初中用书

翟连林 主编

初中数学试题一题多解

CHU ZHONG SHU XUE

北京出版社

初中数学试题一题多解

主　编　翟连林

编　委（依姓氏笔划为序）

王学功　王乾岭　叶龄逸

刘盛钖　陈士杰　李福宽

林福堂　施英杰　项昭义

执　笔　翟工拓　陈伟侯　小川弘璋

小川弘方　丰　斌　翟淑静

北京出版社

中学数学智力开发丛书
初中数学试题一题多解
CHUZHONG SHUXUE SHITI
YITI DUOJIE
翟连林 主编
*
北 京 出 版 社 出 版
(北京北三环中路6号)
邮政编码：100011
北 京 出 版 社 总 发 行
新华书店北京发行所经销
北 京 国 马 印 刷 厂 印 刷
*
787×1092毫米 32开本 14.5印张 326 000字
1993年10月第1版 1996年5月第3次印刷
印数 27 001—57 000
ISBN 7—200—02025—7/G·591
定价：12.70元

编者说明

从教学实践中我们体会到：一题多解是开发智力、培养能力的一种行之有效的方法，它对沟通不同知识间的联系，开拓人们的思路，培养发散思维能力，激发读者的学习兴趣都是十分有益的。为此，我们编写了《中学数学智力开发丛书》。这套丛书出版发行后，受到广大读者的欢迎，从1990年初版至今，已印刷四次，总印数达35.6万册。在新形势下我们又重新修订，出版这套丛书的第二版，包括《初中代数一题多解》、《平面几何一题多解》、《高中代数一题多解》、《平面三角一题多解》、《立体几何一题多解》、《平面解析几何一题多解》、《高中数学综合题一题多解》。为了充实内容，这套丛书增加了《初中数学试题一题多解》、《初中数学综合题一题多解》、《高中数学试题一题多解》等书，使整套书囊括了初中数学和高中数学的全部内容，有益于读者按需选择。

与其它各类学习数学的图书比较，这套丛书突出了发散思维能力的培养，精选实用、新颖的题目，增加了巧妙解法，力求体现科学性、趣味性、典型性和启发性。

由于我们的水平有限，书中缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

1993年10月

目　　录

第一章　一题多解的意义与作用……………………（1）

一、解题的全过程……………………………（3）

二、一题多解的意义和作用……………………（10）

第二章　怎样培养一题多解能力……………………（17）

第三章　中考试题一题多解…………………………（89）

一、代数部分…………………………………（89）

二、几何部分…………………………………（172）

第四章　数学竞赛题一题多解………………………（270）

第一章 一题多解的意义与作用

数学是人类历史上逐渐发展形成的一门独特而精致的文化。从数学教育的角度看，数学具有广泛的、深入的"应用价值"，并且还具有深刻的"思维形式训练价值"。

从古代人们需要的记数、运算、丈量土地，到现代社会的生活、生产、消费、交换、科学研究及技术创新，整个社会的各个层次都离不开数学（当然，各个层次对数学的需求程度是不同的），"一切科学技术都要用数学"*。数学的"应用价值"越来越大，以致人们认为，它已从自然科学中独立出来，成为与自然科学、社会科学、思维科学、系统科学等并驾齐驱的十大部门之一。

所谓"思维形式训练价值"，包括数学思维品质的培养；科学方法的训练，也包括数学在形成世界观、培育意志品德方面的作用。其中最主要的是对思维能力的独特训练。按照我国目前的教学情况，大致上可以用下面的图表示：

数学基础知识
↓
数学基本技能
↓
数学思想和数学方法
↓
学习者的思维品质

---

* 钱学森，《发展我国的数学科学》，数学通报，1990年第6期。

在人类历史上，对上述两种价值，不同的历史条件和历史时期，其侧重也不相同。

在古代中国，人们崇尚数学的“应用价值”．我国古典名著《九章算术》中所收录的有关方田、粟米、衰分等246个实际问题表明，古代中国的数学教育，其核心是培养解决实际问题的本领．而古代希腊则迥然而异，人们侧重于用数学来训练心智．“数学概念不依赖于经验，而自有其实在性，它们只能为人所发现，并非为人所发明或塑造”*．至晚从柏拉图（Plato，公元前427～公元前347）时代开始，希腊人坚持要从一些公认的原理出发，对数学的事实作出演绎证明．

就当代中国来说，应当根据社会的需求，将上述两种价值观在数学教育中有机地结合起来，为我国的不同领域、不同层次，培养各种类型的社会主义劳动者．

在数学教育中，解题教学处于什么地位？已故著名数学家G·波利亚（G·Polya（美籍匈牙利人）写了《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》等在世界上广为传播的科普名著（已有中译本），他提出：“掌握数学意味着什么？这就是善于解题，不但善于解一些标准的题，而且善于解一些要求独立思考，思路合理，见解独到，和有发明创造的题”．当代著名的数学家，前《美国数学月刊》主编P·R·哈尔莫斯曾经说：“问题是数学的心脏”．

仔细推敲，我们会感到这两位学者的话很有道理．学习数学，主要是学习解决由前人（或他人）提出，并且已经有了答案的问题；独立从事数学研究的阶段，则是试图解决自己

* M·克莱因著（张理京，张锦炎译）．《古今数学思想》，上海科学技术出版社，1979年．

提出的，或者由他人（或前人）提出的但仍未解决的问题，也就是要肯定或否定人们的“猜测”。从教师和学生两方面来看，解题的教和学都是十分重要的。下面谈谈解题的全过程和一题多解在解题教学中的意义和作用。

一、解题的全过程

中学生所做的数学题，大体上可以分为两大类，一类是求证题，即从问题的条件出发，引用公理、定理、真命题、概念，运用逻辑规则，导出结论。另一类是求解题，即从问题的条件出发，引用公理、定理、真命题、概念，列出公式，变换公式，求出未知量的值。

我们将求证和求解统称为目标，那么，下面的图1-1就描述了解题的全过程：

$$\text{条件} \Longrightarrow \square \Longrightarrow \square \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \text{目标}$$

$$|\longleftarrow \text{中间过程} \longrightarrow|$$

图 1-1

所谓解题，就是要把这一中间过程明确地、科学地显示出来。

怎样解题？世界各国的数学家，数学教育家提出了各种各样的论述。在前面提到的G·波利亚看来，解题的过程，就是不断变换题目的过程。综观他的《怎样解题》全书，可以说，变换题目是这本风行全世界的科普名著的主旋律。概括G·波利亚在他的著作中的论述，变换题目有许多内容，大体上可用图1-2表示。

G·波利亚强调说：“解题的成功，要靠正确思路的选择，要靠从可以接近它的方向去攻击堡垒。为了辨明哪一条道路正确，哪一个方向可以接近它，我们就要试探各种方

向和各种思路，要把旧题目变为新题目”．因为“新题目展现了接触我们以前知识的新的可能性”，“我们如果不用‘题目的变换’，几乎是不能有什么进展的”．

- 变换题目
  - 等价的题目
    - 分解与结合
      - 枚举各种情况
      - 中途点
    - 回到定义
    - 等价变换（自化）
    - 映射到别的领域（他化）
  - 特殊的题目
    - 简化
    - 约化
    - 极端化
  - 更一般的题目（强化）
    - 充分化
    - 一般化
  - 相关的题目
    - 必要题
    - 基本题
    - 辅助题
    - 部分题（弱化）
    - 类似题

图 1-2

本世纪八十年代，P·R·哈尔莫斯主编了一套“数学问题丛书”，其中有L·C·卡尔逊编著的《通过问题学会解题》，这是从那个时期世界著名的中级数学刊物的问题栏中搜集起来的（未列入我国数学通报的问题）．L·C·卡尔逊一口气列举了十二种有助于解题的思考方法，它们是：

（1）寻找一种模式；

（2）画一个图形；

（3）提出一个等价的数学问题；

（4）修改问题；

（5）选择有效的记号；

(6) 利用对称性；

(7) 区分种种情况；

(8) 逆推；

(9) 利用矛盾进行论证；

(10) 利用奇偶性；

(11) 考虑极端情况；

(12) 推广。

毫无疑问，这些方法比G·波利亚的提法更为具体，更易于运用。无论是对从事数学研究和数学教学，无论是对高等学校或中等学校，都是行之有效的方法。

由于民族之间的语言习惯、思维风格、表达方式上的差异，对于我国大多数学生来说，G·波利亚和L·C·卡尔逊的说法都比较难以理解。按照本书作者的解题经验，和我国数学界的一些名家的论述，本书作者把解题的全过程划分为审察，思索，表达，检验，回顾等五个阶段，表示为下面的图1-3。在这个图中，箭头是双向的，表示两个部分之间互相联系，互相作用。

审察……审明题意
↑↓
思索……探索解法
↑↓
表达……表达解法
↑↓
检验……检验解法
↑↓
回顾……扩展引申

图 1-3

下面，就这五个阶段作一些说明。

1. 审察

对学数学的人来说，未弄清题意，就动手探索解题方

法，往往南辕北辙，耗用许多无效的功夫。因此，把审明题意放在最基本的位置上，养成习惯，这是很重要的。

怎样才能审明题意？可以采取以下办法：

(1) 罗列已知．题中给出了哪些条件？还隐含哪些条件？如何表示这些条件（画图，列表，列关系式等）？目的是使已知贮存在自己的大脑中．

(2) 分析目标．求证的（或求解的）目标是单一的吗？如果不单一，就要分解为若干个下一级的目标．尽可能将目标之间的联系形象化．

(3) 检查条件的真实性．如果已知条件是虚假的，那么，这个题目便失去了意义．因此，要检查条件的真实性．

例如，对于“已知$0=1$，求证$4=5$”这样的题目，就是无意义的．

实际上，我们所遇到的习题，绝大多数的条件都是真的．有时，因为传抄错误，也可能变成不真．因此，进行检验还是必要的．

2．思索

所谓思索，就是探索一条从已知条件通往目标的道路．大体上有两条思路，一条是从已知条件出发，不断引用定义、公理、定理、公式、规则，依次导出一系列结果，最后达到目标．这条思路是由原因出发，最后达到结果，因此叫由因导果，但正式的术语叫做综合法．另一条是从目标出发，引用定义、公理、定理、公式、规则，探寻使目标成立的充分条件．一般来说，充分条件是由若干个独立的条件组成的．因此，下一步是探索使这些条件各自成立的充分条件．如此一层一层地追溯下去，最后就发现从条件通往目标的道路，这叫执果溯因，正式的术语叫分析法．

我们在探索解题的道路时，单纯用综合法，或单纯用分析法取得成功，却是罕见的。大多数情况下，我们将两者结合起来使用。

有了综合法和分析法这两条思路，可能仍然会感到“老虎吃天，无从下口”。我们建议读者采用以下办法：

(1) 回想。你熟悉的定义、定理、公理、公式、规则中，哪一些与本题有联系？你做过的题目中，哪些题目的已知与本题的已知类似？哪些题目的结论与本题的结论类似？哪些题目与本题可算作同一类型？哪些题目是怎样解决的？对当前的问题有什么启发？可以试用哪些解法？

(2) 联想。可以将联想大体上分为以下四类：

① 接近联想，指在空间或时间比较接近的事物之间的联想。比如，由直线上两点间的距离公式，联想到平面上、空间中两点间的距离公式；由平面上的正方形，联想到空间的立方体；由平面上的圆，联想到空间的球。

② 相似联想，指在某些属性类似的事物之间的联想。比如，由整数的分解质因数，联想到多项式的因式分解；由分数的四则运算，联想到有理分式的四则运算。

③ 对比联想，指在属性相反的事物之间的联想。比如，由等式联想到不等式，由分解因式联想到乘法公式，由对数式联想到指数式。

④ 关系联想，指属性之间存在从属关系的事物之间的联想。常见的是因果关系；一般与特殊的关系；部分与整体的关系等等。

比如，由等腰三角形这一概念，就可以联想到两腰相等，两底角相等，两腰上的高相等，两底角的平分线相等，底边上的高平分底边，底边上的高平分顶角等等。

(3) 猜想．猜想是在人们的已有知识、已有经验的基础上进行的，是点燃人们创造性思维的火花．大体上可以描述为下面的图1-4．

$$\left.\begin{array}{l}\text{已知条件}\\\text{已有理论}\\\text{已有经验}\end{array}\right\}\text{可能有}\left\{\begin{array}{l}\text{结果 1}\\\text{结果 2}\\\cdots\cdots\end{array}\right.$$

图 1-4

人们提出猜想之后，就要进一步研究和思考．在数学发展史上，许多猜想已经被弄清楚了（证实的就是定理），但还有许多猜想，至今仍未能证实，或未能推翻，一代一代的数学家，继续为此而奋斗．

在学习数学的过程中，我们也应当运用猜想这一工具．回想、联想、猜想是密切相关的，回想越充分，联想越丰富，猜想也就越合理．所谓的“熟能生巧”、“天才的直觉”，大约也在其中了．

3．表达

经过审察和思索，我们找到了一条从已知条件通往目标的道路．所谓表达，就是要将这一道路明确地、科学地显示出来．

表达方式的优劣，不但影响到学习者的学习效果，还影响到学习者的思维能力．

一般来说，我们应当首先向教材上的规范表达形式学习．例如，

$$\left.\begin{array}{l}AB=DE\\\angle A=\angle D\\AC=DF\end{array}\right\}\Longrightarrow\triangle ABC\cong\triangle DEF.$$

这一表达方式不但指明了点与点之间的对应关系，还指明了

对应边、对应角之间的相等关系。有的同学忽略这些，写成$\triangle ABC \cong \triangle FED$，就不是好的表达方式了。

对于比较复杂的问题，它的解决过程的显示，必须是一篇有条理、有层次的文章。因此，讲究表达方式，是很有必要的。

4. 检验

所谓检验，就是重新审查前面已经表达的求解过程，纠错补漏。大体上分为以下几步：

(1) 重新审查题意。是否有些已知条件漏掉未用上？是否暗中增加了已知条件？

(2) 重新审查推理过程。是否发生了不充分推理？是否引用了不恰当的根据？

(3) 重新审查计算过程。

(4) 重新审查目标。是否完全达到目标？如未完全达到，就要重新从头研究。

5. 回顾

大多数学习数学的学习者，走到上面的第四个阶段，就结束了解题过程。这说明他们对解题全过程的认识还不够。

实际上，回顾是不应该忽略的阶段。我们要提倡“回顾解题过程，引申解题结果”，使我们从解题全过程中获取更多的信息，提高我们分析问题，解决问题的能力。

怎样引申？“仁者见仁，智者见智”，各人的素质，偏好不尽相同，所收获的也不相同。这里介绍一般的几种引申办法。

(1) 引申题目的条件。当条件变化时，目标也往往发生一定的变化，因而可以构造出新的问题。

(2) 将条件一般化。就是将原来条件中某些限制取消，

因而在比原来条件更普遍的范围里达到目标。

(3) 将条件特殊化。就是在原来条件中，再加上一些限制，因而所达的目标也可能有些变化。

(4) 增加新的独立条件（这是指一般化和特殊化以外的）。这时，可能会获得崭新的结果。

(5) 引申题目的结论。这是指以结论为条件，继续往下推理，得到新的结论。这样，就有可能获得一个新的数学命题。

(6) 一题多变。使条件成立的数学结构，往往可以采取不同的提法来构造问题。比如，画出一个等腰三角形，可以构造出许多数学题目。

另外，我们采取逆命题、否命题、逆否命题等逻辑手段，可以构造出许多新的数学命题，供我们研究。

(7) 一题多解。对于给定的数学问题，从条件通向目标的道路往往不是唯一的。由于解答者的数学知识结构、数学能力等方面的差异，同一问题，会提出不同的解法。另外，既使是同一个解答者，他也可以引用不同的根据，构造出不同的从条件通往目标的道路。从一解引申到多解，可以使我们更深入地认识条件与结论之间的联系渠道，从中可能认识已有知识结构的更多作用。

二、一题多解的意义和作用

为什么会产生一题多解呢？从条件通往目标的道路，无非是定义、公理、定理、公式、规则等等的有效组合。这种组合的方式有可能不是唯一的，因此，就有可能产生一题多解。

有意识地寻求一题多解，有助于巩固数学知识，增长数

学能力。具体说来，有以下几方面的作用。

第一，激发学习者的兴趣、培养主动的进取精神。

一个人，如果自己能断定自己的工作有创造性，那么，往往会产生更强烈的兴趣，发挥更主动的进取精神。

对于学数学的人来说，如能在学习过程中作一些初步的“研究工作”，并且自己能断定自己具有“创造性”，那么，必将激发他对数学的浓厚兴趣。对于中学生来说，找什么样的“研究工作”比较合适？本书作者从多年的教学经验中认识到，最基本的，最容易实现的“研究工作”，就是“一题多解”。为什么这样说？寻求课本中一些习题的“一题多解”，不需要另外再补充超出课本的数学知识，是每一个学生都可以参加的活动。开展这一活动，必将激励学生的学习兴趣。

第二，加深对基本知识的理解、对基本技能的掌握。

“一题多解”，就必然要求学生从多种角度，多种层次去运用学过的知识，技能。因此，对同一问题，在不同的阶段，将有可能提出不同的解法。下面我们先看一个例题。

例1 （初中平面几何第一册的例题）

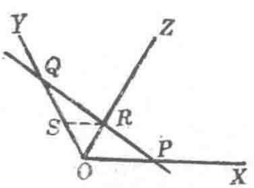

图 1-5

如图1-5，$\angle XOY=120°$，OZ是$\angle XOY$的平分线，直线PRQ与射线OX，OZ，OY分别交于P，R，Q。求证：

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{1}{OR}.$$

【思路分析】 如果我们能找到一个线段l，将它分为l_1和l_2两段，并且使

$$\frac{OR}{OP}=\frac{l_1}{l},\ \frac{OR}{OQ}=\frac{l_2}{l}.$$

那么，就有

$$\frac{OR}{OP}+\frac{OR}{OQ}=\frac{l_1}{l}+\frac{l_2}{l}=\frac{l_1+l_2}{l}=1.$$

因此，找出这样的线段，是我们首先考虑的一条思路。为了实现这一点，就需要添加辅助线。

其次，由于OR是$\triangle POQ$的内角$\angle POQ$的平分线，已知$\angle POQ=120°$。那么，OR可以用OP，OQ来表达。寻求这一表达式，一定可以推出所要证的等式。

再次，我们从120°角的角平分线这一条件出发，引用两边及其夹角表示三角形面积的公式，可以求出OP，OQ，OR这三条线段的一种关系，由此可导出所证的等式。

【证法 1】 过R作$RS \parallel PO$，并交OQ于S。显然，$\triangle ORS$是正三角形，$OS=SR=RO$。

由平行线分线段成比例的定理，得

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{OR}{OP}=\dfrac{RS}{OP}=\dfrac{QR}{QP}\\[2ex]\dfrac{OR}{OQ}=\dfrac{OS}{OQ}=\dfrac{RP}{QP}\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\frac{OR}{OP}+\frac{OR}{OQ}=\frac{QR+RP}{QP}=\frac{QP}{QP}=1$$

$$\Longrightarrow\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{1}{OR}.$$

【证法 2】 如图1-6，作$\triangle OPQ$的外接圆，延长OR