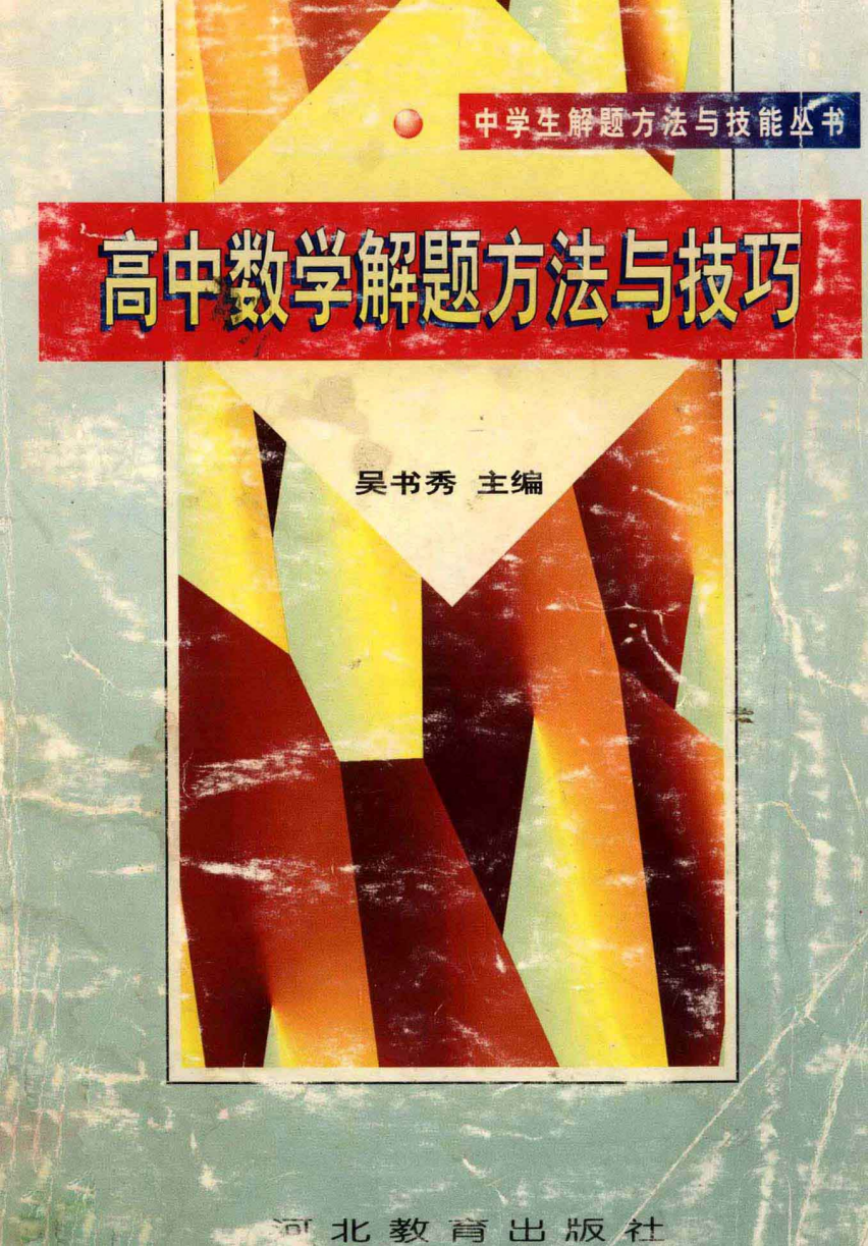




中学生解题方法与技能丛书

高中数学解题方法与技巧

吴书秀 主编

河北教育出版社

中学生解题方法与技能丛书

高中数学解题方法与技巧

吴书秀 主编

河北教育出版社

中学生解题方法与技能丛书
高中数学解题方法与技巧
吴书秀 主编

河北教育出版社出版发行(石家庄市友谊北大街 330 号)

河北新华印刷一厂印刷

787×1092 毫米 1/32 18 印张 368 千字 1999 年 6 月第 1 版

1999 年 6 月第 1 次印刷 定价:21.60 元

ISBN 7-5434-3590-X/G · 2683

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongboo.com

前 言

在数学学习中，一个重要的问题是培养数学能力。在数学能力中，解数学题的能力是学习数学的主要目的。在中学，判断一个学生解数学题能力高低的一个重要标准，是看他思考问题的敏捷性以及解题方法的正确性和合理性。

怎样才能提高自己思考问题的敏捷性以及解题方法的正确性和合理性呢？为此，我们组织编写了这本书，将高中数学问题分成若干类，并对每一类数学题系统总结了其解题的方法与技巧，旨在帮助高中学生提高解题能力。

读者在阅读本书时，万不可死记每一类题的解法与技巧，而是要善于思考，深入琢磨，要分析为什么选用这样的解题途径，还有没有其他的解题途径，并把分析、考虑的各种方法简略地写下来，再比较各种方法的优劣。这样，才能真正掌握每一类数学题的解题方法，提高自己的解题能力。

本书由吴书秀主编，参加编写的有杨建、许爱民、葛润枝、李志刚、张丽丽、孙惠娟、梁宪生、毛小明、齐世民、路炯、王笑生、徐彬、秦晓明、林达、韩玉芳、胡中华等。

本书在编写过程中，参考了大量文献，在此谨向这些文献的作者和出版者表示诚挚的谢意。

作 者

目 录

一、代数.....	(1)
(一) 集合问题的解题方法与技巧	(1)
1. 集合的表示法.....	(1)
2. 集合的运算与集合等式的证明.....	(9)
(二) 函数问题的解题方法与技巧	(20)
1. 求函数定义域的方法与技巧.....	(20)
2. 求函数值域的方法与技巧.....	(25)
3. 求函数解析式的方法与技巧.....	(41)
4. 作函数图象的方法与技巧.....	(50)
5. 解指数方程的方法与技巧.....	(58)
6. 解对数方程的方法与技巧.....	(64)
(三) 代数等式的证明方法与技巧	(70)
1. 恒等式的证明方法与技巧.....	(70)
2. 条件等式的证明方法与技巧.....	(79)
(四) 代数不等式问题的解题方法与技巧	(91)
1. 解整式不等式的方法与技巧.....	(91)
2. 解分式不等式的方法与技巧.....	(96)
3. 解绝对值不等式的方法与技巧.....	(100)
4. 解无理不等式的方法与技巧.....	(102)

5. 解不等式组的方法与技巧.....	(106)
6. 证明不等式的方法与技巧.....	(107)
(五) 数列问题的解题方法与技巧	(172)
1. 求数列通项公式的方法与技巧.....	(172)
2. 求由递推公式给出的数列的通项 的方法与技巧.....	(184)
3. 数列求和的方法与技巧.....	(198)
(六) 复数问题的解题方法与技巧	(213)
1. 复数的运算方法与技巧.....	(213)
2. 复数综合题的解题方法与技巧.....	(233)
(七) 排列组合问题的解题方法与技巧	(243)
1. 排列、组合和式的求值、化简 及组合恒等式的证明方法与技巧.....	(243)
2. 排列组合应用题的解题方法与技巧.....	(260)
(八) 平面三角问题的解题方法与技巧	(296)
1. 三角函数的计算方法与技巧.....	(297)
2. 三角等式的证明方法与技巧.....	(313)
3. 三角不等式的证明方法与技巧.....	(322)
4. 解三角方程的方法与技巧.....	(338)
二、立体几何	(351)
(一) 证明题	(351)
1. 共面问题的证明方法与技巧.....	(351)
2. 共点问题的证明方法与技巧.....	(354)
3. 共线问题的证明方法与技巧.....	(356)
4. 平行问题的证明方法与技巧.....	(362)

5. 垂直问题的证明方法与技巧.....	(371)
(二) 计算题	(377)
1. 距离问题的解题方法与技巧.....	(377)
2. 角度问题的解题方法与技巧.....	(408)
三、平面解析几何	(433)
(一) 求曲线方程的方法与技巧	(433)
(二) 作图题的作法	(478)
(三) 计算题的解题方法与技巧	(498)
(四) 证明题的证明方法与技巧	(536)

一、代 数

(一)集合问题的解题方法与技巧

在初等数学范围内，集合问题一般分为集合的表示法与集合的运算(包括集合等式的证明)两大类。

1. 集合的表示法

习惯上常用大写字母 A 、 B 、 C 、 $\dots$ 表示不同的集合，用小写字母或具体文字表示集合中的元素。

集合的表示法可归纳如下：

方法一

利用特定的字母或符号代表一个特定的集合。这种方法可称为字母表示法。

例：常见的特定集合有空集、全集、整数集、自然数集、实数集、有理数集、复数集，它们分别用特定的字母或符号依次表示为： Φ 、 Ω (或 I)、 J (或 Z)、 N 、 R 、 Q 、 C 。

说明：例中所用字母或符号具有统一的规定性，也就是说，在不同的文献中，这些特定的集合都用例中相应的字母或符号表示。除了这些表示集合的统一字母或符号外，还有：

用 $\bar{A}$ 表示 A 的补集；用 $A-B$ 表示 A 与 B 的差集；用 $A+B$ 或 $A \cup B$ 表示 A 与 B 的并集；用 $A \cap B$ 表示 A 与 B 的交集；用 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 的元素；用 $A \subset B$ 表示集合 B 包含集合 A ；用 $A=B$ 表示两集合相等；用 $A \subseteq B$ 表示集合 B 包含集合 A 或两集合相等。

方法二

在括弧 $\{ \}$ 内列出集合包括的元素，并且各元素之间用逗号分开。这种方法称为列举法。

例 1：试用列举法写出下列集合。

- (1) 小于 8 的正整数集合；
- (2) 小于 10 的素数集合；
- (3) 我国的两条最大的河构成的集合；
- (4) 满足 $x+1 \leq 5$ 且为正整数的集合；
- (5) 自然数集 N 。

解：(1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ；

(2) $\{2, 3, 5, 7\}$ ；

(3) $\{\text{黄河}, \text{长江}\}$ ；

(4) $\{1, 2, 3, 4\}$ ；

(5) $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ 。

例 2：试用列举法表示下列集合。

(1) 方程 $x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}} - 3 = 0$ 的解集；

(2) 不等式 $|1 - \frac{x}{3}| < \frac{2}{3}$ 的正整数解集；

(3) 直线 $x - 2y = 1$ 与直线 $x + y = 2$ 交点的集合；

(4) 直线 $x + y = 1$ 与双曲线 $xy = -2$ 交点的集合。

分析：(1)解出方程，将解放入{ } 中；

(2) 解出不等式，将解放入{ } 中；

(3) 解方程组
$$\begin{cases} x+y=2, \\ x-2y=1, \end{cases}$$

并将解放入{ } 中；

(4) 解方程组
$$\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-2, \end{cases}$$

将解放入{ } 之中.

解：(1) 解原方程，得

$$x_1 = -\frac{27}{8}, x_2 = 1.$$

$$\therefore \text{所求集合为} \left\{ -\frac{27}{8}, 1 \right\}.$$

(2) 解不等式 $|1 - \frac{x}{3}| < \frac{2}{3}$ ，得

$$1 < x < 5.$$

$$\therefore \text{所求集合为} \{2, 3, 4\}.$$

(3) 解方程组
$$\begin{cases} x-2y=1, \\ x+y=2, \end{cases}$$

得 $x = \frac{5}{3}, y = \frac{1}{3}.$

$$\therefore \text{所求点集合为} \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}.$$

(4) 解方程组

$$\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-2, \end{cases}$$

得 $\begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = 2; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = -1. \end{cases}$

即交点为 $(-1, 2)$ 和 $(2, -1)$.

∴ 所求集合为 $\{(-1, 2), (2, -1)\}$.

说明:若一集合由有限多个元素组成时(这种集合称为有限集合), 要将集合元素一一列举出来. 对于一个集合, 主要着眼点是它含有怎样的元素, 而元素的顺序是无关紧要的. 比如, 集合 A 包括 1, 2, 3, 4 四个数字, 我们可记为 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 也可记为 $A = \{2, 3, 4, 1\}$, 或 $A = \{4, 3, 2, 1\}$ 等等.

又如 $D = \{4, 4, 4, 3, 2, 1\}$, $E = \{4, 4, 3, 3, 2, 3, 1\}$. 我们规定 D 、 E 与集合 A 是同一个集合. 不论一个元素在大括号中出现几次, 都与出现一次同等对待. 所以, 在 D 、 E 两个集合中仍然认为它们仅有 4 个元素.

若一个集合由无限多元素组成时(这种集合称为无限集合), 如例 1 中的(5), 可用删节号表示不能全部写出来的元素.

方法三

利用所要描述的集合本身所具有的特征来表示集合. 这种方法可称为特征表示法.

例 1: 用特征表示法表示下列集合:

- (1) 闭区间 $[-2, 3]$ 中的全体实数;
- (2) 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的全部点集合;
- (3) 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 内部的全部点集合;
- (4) 方程 $2x^2 = 0$ 的解集合.

分析: (1)、(2)、(4) 在集合表示中, 可以由给定的条件式表示数或点的取法; (3) 代表的是满足 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$ 的实点

集, 因此点(实数对)的限定条件为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$.

解: (1) 闭区间 $[-2, 3]$ 中的所有实数集为

$$\{x: -2 \leq x \leq 3, x \in R\};$$

(2) 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的全部点集为

$$\{(x, y): x^2 + y^2 = 4, x \in R, y \in R\};$$

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 内部全部点集为

$$\{(x, y): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1, x \in R, y \in R\};$$

(4) 方程 $2x^2 = 0$ 的解集为

$$\{x: 2x^2 = 0, x \in R\}.$$

例 2: 用特征表示法表示下列集合:

(1) 圆族 $y^2 + (x-c)^2 = 1$ 的外公切线上的点构成的集合;

(2) 半径为 4, 切 y 轴于点 $A(0, 2)$ 的圆内全部点构成的集合;

分析: (1) 圆族外公切线有 $y=1$ 及 $y=-1$ 两条;

(2) 半径为 4 切 y 轴于 $A(0, 2)$ 点的圆应有两个, 它们分别在 y 轴两侧;

解: (1) 圆族 $y^2 + (x-c)^2 = 1$ 的外公切线上的全部点集为 $\{(x, y): y=1, y=-1, x \in R, y \in R\}$;

(2) 所求的点集为 $\{(x, y): (x-4)^2 + (y-2)^2 < 4^2 \text{ 及 } (x+4)^2 + (y-2)^2 < 4^2, x \in R, y \in R\}$;

说明: 特性表示法, 又称条件式表示法, 一般地是用一个或若干个式子表示集合中元素的特性.

如 $\{(x, y): |x| \leq 2, y \in R\}$, 它表示在平面上, 介于 x

$=2$ 与 $x=-2$ 两条直线间的全部点以及边界上的点构成的集合. 这个集合是由条件式 $|x|\leq 2$ 与 $y\in R$ 所确定的.

方法四

用平面上封闭曲线围成的区域, 或在区域内写出一个集合的所有元素, 来直观地表示集合. 这种方法称为文氏图表示法.

例 1: 所有直角三角形构成的集合, 可用图 1-1-1 表示.

例 2: 小于 6 的自然数构成的集合, 可用图 1-1-2 表示.

例 3: 集合 $A\subset B$ 可用图 1-1-3 表示.



图 1-1-1

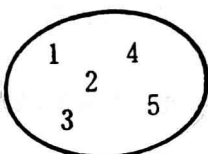


图 1-1-2

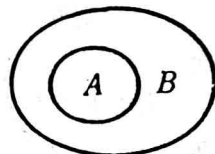


图 1-1-3

例 4: $\bar{A}$ (全集为 Ω)、 $A-B$ 、 $A\cup B$ 、 $A\cap B$ 可分别用图 1-1-4 至图 1-1-7 中的阴影部分表示.

说明: 文氏图中的封闭曲线可以是任意的, 但习惯上用圆或椭圆.

文氏图这个名称来源于英国逻辑学家 John Venn 的名字. 因为是 John Venn 首次用封闭曲线围成的区域表示集合的.

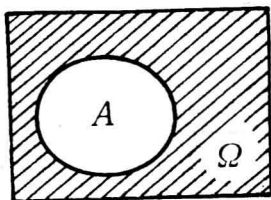


图 1-1-4

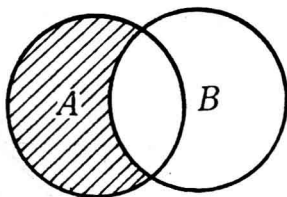


图 1-1-5

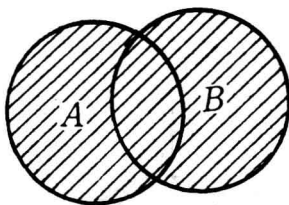


图 1-1-6

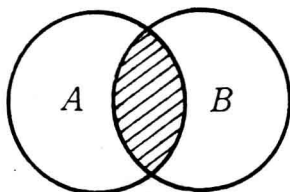


图 1-1-7

方法五

利用函数图象或其包围的区域表示点的集合。这种方法可称为函数图象表示法。

例 1: 集合 $A = \{ (x, y) : y = x, x, y \in R \}$ 可用图 1-1-8 表示。

例 2: 集合 $A = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \in R \}$ 和 $B = \{ (x, y) : x^2 + y^2 < 1, x, y \in R \}$ 可分别用图 1-1-9 与图 1-1-10 中的阴影部分表示。

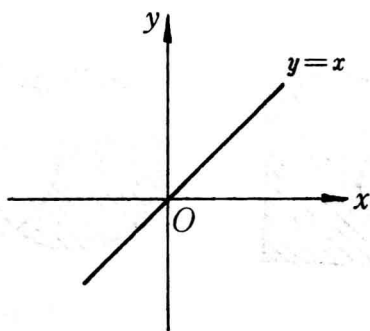


图 1-1-8

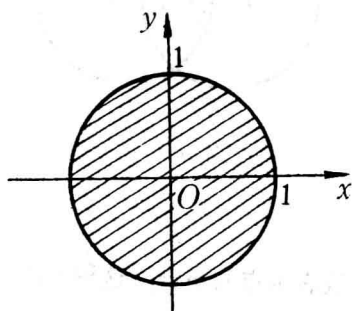


图 1-1-9

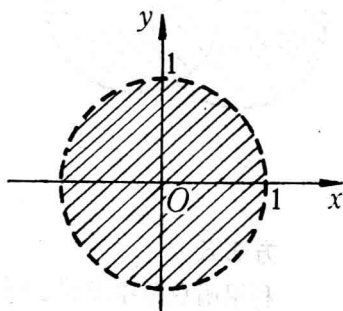


图 1-1-10

例 3: 集合 $B = \{ (x, y) : y^2 < 2x, x, y \in \mathbb{R} \}$ 与集合 $A = \{ (x, y) : y^2 + x^2 - 2x \leq 0, x, y \in \mathbb{R} \}$ 的关系可用图 1-1-11 表示.

从图中可以看出, $A \subset B$.

说明: 用函数图象法主要表示连续的点构成的集合. 这些集合一般是由函数 $y = f(x)$ 所决定的曲线(包括直线)上的点或其包围区域内的点构成的. 当集合中的点包括曲线(或直线)上的点时, 要把曲线(或直线)画成实线, 否则, 要画成虚线.

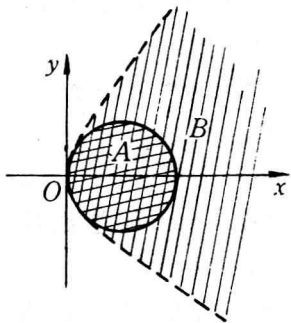


图 1-1-11

用函数图象法表示点的集合比用文氏图法表示点的集合要准确. 关于这一点, 我们可从图 1-1-11 与图 1-1-3 中看出来. 两者同是表示 $A \subset B$, 但前者 A 在 B 中的位置是固定的, 而后者则不然.

但是, 由于我们讨论集合间的关系时, 只要搞清谁包含谁就可以了, 所以, 实际运用中, 文氏图法比函数图象法要广泛得多.

2. 集合的运算与集合等式的证明

集合的运算主要指集合的并、交、补、差运算, 此外集合的点计(集合中含有多少个元素)问题, 也属于集合的运算问题.

集合等式的证明问题, 其证明过程主要是通过集合运算, 从等式的一端得出另一端, 或从等式的两端经过运算得出同一结果. 因此, 集合等式的证明过程, 实际上就是集合运算

的过程. 当然, 其证明方法也就是运算的方法.

下面就这些方法分别进行讨论.

方法一

利用集合的并、交、补、差的定义, 直接运算或证明.

例 1: 设 $A = \{1, 1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 5\}$. 求: $A \cup B$.

分析: 属于集合 A 以及属于集合 B 的一切元素构成的集合, 称做 A 与 B 的并集合. 又根据集合的表示法, 重复的元素仅取一个就行了.

解: $A \cup B = \{1, 1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 5\}$
 $= \{1, 2, 3, 4, 5\}.$

例 2: A 粮库存粮品种为:

$A = \{\text{玉米, 小麦, 大豆, 高粱, 大麦}\};$

B 粮库存粮品种为:

$B = \{\text{小麦, 江米, 大米, 小米, 花生}\};$

C 粮库存粮品种为:

$C = \{\text{绿豆, 大米, 小麦}\}.$

求三个粮库库存粮食品种共多少种, 用集合表示出来.

分析: 问题在于对集合 A 、 B 、 C 三个集合间进行并的运算. 由并集定义, 可直接求解.

解: $A \cup B \cup C = \{\text{玉米, 小麦, 大豆, 高粱, 大麦}\}$
 $\cup \{\text{小麦, 江米, 大米, 小米, 花生}\}$
 $\cup \{\text{绿豆, 大米, 小麦}\}$
 $= \{\text{玉米, 小麦, 大豆, 高粱, 大麦, 江米, 大米, 小米, 花生, 绿豆}\}.$

从此结论可知: 三个粮库库存粮食共 10 种.