高考数学满分方法与技巧

魏斌　主编

高考
状元
丛书

机械工业出版社

高考数学满分方法与技巧

魏　斌　主编

机 械 工 业 出 版 社

（京）新登字 054 号

内 容 提 要

本书是为广大中学生高考应试而编写的参考资料，同时也可作为学生在数学学习、复习时的参考书。该书在选题、编题及解题上以教学大纲为主，贯穿了 80 年代中期以来全国及上海、广东高考数学试题，精选了一些中学生数学刊物或参考书中的习题，从而使本书的题型新、活，既有广度，又有深度。

该书有三个特点：一是突出重点题型的分析与讲解，力求使学生触类旁通，全面、灵活地掌握数学知识；二是强调解题的方法、技巧，这是本书的核心；三是在每章后附有两套习题，为学生检验自己的数学水平提供实践机会，并在题后附有答案及详细分析与讲解。

图书在版编目(CIP)数据

高考数学满分方法与技巧／魏斌主编.–北京:机械工业出版社,1994.2
(高考状元丛书)
ISBN 7–111–04107–0

Ⅰ.高… Ⅱ.魏… Ⅲ. 数学–高中–升学参考资料
Ⅳ.G 634.63

出 版 人：马九荣（北京市百万庄南街 1 号 邮政编码 100037）
责任编辑：商红云 版式设计：冉晓华 责任校对：张 媛
封面设计：姚 毅 责任印制：路 琳
机械工业出版社印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
1994 年 2 月第 1 版·1994 年 2 月第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/32·14.75 印张·326 千字
0 001—5 000 册
定价：12.80 元

前 言

这是一套由高考状元亲自执笔撰写的丛书，丛书的主编均为全国各省市的高考总分状元或单科成绩满分获得者。如今，他们当中有的已经成为北京大学、清华大学的博士或硕士，有的正在进行本科学习。尽管如此，他们还惦记着正在准备高考的中学朋友。因为他们也曾经是中学生，深知中学朋友对知识的渴望，对迎考方法和技巧的渴求。为此，他们愿意把自己过去积累起来的经验毫无保留地奉献给准备参加高考的中学生，让大家尽可能少走弯路，取得最佳的成绩。

这套丛书共四册，分别为《高考数学满分方法与技巧》，主编魏斌为 1986 年辽宁省高考数学满分（120 分）获得者；《高考物理满分方法与技巧》，主编陆书宁为 1983 年辽宁省高考物理满分（100 分）获得者；《高考化学满分方法与技巧》，主编王凌霄为 1992 年山东省高考理科总分状元；《高考英语满分方法与技巧》，主编姚舜为 1992 年广东省高考理科总分状元。所以说，这套丛书是高考状元们集体智慧的结晶。如果把培养他们的中学老师比作巨人，那么，他们是站在“巨人”肩膀上成长起来的。因此，从某种意义上来说，他们对高考应试的许多方法和技巧，会比“巨人”看得更远、理解得更深刻。尽管如此，他们会永远感激他们的中学老师的。

编者

1993 年 11 月

目 录

第四部分　解析几何部分

第一部分　总　论

数学高考取得满分的捷径
——谈中学数学的学习方法与解题思路

一个高中生若想在数学高考中取得优秀的成绩，必须对数学有较为浓厚的兴趣。但是仅有兴趣是不够的，还要对中学数学的基本概念、公式有深刻、透彻的理解，善于将数学知识有机地归纳、联系在一起，并掌握一些常见的解题方法和技巧。为此，笔者编著了这本数学参考书，为中学生提供一个指导、参考及训练的机会，以使他们能尽快地提高数学水平，增强分析问题、解决问题的能力，在高考中立于不败之地。

在中学数学学习过程中，具体而言，应注意以下几个问题：

1. 深刻理解书本中的基本概念和公式的内涵，这是取得满分的前提

例 1　焦点在$(-1,0)$，顶点在（1，0）的抛物线方程是：

(A) $y^2=8x+1$　　(B) $y^2=-8(x+1)$

(C) $y^2=8(x-1)$　　(D) $y^2=-8(x-1)$

(1991 年高考试题)

该题应用到两个概念性的知识：抛物线方程和坐标平移。如果在学习抛物线方程时，深刻理解四个基本抛物线方程 $y^2=\pm 2px$，$x^2=\pm 2py$ 中的正负号及 p 代表的涵义（正负号代表开口方向，焦点的位置决定方程的形式，p 等于焦点与顶点间距离的 2 倍）；以及坐标平移学习时 x、y 代换与新顶点间的关系，那么答案就很容易得出：$y^2=-8(x-1)$。

例 2 求数列$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots\cdots+\left(x^n+\frac{1}{y^n}\right)$的和。(高二课本数列与数学归纳法一章中的一道习题)

这是一道混和等比数列求和问题。一些学生只注意到重新将数列合并成 $S=(x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{y^n}\right)$，然后根据等比数列公式求解为 $S=\frac{x(1-x^n)}{1-x}+\frac{\frac{1}{y}\left[1-\left(\frac{1}{y}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{y}}$，这样就以偏概全了。因为等比数列的公式实际上是：(1) 当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$；(2) 当 $q\neq 1$ 时，$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$。$q=1$ 虽然是等比数列的一个特例，却也不能忽视。所以该题应分下面四种情况去讨论：1) $x=1$，$y=1$；2) $x=1$，$y\neq 1$；3) $x\neq 1$，$y=1$；4) $x\neq 1$，$y\neq 1$。

2. 善于独自推导书中的新公式、定理

课本中每一个新的定理或公式都是一个很好的例题，如果只注重公式的形式硬去记忆它，而忽略定理或公式的推导过程或解题思路，往往会起到事倍功半的效果。

例 3 已知两条异面直线 a，b 所构成的角为 θ，它们的公垂线段 AA' 的长度为 d，在直线 a、b 上分别取点 E、F，设 $A'E=m$，$AF=n$，求 EF。（该题是课本中的一道公式推导的例题，同时又是 1985 年全国高中生数学竞赛试题及 1992 年高考试题）

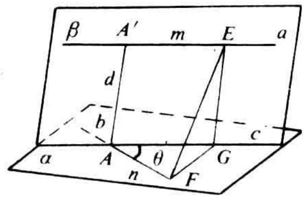

图 1

题目的结果 $EF=\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm 2mn\cos\theta}$ 记住的意义不大，关键在于它的推导过程及解题思路（解略）。当然书中的大多数定理、公式，无论直接给出的，或者书中隐含的，在理解了推导之后应该记住，这样可加快解填空、选择题的速度。

例 4 已知 a、$b\in R$，x 为任意角，若 $4a^2+b^2\leqslant 4$，则 $2a\sin x+b\cos x$ 的取值范围是________。

若记住书中在讲解 $a\sin x+b\cos x=c$ 时曾提到 $a\sin x+b\cos x$ 可化为 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$，$\left(\text{其中}\cos\phi=\dfrac{a}{a^2+b^2},\quad \sin\phi=\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$的形式，那么由此类推 $2a\sin x+b\cos x$ 也可化成 $\sqrt{4a^2+b^2}\sin(x+\phi)$，答案就会很快得出来：取值范围是〔$-2$，$2$〕。

3. 掌握一些数学学习的基本方法

高中课本曾给出几种常见的解题方法，如综合法、分析法、反证法、数学归纳法等等。灵活运用这些方法对扩大解题思路很有帮助。下面再介绍三种数学学习方法，以提高同学们分析问题的能力。

(1)“两边夹”法或称“两边压”法

这是由分析法与综合法合成的一种方法。综合法是常见的解题方法，一般凭已有的知识，根据感觉和经验，在充分利用已知条件的基础上，从已知一步步推论到结果；分析法是综合法的逆推，是一种很好的解题思路，它是从假设结论成立开始，逐步向已知的一个条件逼进，直至最后与已知条件重合为止。“两边夹”则把分析法和综合法结合在一起，既从前向后推，又从后向前推，最后在中间的一个共同结果上碰头。

例 5 如图 2，已知圆锥的轴截面为等腰直角三角形 $\triangle SAB$，Q 为底面圆周上一点，

(1) 如果 QB 的中点为 C，$OH\perp SC$，求证：$OH\perp$ 平面 SBQ。

(2) 如果 $\angle AOQ=60°$，$QB=2\sqrt{3}$，求此圆锥的体积。

(3) 如果二面角 $A—SB—Q$ 的大小为 $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$，求 $\angle AOQ$ 的大小。 (1992 年上海高考数学试题)

下面用“两边夹”法来解这道题：

解：(1) 由综合法，根据题中的已知条件，可以得到两个结果，一是 SO 垂直于底面的任何一条直线，二是 $QB\perp OC$（考虑 C 为 QB 的中点，且底面圆的半径相等）。

由分析法，因为 $OH\perp SC$ 若证 $OH\perp$ 平面 SBQ，必须

证 $OH\perp QB$，而上面已经推出 $QB\perp OC$，所以下一步应去证明 $QB\perp$平面 SOC，那么去找 SOC 平面的两条相交直线则易得 $QB\perp SO$，$QB\perp OC$，因此，$QB\perp$平面 SOC（中间结果）。

(2) 根据综合法，已知$\triangle SAB$ 为等腰直角三角形，得 $SO=OA=r$，所以圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^3$。

由分析法，若求体积，必先求出半径的大小。已知 QB 的大小，所以只要找出半径与 QB 的关系即可。因为 OB（半径）与 QB 组成的等腰三角形$\triangle OBQ$ 中，$\angle BOQ=120°$，所以根据余弦定理 $(BQ)^2=r^2+r^2-2r\cdot r\cos 120°=3r^2$，得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}BQ=2$（中间结果）。也可从 $Rt\triangle ABQ$ 或 $Rt\triangle BOC$ 中找出 QB 与半径之间的关系。

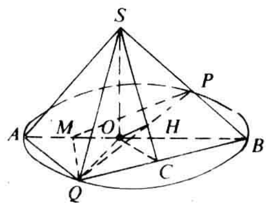

图 2

(3) 由综合法，已知二面角的平面角的度数，那么首先应在图中找到这个平面角。根据已有的知识，把 Q 当作 SQB 平面上一点，过 Q 作直线 QM 垂直于另一平面 SAB，从垂足 M 作 MP 垂直于两平面的公共交线 SB，垂足为 P，连接 QP，则$\angle QPM$ 为已知的二面角。考虑到 SO 垂直于底面，所以只要做 $QM\perp AB$，则 QM 就是 SAB 的垂线。

由分析法，若求$\angle AOQ$ 的大小，应弄清楚在三角形 OMQ 和三角形 PMQ 中各边之间的关系。以半径 $OQ=r$ 和$\angle AOQ=\alpha$ 为变量，找出直角三角形 PMQ 两边的表达式

即可。在 $Rt\triangle OMQ$ 中，$MQ=r\sin\alpha$，$OM=r\cos\alpha$，所以 $BM=r+r\cos\alpha$，$PM=\frac{\sqrt{2}}{2}BM=\frac{\sqrt{2}}{2}(r+r\cos\alpha)$，由 $\operatorname{tg}\angle MPQ=\frac{MQ}{MP}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 得，$\frac{r\sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}(r+r\cos\alpha)}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{6}$，$\alpha=\frac{\pi}{3}$。

这种方法就是“两边夹”，它已被大多数学生在实际做题过程中不知不觉地运用，重要的是如何将这种方法更加灵活地、有条不紊地使用得当。

(2) 类比联想方法

类比是根据两个数学对象的已存在的相似性，把其中一个数学对象的知识应用到另一个需要解答或论证的数学对象中，从而获得后一个对象新的知识。这种知识性的转移是思维过程的一个小的飞跃。类比将多门学科、多种知识联想在一起，在实际解题过程中，往往起到简便、迅速的作用。一般的类比方法有“数”与“形”的类比，“代数”与“三角”的类比，解题方法的类比等等。

1) 数与形的类比

例 6 求函数 $y=\sqrt{(1-x)^2+4}+\sqrt{(x+2)^2+12}$ 的最小值。

如果从函数的两项联想到坐标平面两点间距离公式 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，找出它们的相似性，这道题就容易解决了。函数可化成为 $y=\sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2}+\sqrt{[x-(-2)]^2+(0-2\sqrt{3})^2}$，因此该题实际上是在 x 轴上找一点 $P(x,0)$，求其与两已知点 $A(1,2)$，$B(-2,$

$2\sqrt{3}$）的距离之和最短，根据这些线索画出图形（如图3）：

应用平面几何中的知识，P 点如图中所示很容易找到，此时最短距离为$|PA|+|PB|=|AB'|$，由两点间距离公式$|AB'|=\sqrt{[1-(-2)]^2+[2-(-2\sqrt{3})]^2}=\sqrt{25+8\sqrt{3}}$。若求函数 y 最小时 x 的值，只要求出 AB'的直线方程与 x 轴的交点 P 的坐标即可。

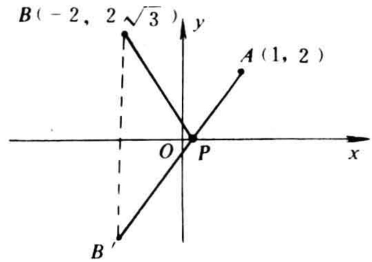

图 3

2）代数与三角的类比

例 7 已知 a、b、c、$d\in R$，且 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，求证：$-\frac{1}{4}\leqslant abcd\leqslant\frac{1}{4}$（课本中不等式一章中的习题）

由 $x^2+y^2=1$ 类比联想到 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，该题就容易解决了。设 $a=\cos\alpha$，$b=\sin\alpha$，$c=\cos\beta$，$d=\sin\beta$，则 $abcd=\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta=\frac{1}{4}\sin2\alpha\sin2\beta$，因为$|\sin2\alpha|\leqslant1$，$|\sin2\beta|\leqslant1$，所以$|\sin2\alpha|\,|\sin2\beta|\leqslant1$，即$|abcd|\leqslant\frac{1}{4}$，因此可证 $-\frac{1}{4}\leqslant abcd\leqslant\frac{1}{4}$。

3）解题方法的类比

例 8 求数列 $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}+\cdots\cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$的和。

这个数列既不是等差数列，也非等比数列，因此在求和时试验用"拆项法"或"裂项法"。即将通项 $\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$ 拆为 $x-y$ 的形式，然后消项合并，化简为两项式。该题可设 $\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}=\operatorname{arctg}a-\operatorname{arctg}b$，两边取正切的值，得 $\frac{1}{2n^2}=\frac{a-b}{1+ab}$，试着用 $a-b=1$ 且 $1+ab=2n^2$；$a-b=2$ 且 $1+ab=4n^2$……来解 a，b 的值，最后由 $\begin{cases}1+ab=4n^2 & ①\\ a-b=2 & ②\end{cases}$，由①式得 $ab=(2n+1)(2n-1)$，若 $a=2n+1$，$b=2n-1$ 则满足②式，得到了 $\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}=\operatorname{arctg}(2n+1)-\operatorname{arctg}(2n-1)$，因此 $S=(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}1)+(\operatorname{arctg}5-\operatorname{arctg}3)+\cdots\cdots+[\operatorname{arctg}(2n+1)-\operatorname{arctg}(2n-1)]=\operatorname{arctg}(2n+1)-\operatorname{arctg}1=\operatorname{arctg}(2n+1)-\frac{\pi}{4}$。

这种解题方法在书本中多次出现，如下面两道课本习题，采用了类似的方法可以解决。

例 9 证明：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$（$n\in N$ 且 $n\geqslant 2$）（数学归纳法一节后的习题）

若采用裂项法，关键是如何将通项 $\frac{1}{n^2}$ 裂成两项之差。联想到只有 $\frac{R}{(x+a)(x+b)}$ 的形式才可以拆为 $m\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$，且必须要求 $\frac{1}{n^2}<\frac{R}{(n+a)(n+b)}$ 才可以。试着取 $a=-1$，$b=0$，$k=1$ 则满足 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}$

$-\frac{1}{n}$，因此可以证明 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}$ 可见，这种方法证这道题要比用数学归纳法简单、快速。

例 10 已知 $x\neq\frac{1}{2^n}k\pi$，$n=0$、1，2……，求证：

$$\frac{1}{\sin2x}+\frac{1}{\sin4x}+\frac{1}{\sin8x}+\cdots+\frac{1}{\sin2^nx}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2^nx$$

与上题类似，采用单项裂为双项法，解题的关键为找出所裂成的双项。

由题中结论可以猜测出每一项为两个余切项之差，故可设 $\frac{1}{\sin2^nx}=\operatorname{ctg}kx-\operatorname{ctg}mx$。

解该等式为：

$$\frac{1}{\sin2^nx}=\frac{\sin mx\cos kx-\sin kx\cos mx}{\sin kx\sin mx}$$

$\therefore\quad \frac{1}{\sin2^nx}=\frac{\sin(m-k)x}{\sin kx\sin mx}$ 令 $m-k=k$ 得到

$k=\frac{1}{2}m$；令 $m=2^n$ 代入上式满足等式成立，∴猜项成立。即 $\frac{1}{\sin2^nx}=\operatorname{ctg}2^{n-1}x-\operatorname{ctg}2^nx$

$\therefore\quad \frac{1}{\sin2x}+\frac{1}{\sin4x}+\frac{1}{\sin8x}+\cdots+\frac{1}{\sin2^nx}=(\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2x)+(\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}4x)+\cdots+(\operatorname{ctg}2^{n-1}x-\operatorname{ctg}2^nx)=(\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2^nx)$。即等式成立。