中学数学专题丛书

叶尧城 主编

南秀全 等 编著

多项式

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU

湖北教育出版社

16

中学数学专题丛书

叶尧城 主编

多项式

南秀全 余兵 编著

16

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

多项式/南秀全等编著 .—武汉:湖北教育出版社,2002
(中学数学专题丛书/叶尧城主编)
ISBN 7-5351-3172-7

Ⅰ.多… Ⅱ.南… Ⅲ.多项式-中学-教学参考资料
Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 095551 号

出版 发行:湖北教育出版社　　武汉市青年路 277 号
网 址:http://www.hbedup.com　　邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:文字六〇三厂印刷　　(441021·湖北襄樊盛丰路 45 号)
开 本:787mm×1092mm 1/32　　10.75 印张
版 次:2002 年 4 月第 1 版　　2002 年 4 月第 1 次印刷
字 数:210 千字　　印数:1—5 000

ISBN 7-5351-3172-7/G·2577　　定价:14.00 元

总　序

随着素质教育的深入推进,需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁,以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建?改革教材成为了人们选择的突破口!当前,国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用,新教材在"为所有的学生打好共同基础"上将有所作为。然而,我国幅员辽阔,地区间的教育水平的差异大,个体间学习水平的差异大。如何真正地体现"以学生发展为本",发展学生的个性特长,让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高,还需要通过特定的教学过程来完成,其中应有好的素材和高质量的课外读物(而非散见于市面上的"检测题"、"同步练习"、"习题集"等)。因此,我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物,以专题讲座的形式,帮助学生了解知识的发生、发展过程,学会分析、解决问题的思想方法,深化、拓宽相关知识。

有鉴于此,我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有 18 个小册子,各册相对独立又相互联系,小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触,介绍一点数

学史料，有助于学生吸收各种不同的数学经验，理解各种不同的数学思想观点，体会数学的人文价值；着力反映知识的纵横联系，并以范例的形式予以说明；精选典型例题，揭示重难点，说明重在何处，难在哪里，如何理解，着重分析解题思路，阐释思想方法；选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题，引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题，供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生，可系统阅读，也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲，该套丛书具有如下特点：

1. **帮助学生夯实基础**。通过知识精讲、典例剖析、归纳小结，落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力**。精选思想性强的综合题，启迪学生的思维，开阔学生的思路，落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用**。精选密切联系生活实际和社会实践的应用题，促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新**。精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题，培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功**。选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型，有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩，走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试，难免出现这样或那样的疏漏和不足，敬请读者提出批评和建议，以便再版时修改，使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002年1月

目录

一
一元多项式

1.1 一元多项式的定义

以下的论述均假定在某一数域 $\boldsymbol{P}$ 上，而不具体指定是哪个数域，其结论具有一般性.

定义 1 形如

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \quad ①$$

(n 为非负整数，$a_0\neq0$)的代数式叫做关于 x 的一元 n 次多项式. $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n$ 称为多项式的系数，n 称为此多项式的次数，记作 $\deg f=n$；当 $\deg f=0$，即 $f(x)$ 为零次多项式时，$f(x)$ 为一个非零常数，常数零称为零多项式，我们不定义它的次数.

多项式①称为多项式的标准形式，式中各项的次数互不相同，而且是逐项递减，故称为多项式的降幂形式. 多项式①有时也可以写成以下形式：

$f(x)=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+a_0$ 称为多项式的升幂形式.

在本书中，为统一起见，除特殊情况外，一律写成降幂形

式.

当①式中的系数为复数(实数、有理数或整数)时,$f(x)$称为复系数(相应地称为实系数、有理系数或整系数)多项式.

例如,x^2-3x-1,$-7x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-5$,$(x-1)^2+(x+2)(2x-3)$,$-4$ 等都是有理数域上的多项式;$\sqrt{3}x^4-\pi x^3+4x^2+\sin 15^\circ$,$(\sqrt{\pi}x+\sqrt{3})^2+3.65$ 是实数域上的多项式,但不是有理数域上的多项式;而$\sqrt{2}x^3-ix^2+i$,$(3-2ix)^n$ 等则是复数域上的多项式,却不是实数域或有理数域上的多项式.

又如,$\frac{4}{3-x}$,$\frac{1-x}{x^2}+x^2+5$,$x-2\sqrt{x}+1$,$3x^{\frac{2}{3}}-\sqrt{2}x^{-1}+5$,$2+\lg x$,$\sin 2x-\ln(3x^2-1)+4$,等都不是多项式.

1.2 多项式恒等定理

两个多项式$f(x)$与$g(x)$,当且仅当它们的次数相等,并且同次幂的系数也相等,则称为两个多项式相等,记为$f(x)=g(x)$.

由零多项式的定义,我们知道,零多项式是恒等于零的;反过来,如果一个多项式恒等于零,那么这个多项式的各项系数必全等于零.这就是说,它是一个零多项式.

定理1 如果$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$是一个恒等式,那么 $a_0=0,a_1=0,\cdots,a_{n-1}=0,a_n=0$.

下面用数学归纳法对这个定理加以证明.

i)当 $n=1$ 时,有恒等式 $f(x)=a_0x+a_1=0$.

任取 $x=q,m(q\neq m)$ 分别得

$qa_0+a_1=0$ ① $ma_0+a_1=0$ ②

由①,②解得 $a_1=0,a_0=0$.

$\therefore$ 当 $n=1$ 时,结论是正确的.

ii)假设 $n=k-1$ 时,有恒等式

$a_0x^{k-1}+a_1x^{k-2}+\cdots+a_{k-2}x+a_{k-1}=0$.

那么有 $a_0=0,a_1=0,\cdots,a_{k-2}=0,a_{k-1}=0$.

令 $n=k$,有恒等式

$$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k=0. \quad ③$$

以 $2x$ 代替③中的 x,得

$$f(2x)=2^ka_0x^k+2^{k-1}a_1x^{k-1}+\cdots+2a_{k-1}x+a_k=0. \quad ④$$

再以 $2^k\cdot$③,得

$$2^kf(x)=2^ka_1x^k+2^ka_1x^{k-1}+\cdots+2^ka_{k-1}x+2^ka_k=0. \quad ⑤$$

⑤-④,得

$$2^{k-1}(2-1)a_1x^{k-1}+2^{k-2}(2^2-1)a_2x^{k-2}+\cdots+2^{k-p}(2^p-1)\cdot a_px^{k-p}+\cdots+2(2^{k-1}-1)a_{k-1}x+(2^k-1)a_k=0. \quad ⑥$$

④式是一个 $k-1$ 次多项式,根据 ii)中的假设可知

$2^{k-1}(2-1)a_1=0$;

$2^{k-2}(2^2-1)a_2=0$;

……

$$2^{k-p}(2^p-1)a_p=0;$$

……

$$2(2^{k-1}-1)a_{k-1}=0;$$

$$(2^k-1)a_k=0.$$

又$\because$ $2^{k-p}\neq 0, 2^p-1\neq 0, \therefore a_p=0.$

即 $a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=a_k=0.$

那么恒等式③就变成了 $a_0x^k=0.$

令 $x=1$,得 $a_0=0.$

$\therefore$ $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_k=0.$

这就是说,$n=1$ 时结论正确,如果当 $n=k-1$ 时结论是正确的,那么,当 $n=k$ 时论断也是正确的.

这就证明了,如果 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 是一个恒等式,那么,$a_0=a_1=\cdots=a_n=0.$

由定理 1,很容易推出下面的定理.

定理 2 (多项式恒等定理) 两个多项式 $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$ 与 $\varphi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$ 恒等的充分和必要条件是

$$a_0=b_0, a_1=b_1, \cdots, a_n=b_n.$$

证明 (1)条件的充分性:

设这两个多项式对应项系数相等,则 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是同一个多项式,因此它们是恒等的.

(2)条件的必要性:

假定 $m>n$,设 $f(x)\equiv\varphi(x)$,则 $f(x)-\varphi(x)\equiv 0$,即

$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-n-1}x^{n+1}+(a_{m-n}-b_0)x^n+$

$(a_{m-n+1}-b_1)x^{n-1}+\cdots+(a_{m-1}-b_{n-1})x+(a_m-b_n)\equiv 0.$

由定理 1 可知

$a_0=a_1=\cdots=a_{m-n-1}-a_{m-n}-b_0=a_{m-n+1}-b_1$

$=\cdots=a_{m-1}-b_{n-1}=a_m-b_n=0.$

$\therefore \quad a_0=a_1=\cdots=a_{m-n-1}=0.$

$a_{m-n}=b_0, a_{m-n+1}=b_1, \cdots, a_{m-1}=b_{n-1}, a_m=b_n.$

$\therefore$ 必有 $m=n$,即它们的对应项系数相等.

1.3 待定系数法

1. 什么是待定系数法

待定系数法是一种重要的数学方法,它在因式分解,化部分分式以及在某些特定条件下求函数式,解方程等方面都能起到一定的作用.

下面先看两个例子.

例 1 当 a,b 为何值时,多项式 x^3+4x^2+ax+b 能被 x^2+x-1 整除? 并求出商式.

解 因为被除式是 x 的三次式,除式是 x 的二次式,所以商必定是 x 的一次式,设商式为 $x+c$,按除法法则,可得恒等式

$x^3+4x^2+ax+b=(x^2+x-1)(x+c)$,

即 $x^3+4x+ax+b=x^3+(c+1)x^2+(c-1)x-c.$

根据多项式恒等定理,得方程组

$$\begin{cases} c+1=4, \\ c-1=a, \\ -c=b. \end{cases}$$解得$$\begin{cases} a=2, \\ b=-3, \\ c=3. \end{cases}$$

$\therefore$ 被除式中 $a=2, b=-3$,商式为 $x+3$.

例2 已知直线 l 和直线 $3x-18y-4=0$ 平行,且和坐标轴围成面积为3的三角形,求直线 l 的方程.

分析 直线方程都有确定的解析式,由题意设要求的直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$(截距式)较方便,只需确定待定系数 a,b 的值即可.

解 设直线 l 的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,由题设条件,可得方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{2}|ab|=3, \\ -\frac{b}{a}=\frac{1}{6}. \end{cases}$$解得$$\begin{cases} a=-6 \\ b=-1 \end{cases}$$或$$\begin{cases} a=6, \\ b=-1. \end{cases}$$

$\therefore$ 所求直线 l 的方程为 $x-6y+6=0$ 或 $x-6y-6=0$.

从上面两个例题的解法可以看出,在某些数学问题中,如果我们事先就能判断:所求问题的结果具有某种确定的数学表达式,仅仅是这种形式中的某些系数有待确定.先按题意设出待定的系数,组成一个恒等式,然后再根据多项式恒等定理列出方程或方程组,求出待定的系数的值,从而使问题得以解决.这种方法就叫做待定系数法.

2. 应用待定系数法解题的基本步骤

要判断一个数学问题能否使用待定系数法求解,关键是

看所求数学问题的结果是否具有某种确定的数学表达式,如果具有,则可使用待定系数法求解.例如代数中求多项式相除的商式和余式、分解因式、化部分分式、数列求和,求函数表达式、求复数,解不等式或证明不等式,以及解析几何中求曲线方程等.这些问题的结果都具有确定的数学表达形式,因而都可以使用待定系数法来求解.

运用待定系数法解题的主要步骤是:

(1)确定所求问题是含待定系数的解析式;

(2)根据给定的已知条件,列出一组含待定系数的方程;

(3)解方程组或消去待定系数,从而使问题得到解决.

3.待定系数法的应用

例3 已知三次多项式$f(x)$在$x=-1,0,1,2$时函数值分别为1,2,3,2,试写出这个多项式.

解 设这个多项式的降幂形式为$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,依题意,得

$$\begin{cases}1=f(-1)=-a+b-c+d,\\2=f(0)=d,\\3=f(1)=a+b+c+d,\\2=f(2)=8a+4b+2c+d.\end{cases}$$

$$\text{即}\begin{cases}-a+b-c+d=1, & ①\\ d=2, & ②\\ a+b+c+d=3, & ③\\ 8a+4b+2c+d=2. & ④\end{cases}$$

由②,$d=2$.①+③,得$2b+2d=4$,即$b+d=2$,$\therefore b=0$.

由③,得 $a+c=1$,再由④,得 $4a+c=0$.

$\therefore\quad a=-\frac{1}{3},c=\frac{4}{3}$.

故所求的多项式是 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x+2$.

例4 已知 x^2+2x+1 是多项式 x^3-x^2+ax+b 的因式,求 a,b.

解 因为已知多项式是 x 的三次式,它的一个因式是二次式,所以可设另一个因式为 x 的一次式 $x+m$.

设 $x^3-x^2+ax+b=(x^2+2x+1)(x+m)$

$=x^3+(m+2)x^2+(2m+1)x+m$.

根据多项式恒等定理,得

$$\begin{cases}m+2=-1,\\2m+1=a,\\m=b.\end{cases}\text{解之,得}\begin{cases}m=-3,\\a=-5,\\b=-3.\end{cases}$$

$\therefore$ 多项式中的 $a=-5,b=-3$.

例5 若多项式 $f(x)=(3a+c+3)x^2+(a+b+c)x+c$ 与 $g(x)=(b+d)x^3+(d+1)x+2a$ 相等,求 a,b,c,d,并把多项式写出来.

解 比较两多项式同次项的系数,得

$$\begin{cases}0=b+d,\\3a+c+3=0,\\a+b+c=d+1,\\c=2a.\end{cases}$$ 解得 $a=-\frac{3}{5},b=\frac{7}{5},c=-\frac{6}{5},d=-\frac{7}{5}$.

$\therefore\quad f(x)=g(x)=-\dfrac{2}{5}x-\dfrac{6}{5}.$

例 6 已知多项式 $x^4+6x^3+7x^2+ax+b$ 是一个完全平方式,求 a,b 的值和多项式的平方根.

解 原多项式是 x 的四次式,它的平方根必为 x 的二次式.

设 $x^4+6x^3+7x^2+ax+b=(x^2+lx+m)^2$

$=x^4+2lx^3+(l^2+2m)x^2+2lmx+m^2.$

由多项式恒等定理,得

$$\begin{cases}2l=6, & ①\\ l^2+2m=7, & ②\\ 2lm=a, & ③\\ m^2=b. & ④\end{cases}$$

解①,②得 $l=3,m=-1$.

代入③,④得 $a=-6,b=1$.

那么就有 $x^4+6x^3+7x^2-6x+1=(x^2+3x-1)^2$.

$\therefore$ 多项式的平方根是 $\pm(x^2+3x-1)$.

例 7 试将多项式 x^4+3x^2-2x+3 表示为两个不同次数的整系数多项式的平方差,并求出所有解.

分析 如果 $x^4+3x^2-2x+3=f^2-g^2$, $\deg f\neq\deg g$,则 $(-f,g)$,$(f,-g)$,$(-f,-g)$也是解.所以,不妨设 f,g 的首项系数都为正数.因此,可设$f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=cx+d$.

解 不妨设$f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=cx+d$.其中 a,b,c,d 是待定系数,且 $c>0$, a,b,c,d 是整数,于是 f^2-g^2

$= (x^2 + ax + b)^2 - (cx + d)^2$.

$\therefore \quad x^4 + 3x^2 - 2x + 3 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b - c^2)x^2 + (2ab - 2cd)x + b^2 - d^2$.

由多项式恒等定理,得

$$\begin{cases} 2a = 0, \\ a^2 + 2b - c^2 = 3, \\ 2ab - 2cd = -2, \\ b^2 - d^2 = 3. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 0, \\ b = 2, \\ c = 1, \\ d = 1. \end{cases}$$

$\therefore \quad f(x) = x^2 + 2, g(x) = x + 1$.

其余三组解为 $-f(x), g(x)$; $f(x), -g(x)$; $-f(x), -g(x)$.

例 8 已知$f(x)$是 x 的 $n(>0)$次多项式,且对任意的实数 x,满足 $8f(x^3) - x^6 f(2x) - 2f(x^2) + 12 = 0$.①求$f(x)$.

解 设$f(x)$的最高次项为 $a_n x^n (a_n \neq 0)$,那么 $8f(x^3)$, $x^6 f(2x)$, $2f(x^2)$的最高次项分别为 $8a_n x^{3n}$, $2^n a_n x^{n+6}$, $2a_n x^{2n}$.

因为 $2n < 3n$,由①式和多项式恒等定理,得

$$\begin{cases} 3n = n + 6, \\ 8a_n - 2^n a_n = 0. \end{cases} \text{解得 } n = 3.$$

于是可设$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.在①式中令 $x = 0$,得

$8a_0 - 2a_0 + 12 = 0, \quad \therefore \quad a_0 = -2$.

把$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x - 2$ 代入①式并整理得

$-4a_2 x^8 - 2a_3 x^7 + (8a_2 + 2 - 2a_3)x^6 - 2a_2 x^4 + 8a_1 x^3 -$