时代云图
SHI DAI YUN TU

【张宇数学教育系列丛书】

张宇考研数学

闭关修炼一百题

全新优化命制
一百道综合好题
减轻学生负担

习题分册

主　编◎张　宇

扫码 查真伪

中国政法大学出版社

【张宇数学教育系列丛书】

张宇考研数学

闭关修炼一百题

张宇之印

习题分册

主编 ◎ 张宇

副主编 ◎ 高昆轮 朱杰

中国政法大学出版社

2018·北京

图书在版编目（CIP）数据

张宇考研数学闭关修炼一百题/张宇主编. —北京：中国政法大学出版社，2018.5
ISBN 978-7-5620-8274-3

Ⅰ.①张… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 105144 号

出版者　中国政法大学出版社
地　　址　北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址　北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　　话　010-58908285(总编室) 58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　　印　天津市蓟县宏图印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　8
字　　数　200 千字
版　　次　2018 年 5 月第 1 版
印　　次　2018 年 5 月第 1 次印刷
定　　价　25.80 元

前言 Preface

闭关修炼，按照我的理解，是在集中的一段时间内，全神贯注、潜心研究、攻坚克难，实现在学科复习上质的突破。对于数学这门课来说，暑假（7～8 月份）和国庆（10 月 1～7 日）是两个黄金时间段，可以闭关修炼。

在多年对学生进行强化复习的辅导过程中，我们积累了很多适合进行综合提高的好题目，其中有一大批题目从未披露过，包括结合最新命题趋势编制的题目、原命题组长提供的改编题等，这些好题非常有利于学生加深对知识的理解，提高学生的解题能力。

现将这些题目整理成册，命名为《张宇考研数学闭关修炼一百题》，供考生在强化复习过程中使用。当然，本书也给未参加辅导班的学生提供了宝贵的复习资料。

本书与《张宇考研数学题源探析经典 1000 题》，《张宇考研数学真题大全解》几乎无重题，但题量不大，不会增加学生的负担；但话说回来，这一百题知识综合、内容深厚，学生须认真对待。由于这些题目均来自我多年编写和使用的内部资料，编辑出版时间有限，难免有不当之处，欢迎同行专家和读者朋友批评指正。

张宇

2018 年 5 月　于北京

张宇数学教育系列丛书详细说明

书名	主要内容	适用阶段
张宇带你学系列（高等数学(上、下册)、线性代数、概率论与数理统计，共4册）	体现了本科教学要求与考研要求的差异，列出了章节学习的知识体系，给出了所有课后习题的全面解析，精选了不同数量的经典例题	大一大二学生课后习题复习及考研基础阶段
全国高校期末考试过关必备与高分指南系列（高等数学(微积分)(上、下册)、线性代数、概率论与数理统计，共4册）	以教育部大学数学课程指导委员会编写的教学大纲为依据，以教育部全国硕士研究生招生考试数学考试大纲为参考，设置了全国高校考试通用的必考点精讲以及考试试题，命题具有通用性	大一大二学生期末复习及考研基础阶段
张宇高等数学18讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中高等数学部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题组组长参与	基础阶段
张宇线性代数9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中线性代数部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题人参与	基础阶段
张宇概率论与数理统计9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题人参与	基础阶段
张宇考研数学题源探析经典1000题（数学一、数学二、数学三）	以考研命题所使用的所有题目源头为依据，精心挑选和编制了1 000道左右高仿真练习题，题目与考研无缝接轨，综合性强，由易到难，利于考生复习过程中对知识点逐层加深理解。原命题组组长参与	基础阶段+强化阶段
张宇考研数学真题大全解（数学一、数学二、数学三）	囊括考研数学命题以来所有考研真题，给读者提供原汁原味的实考题，有效掌握命题方向及解题思路。原命题组组长参与	强化阶段
张宇考研数学闭关修炼一百题	原为暑期集训和国庆集训辅导过程中的内部资料。结合最新命题趋势编制的题目，题量少，但题题经典且题目综合性强。原命题组组长参与	强化阶段
考研数学命题人终极预测8套卷（数学一、数学二、数学三）	考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(上)。实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测，并配有部分重点难题讲解视频。原命题组组长与命题成员参与	冲刺阶段
张宇考研数学最后4套卷（数学一、数学二、数学三）	考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(下)。实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测，并配有部分重点难题讲解视频。原命题组组长与命题成员参与	冲刺阶段

注：主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面，市面上其他任何同名图书均非张宇所写，请考生注意鉴别。

以上书籍新浪微博答疑地址：@张宇考研图书交流小组 http://weibo.com/yuntubook/

张宇新浪微博：@宇哥考研 http://weibo.com/zhangyumaths/

1. 设数列$\{x_n\}$满足 $x_n>0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}$,则(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,但不为零

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 可能存在,也可能不存在

2. 确定常数 a 与 b 的值,使得$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^6+ax^3}-(x^3+x^2+bx)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right]=\dfrac{1}{3}$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^3)}{\arcsin x-x}, & x<0,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{2}x^2+x-1}{x\sin\dfrac{x}{6}}, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{x}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}$,则极限 $\lim\limits_{x\to0}f[g(x)]=$ (   ).

(A) -3 (B) 3

(C) -6 (D) 6

4. 设 $\alpha\geqslant5$ 且为常数,k 为何值时极限

$$I=\lim_{x\to+\infty}[(x^\alpha+8x^4+2)^k-x]$$

存在,并求此极限值.

5.（Ⅰ）设 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在，并求之；

（Ⅱ）设常数 $a_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,k, u_n=\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}, n=1,2,\cdots$，试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在，并求之.

6.（Ⅰ）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i}$；

（Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{n+n-1}\right)$.

7. (Ⅰ) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，且 $f'(x)>0$，求证 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加；

(Ⅱ) 求证 $f(x)=(n^x+1)^{-\frac{1}{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加，其中 n 为正整数；

(Ⅲ) 设数列 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

8. 设 $u_1>0$，$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n(u_n^2+1)$，$n=1,2,\cdots$，试讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 的存在性，若存在，则求之.

9. 设数列$\{x_n\}$满足$0 < x_1 < 1, \ln(1+x_n) = e^{x_{n+1}} - 1, n = 1,2,\cdots$. 证明

（Ⅰ）当$0 < x < 1$时，$\ln(1+x) < x < e^x - 1$；

（Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求该极限.

10. 设当$a \leqslant x \leqslant b$时，$a \leqslant f(x) \leqslant b$，并设存在常数$k, 0 \leqslant k < 1$，对于$[a,b]$上的任意两点$x_1, x_2$，都有$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k|x_1 - x_2|$. 试证明：

（Ⅰ）存在唯一的$\xi \in [a,b]$，使$f(\xi) = \xi$；

（Ⅱ）对于任意给定的$x_1 \in [a,b]$，定义$x_{n+1} = f(x_n), n = 1,2,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

11. (Ⅰ) 设函数 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)$ 内可导，$\delta>0$，且 $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi'(x)$ 存在，证明 $\varphi'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\varphi'(x)$；

(Ⅱ) 设函数 $F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t, & x\leqslant 0,\\ \displaystyle\int_{-x}^0 \ln[1+f(x+t)]\,\mathrm{d}t, & x>0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 连续且 $f(0)=f'(0)=0$. 求 $F''(0)$.

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(A-x^2), & x<x_0,\\ \dfrac{1}{x}, & x\geqslant x_0\end{cases}$ 在点 $x=x_0\,(0<x_0<2)$ 处连续，A 为待定常数，记曲线 $C:y=f(x)$ 在点 $M\left(x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$ 处的左切线为 l_-，右切线为 l_+，并分别记由 C，l_- 及 y 轴围成的区域 D_1 的面积和由 C，l_+，直线 $x=4$ 及 x 轴围成的区域 D_2 的面积为 S_1 和 S_2. 求：(Ⅰ) 使 $S=S_1+S_2$ 为最小的 x_0；

(Ⅱ) 当 $f(x)$ 可导时的 x_0，A 及对应的 S 的值.

13. 设 $y=\tan^n x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的切线在 x 轴上的截距为 x_n，试求 $\lim\limits_{n\to\infty} y(x_n)$.

14. 设 $f(x)$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 内连续，且当 $x(1+x)\neq 0$ 时，$f(x)=\frac{1}{\ln|1+x|}-\frac{1}{x}$.

(Ⅰ) 求 $f(0)$ 与 $f(-1)$ 的值；

(Ⅱ) 讨论 $f(x)$ 的单调区间、极值.

15. (Ⅰ)(**数学一　数学二**)曲线 $y=\ln x$ 的最大曲率是(　　).

(A) $\dfrac{1}{3^{\frac{2}{3}}}$　　(B) $\dfrac{2}{3^{\frac{2}{3}}}$　　(C) $\dfrac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$　　(D) $\dfrac{2}{3^{\frac{3}{2}}}$

(Ⅱ)(**数学三**)设某企业生产一种产品,其成本 $C(Q)=\dfrac{2}{3}Q^3-16Q^2+100Q+1\,000$.平均收益 $\overline{R}(Q)=a-\dfrac{1}{2}bQ(a>0,0<b<24)$.当边际收益 $MR=44$,需求价格弹性 $E_p=\dfrac{41}{19}$ 时获得最大利润,求获得最大利润时产品的产量及常数 a 与 b 的值.

16. 求常数 k 的取值范围,使得当 $x>0$ 时,$f(x)=k\ln(1+x)-\arctan x$ 单调增加.

17. 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上二阶可导，$f(a)<0,f(b)>0$，且对任意的 $x\in[a,b]$，有 $f'(x)>0,f''(x)>0$. 又对于数列$\{x_n\}$，满足 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)},n=0,1,2,\cdots,x_0=b$.

证明：(Ⅰ) 方程 $f(x)=0$ 在(a,b)内恰有一个根 ξ；

(Ⅱ) 数列$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

18. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内二阶可导，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，试证：

(Ⅰ) 存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$；

(Ⅱ) 存在 $\eta\in(0,1)$，使 $f''(\eta)=f(\eta)$.

19. 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$. 试证：存在 $\zeta\in(0,1)$，使 $f'(\zeta)=2\zeta f(\zeta)$.

20. 设函数 $f(x)$ 在$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$. 试证：存在 $\zeta\in(-1,1)$，使 $f'''(\zeta)=3$.

21. 设 $I=\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x, J=\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$,则(　　).

(A)$I>J$　　(B)$I<J$　　(C)$I=J$　　(D) 无法比较

22. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上一阶导数连续,$f^2(x)=r^2-x^2$,$\tan\theta_1=\frac{f(a)}{a}$,$\tan\theta_2=\frac{f(b)}{b}$,计算 $2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$.

23. 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续.

（Ⅰ）证明 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$；

（Ⅱ）当 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x$ 时，利用（Ⅰ）的结论求 $f(x)$.

24. 设 $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上连续的偶函数.

（Ⅰ）证明 $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1-\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_0^{a} f(x)\mathrm{d}x$；

（Ⅱ）计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^6 x}{1-\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.