=C\}$	偶函数; 不存在最小正周期的周期函数	
幂函数		$y=x^{\alpha}$ (α 为非零实数)	定义域和值域视 α 的取值而定	奇偶性视 α 的取值而定。 图像均过(1,1)点	
指数函数		$y=a^{x}$　　$(a>0, a\neq 1)$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$(0,+\infty)$	$a>1$ 时,图像单调递增; $0<a<1$ 时,图像单调递减。 图像过(0,1)点	
对数函数		$y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$	定义域：$(0,+\infty)$ 值域：$(-\infty,+\infty)$	$a>1$ 时, 图像单调递增; $0<a<1$ 时, 图像单调递减。 图像过(1,0)点	
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$[-1,1]$	奇函数; 有界函数; 周期函数 (基本周期为 2π)	
	余弦函数	$y=\cos x$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$[-1,1]$	偶函数; 有界函数; 周期函数 (基本周期为 2π)	
	正切函数	$y=\tan x$	定义域：$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}$ 值域：$(-\infty,+\infty)$	奇函数; 周期函数 (基本周期为 π)	

续表

函数名称		表达式	定义域和值域	特性	图形
三角函数	余切函数	$y=\cot x$	定义域：$x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$ 值域：$(-\infty,+\infty)$	奇函数; 周期函数 (基本周期为 π)	
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	定义域：$[-1,1]$ 主值域：$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	主值范围 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 内单调递增	
	反余弦函数	$y=\arccos x$	定义域：$[-1,1]$ 主值域：$[0,\pi]$	主值范围 $[0,\pi]$ 内单调递减	
	反正切函数	$y=\arctan x$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 主值域：$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	主值范围 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调递增	
	反余切函数	$y=\operatorname{arccot}x$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 主值域：$(0,\pi)$	主值范围 $(0,\pi)$ 内单调递减	

1.2.2 复合函数

定义 1.2.1(复合函数) 设函数 $y=f(u), u\in E$，$u=\varphi(x)$，$x\in D$。D^* 表示 D 中使得 $y=f(u)$ 有意义的全体 x 的非空集合，即 $D^*=\{x|u=\varphi(x)\in E, x\in D\}\neq\Phi$。若对于 D^* 中任何一个 x，通过函数 $u=\varphi(x)$ 对应 E 中唯一的 u，又通过函数 $y=f(u)$ 对应唯一的 y 值，因此对每一个 $x\in D^*$，变量 y 都有唯一确定的值与之对

应，这就得到了一个定义在集合 D^* 上的函数，记为

$$y=f[\varphi(x)],\ x\in D^* \tag{1.2.1}$$

称之为由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**(composite function)。其中，称 $y=f(u)$ 为**外函数**，$u=\varphi(x)$ 为**内函数**，u 为**中间变量**。

例 1.2.1　设 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$，求出 y 关于 x 的复合函数。

解　函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域是 $E=[0,+\infty)$，函数 $u=1-x^2$ 的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$。其中，当且仅当 $x\in D^*=[-1,1]$ 时，$u=1-x^2\in E$。所以，y 关于 x 的复合函数为：

$$y=\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1]$$

值得注意的是，不是任意两个函数都能够通过复合运算构成一个函数。

例 1.2.2　设 $y=\sqrt{1-u^2}$，$u=x^2+2$，求出 y 关于 x 的复合函数。

解　由于内函数 $u=x^2+2$ 的值域 $[2,+\infty)$ 与外函数 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义域 $[-1,1]$ 的交集是空集，这两个函数不能复合成一个函数。

复合函数是表达函数对应法则的一个结构性概念。利用复合函数的概念，可以从结构上把复杂函数分解成简单函数，也可以由简单函数生成新的函数，是复合函数求导、换元积分等后续课程的重要基础。

例 1.2.3　分析函数 $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 的复合结构。

解　令 $y=\sqrt{u}$，则函数 $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 由外函数 $y=\sqrt{u}$ 和内函数 $y=x+\sqrt{x}$ 复合而成。

函数的复合也可以由两个以上的函数经过多次复合而构成一个复合函数。请读者参照定义 1.2.1 自行描述由三个函数复合成一个函数的情形。

例 1.2.4　试分析下列函数的复合结构：

(1) $y=\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$；　　(2) $y=\log_a\sin\mathrm{e}^{x^2+1}$

解　(1) 函数 $y=\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 可分解为：

$$y=\mathrm{e}^u,\ u=-\frac{v^2}{2\sigma^2},\ v=x-\mu$$

(2) 函数 $y=\log_a\sin\mathrm{e}^{x^2+1}$ 分解为：

$$y=\log_a u,\ u=\sin v,\ v=\mathrm{e}^t,\ t=x^2+1$$

例 1.2.5　设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，问复合函数(1) $f(\sin x)$，(2) $f(x+a)$，$(a>0)$的定义域各是什么？

解　(1) 要使函数 $f(\sin x)$ 有意义，必须 $\sin x\in[0,1]$，则 $x\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。故 $f(\sin x)$ 的定义域是 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。

(2) 要使函数 $f(x+a)$ 有意义，必有 $x+a\in[0,1]$，$x\in[-a,1-a]$。所以 $f(x+a)$ 的定义域是 $[-a,1-a]$。

例 1.2.6　定义**符号函数** $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，写出函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\operatorname{sgn}x}$ 的分段函数式。

解　当 $x>0$ 时，$\operatorname{sgn}x=1$，则 $f(x)=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$；当 $x=0$ 时，$\operatorname{sgn}x=0$，则 $f(x)=\mathrm{e}^0=1$；当 $x<0$ 时，$\operatorname{sgn}x=-1$，则 $f(x)=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$。综上所述，得

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}, & x>0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}, & x<0\end{cases}$$

1.2.3 反函数

定义 1.2.2 (反函数) 设函数

$$y=f(x),\ x\in D。\tag{1.2.2}$$

其值域为 $f(D)$。若对 $f(D)$ 中每一个值 y_0，D 中只有一个值 x_0，使得 $f(x_0)=y_0$，令 x_0 与 y_0 相对应，则称由上述法则所确定的函数为函数(1.2.2)的**反函数**(inverse function)，记为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(D)。\tag{1.2.3}$$

相对于反函数(1.2.3)来讲，原来的函数(1.2.2)也称为**直接函数**。由定义 1.2.2 容易看到，函数 $y=f(x)$ 也是函数 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，或者称函数(1.2.2)和函数(1.2.3)互为反函数，这里(1.2.2)的定义域和(1.2.3)的值域相同，(1.2.2)的值域和(1.2.3)的定义域相同，并有

$$f^{-1}\left[f(x)\right]\equiv x,\ f\left[f^{-1}(y)\right]\equiv y。$$

在函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 是函数变量。由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示函数变量，故函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常记为

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in f(D)。$$

例 1.2.7 已知函数 $y=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ -3x, & x<0\end{cases}$，求其反函数 $y=f^{-1}(x)$。

解 当 $x\geqslant 0$ 时，$y=x^2$，则 $x=\sqrt{y}$，$y\geqslant 0$；当 $x<0$ 时，$y=-3x$，则 $x=-\dfrac{y}{3}$，$y<0$。

用 x 表示自变量，y 表示函数变量，得

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ -\dfrac{x}{3}, & x<0\end{cases}。$$

又如，函数 $y=x^3$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 与函数 $y=\sqrt[3]{x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 互为反函数，它们的图像如图 1-2 所示。

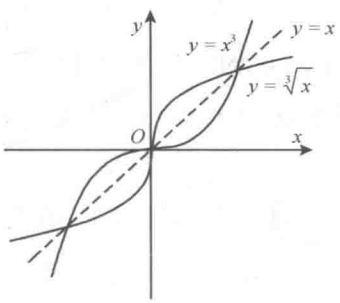


图 1-2

几何上，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称。

定理 1.2.1 严格单调函数必有反函数。严格递增(减)函数的反函数也严格递增(减)。

1.2.4 隐函数

实际问题中，有些函数需要用方程来表示，即函数的隐式表示。

已知方程

$$F(x,y)=0\tag{1.2.4}$$

若对 x 取的每一个值，代入方程(1.2.4)，都可解出确定的 y 值，令这些 y 值与之对应，则由方程(1.2.4)便确定了 y 为 x 的函数。称这种由方程所确定的函数为**隐函数**(implicit function)，并称方程(1.2.4)为 y 的**隐函数方程**。

需要全本请访问 www.ertongbook.com