部定大學用書

工程數學

（上册）

國立編譯館部定大學用書編審委員會主編

朱越生編著

國立編譯館出版
正中書局印行

部 定 大 學 用 書

工 程 數 學

（上 册）

國立編譯館部定大學用書編審委員會主編

朱 越 生 編 著

國 立 編 譯 館 出 版
正 中 書 局 印 行

中華民國六十一年十月臺初版
中華民國六十五年九月臺四版

部定大學用書　工程數學　全二册

上册　基本定價 精八元五角 平七元

（外埠酌加運費滙費）

主編者　國立編譯館大學用書編審委員會
編著者　朱越生
出版者　國立編譯館
發行人　黎元譽
發行印刷　正中書局
（臺灣臺北市衡陽路二十號）
海外總經銷　集成圖書公司
（香港九龍油麻地北海街七號）
海風書店
（日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番點）
東海書店
（日本京都市左京區田中門前町九八番地）

新聞局出版事業登記證　局版臺業字第〇一九九號(6651)泰
(1000)

序　言

本書係應國立編譯館大學用書編審委員會之託，為修畢大學一年級微積分學，進而修習大學工學院主要必修科「工程數學」者所編著，其中主要教材預期在規定之三學期十學分分配情形下授畢．較為深入之討論及專題部分，可作工程研究所學生修習「高等工程數學」第一學期之用．早期畢業於大專院校並從事工程之實際工作及研究人員，亦可用此作自修課本以應付數學應用之突飛猛進，並作今後進修之準備．

近代工程科學之領域中，利用數學分析法以求解答之一途，已有與日俱增且有欲罷不能之趨勢．緣工程問題之日趨複雜，已不再能如已往之憑直覺及經驗所可迅速獲其答案者；加以問題所牽涉之因素漸增，如高溫，高速以及新材料等異常情況，恒不能依經驗判斷想像，即使利用實驗方法亦需藉數學分析之助，始能收事半功倍之效．以往純自理論而發展之數學方法，如矩陣理論，保角變換，以及微分方程之理論等，現均應用於工程問題之分析且其重要性日形增加；而其他純理論之數學方法今後究將如何插足於實用之領域實無人可予斷言也．

書編著之主旨，一方面在使讀者瞭解並欣賞數學中之豐碩成果人於工程問題之研究，另一方面期望培養及啓發讀者潛在之智慧而達前人未創之境界．

本書中之人名一律仍採用原文姓氏，蓋不願因純用中譯而使讀者忽略原姓，增加今後閱讀參考文獻之困難．但於每章中最初出現人名時加註中譯，以便對照．書內所用專門名詞，概依照教育部公布之譯名，並在初次介紹及重要處用粗體字印刷，以便句讀及辨認；又另加英文註譯，以期熟悉對照之英文名詞．書末並附「中英名詞對照表」及「中譯姓

氏錄」.又讀者若對某項專題,由於本書篇幅所限而感意有未盡之處,可在書末所附「參考書目」中,查出有關書籍從而作深入之研究.

本書計分上下兩冊,共十二章都百萬餘言,係作者十餘年來在成功大學機械系,工程科學系以及機械,土木,化工等工程研究所;講授工程數學,高等工程數學等科時所用之講義,經年餘之力重新詳加整理補充編著而成者.並承臺灣大學:機械系張導雄教授,施宣銘與黃界清先生及賀承瑜同學詳加校對,故在此併予銘謝.本書雖經數度校閱但謬誤之處在所難免,希讀者及各方賢達不吝批評指正,俾能早日補充改訂以臻完善.

作 者 朱越生 謹識

民國六十一年六月

工 程 數 學

（上 冊）

第一章

概論，基本項目之複習及其他

目次	內容	頁次
1•1	工程或實際問題之一般性數學處理手續	1
1•2	近似計算之準確度	4
1•3	觀察或度量之誤差及精密度	21
1•4	經驗公式	47
1•5	挿值法	64
1•6	數值積分法	78
1•7	多變數函數之微分	94
1•8	複數及複變數	131

第一章　概論，基本項目之複習及其他

學習「工程數學」，目的在利用數學之分析及計算，而求出工程問題或實際問題所需之量，並藉此對該問題之性質及現象，作明確且深入之瞭解。因此自實用之觀點而言，數學並非純爲抽象之科學，而爲確切且有效之工具以供吾人研究一切實際現象時所使用。再吾人若對數學作深入且廣泛之學習，則可打定根基、充實經驗、非但有助於實際問題之分析與計算；瞭解其性質及現象；且可誘導靈感、觸類旁通、而進入前人未抵達之領域。

現代工程師之從事實際工程工作者，常發現其日常工作中，直接利用以往所受數學訓練之部分甚爲微少；但此並不意指其餘部分毫無用途或無價值，蓋數學訓練無形中已培養吾人思考、分析、判斷、歸納之能力；且可激發吾人之潛力，創造或發展解決問題之新方法也。

本章除說明工程或實際問題之一般數學處理之手續外，且對以往學習數學時之重要項目，作重點之複習，並對數值計算作初步之簡介，以備今後之應用。

1-1　工程或實際問題之一般性數學處理手續

一個實際問題，用數學方法處理，自開始以至結束，其經過之歷程，甚爲複雜微妙，並非用片言兩語而可作原則性之說明者。

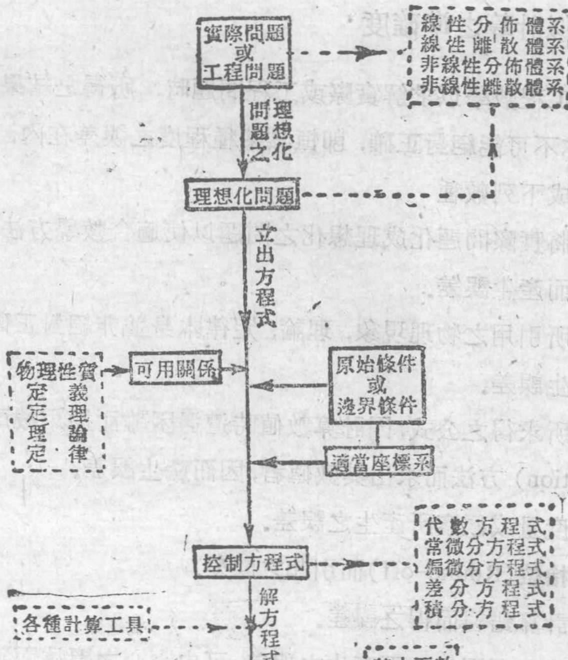
實際問題到達研究者手中，其原始形態常爲資料不足、輪廓模糊之勢態，故得先行確定該問題之性質及所需之結果，並博覽有關典籍以發掘是否有類似之問題存在。否則主體未定或重覆、或目的未定、卽行著手研究，其結果之有價値者幾希。實際問題可分爲**線性分佈體系**(Linear distributed systems)、**線性離散體系** (Linear lumped systems)、**非線性分佈體系**及**非線性離散體系**等等,因其處理方式有異,故在開始時卽應予以區分,以免徒勞無功也.

問題之性質確定以後, 卽着手將實際問題化成數學語言以便數學處理, 在此階段應採用足够之資料作爲變數以供使用. 若原始資料不足,則須假定合理之資料以作補充. 常有種種場合, 資料並非不足而係資料太多;若將全部資料納入, 則問題成爲過度複雜之型式, 不適宜於數學處理之用;因此研究人員得在原始資料中定其取捨,捨其無關大要之資料,取其重要部分, 而形成適宜於數學處理之問題, 此項手續常稱爲**問題之理想化**. 上述之兩步手續有時成爲研究實際問題時最困難之部分, 因其雖有原則性之說明, 但乏確切之步驟以資遵循,恒由研究人員之根基,經驗及天份所決定也.

問題旣經理想化,下一步驟卽爲立出數學方程式,常需利用各項資料之原始定義、物理性質、定理、理論以及各種自然律、或幾何性質以決定各個變數間之關係; 並利用已知之原始條件或邊界條件, 選定使用之座標系,以立出該問題之**控制方程式**. 此類立出之控制方程式, 可爲**代數方程式**、**常微分方程式**、**偏微分方程式**、**積分方程式**、**差分方程式**及**混合方程式**等等. 而工程數學一科中主要研究之項目卽在討論利用種種之方法,以求此類方程式之通解或特解,其中恒有完整之理論以作依據,確切之步驟以資遵循. 故若能勤加學習, 並有足够時間作多方之獵涉,當可求得所研究問題之答案.

用數學方法分析而求得之解,經常將變數間之關係,寫成函數或關係式,最簡單之函數卽吾人所熟悉之「基本函數」,包含多項式、指數、對數、三角、雙曲線函數等; 亦有由定積分所定義, 微分方程所定義之函數,以及無窮級數, 合成函數之解及數値解答等等. 故對如此衆多之函數,其性質必須分別予以判析,始能對所求得之解,有確切眞實之感.

最後即進入將求得之結果予以適當之表達及瞭解其含義之階段. 一方面可將研究之結果作自我之宣揚, 另一方面對該問題之性質及現象, 配合所得之解是否合理, 應予以批判及作成結論. 所得結果之表達方式, 一般常用**公式**, **圖形**, **數值表**等所表示. 爲使工程上應用方便計, 常有將研究結果繪成圖形, 可使變化之趨勢一目了然, 又若該項結果具通用之價値者, 且其**公式**甚爲複雜時, 此種用**圖形**以表達結果之方式, 雖其精確性有限, 但甚合實用, 且頗爲一般工程工作人員所樂用也.



研究實際問題時,自分析開始至分析結尾之漫長歷程中,難保無微小之差錯而影響其解答之正確性,故除詳細覆核分析之過程外;一般常採用,實驗方式、與原問題成合理配合、用另一分析法、與已知結果之類似問題相比較、用維量分析、或用極限情況分析等等方法以判別結果之正確性及可用性。

茲將上述討論,用表解之方式,附列於前,以供參考。

1-2 近似計算之準確度

利用工程數學以求解實際或工程問題時,所得之結果經常並非絕對正確,亦不可能絕對正確,即恒具某種程度之誤差在內,該項誤差之來源可分成下列數種:

① 將實際問題化成理想化之問題以使適合數學方法之處理,因而產生誤差。

② 所引用之物理現象,理論,定律本身並非絕對正確者,因而產生誤差。

③ 所求得之公式,因計算數值時遭遇困難而採用**截尾**(Truncation)方法而求出其數值者,因而產生誤差。

④ 度量或觀察所產生之誤差。

⑤ **捨位**(Round-off)而引起之誤差。

⑥ 計算錯誤而得之誤差。

除最後一項因錯誤而產生之誤差,可由小心之覆核而獲消除者外;由於其他原由而產生之誤差,則無法避免。只能在可能範圍內減少至某種程度。何況所謂絕對正確之答案,其本身恒爲未知之數也。因此任何工程問題中凡包含數値之計算者,多少具有某種近似之性質在內,蓋自開始時之各項數據起,及其分析中逐步所採取之步驟中,經常含有近似之性質在內。本節主要之目的,首在研究因**捨位**而引起之誤差,並包括

近似計算中誤差之衡量及其準確度估計等等. 至於關於誤差之深入理論部分當於以後再行論及之.

(*A*)近似數(Approximate numbers)及有效數字(Significant figure)

吾人常用之數中,只有一小部分可稱爲**正確數**(Exact numbers)如自然數及有理數屬之,又如無理數 $\sqrt{2}$, π, e等亦爲**正確數**,但不能用有限之小數表示,只能寫出其近似之小數,如3.1416、1.4142、2.7183等等. 此種寫出之形式並非原正確數,只爲原正確數之近似值而已,常稱爲**近似數** (Approximate numbers),而在實用問題中,所欲求之**正確數**的確値常不易求得,惟有用**近似數**以表示爲與**正確數**相差甚爲微小之數. 此種**近似數**之觀念,實際上包括兩個數,一個稱爲**基數**如 (N),另一個爲附屬之微小正數如(E_a),再用N與 E_a 以定義正確數如($\overline{N}$)之誤差界値,三者相互之關係如下:

$$\boxed{N-E_a \leqq \overline{N} \leqq N+E_a} \qquad (1)$$

而所謂**近似數**通常即以下列形式表示

$$\boxed{N(\pm E_a)} \qquad (2)$$

例如1.724(±0.0135)即表示某一**正確數**之**近似數**,而正確數介乎1.7105與 1.7375之間.

上述近似數中所附屬之微小正數如 E_a 者,稱爲**一數一量**,或**一計算之絕對誤差** (Absolute error). 此種寫法,以該誤差之範圍甚屬重要時始予引用. 一般而論,實際計算中,對**絕對誤差**之正確估計,並非絕對必須,且一連串之計算中,欲嚴格將絕對誤差包含在內予以運算,事實上亦不可能,因此實用上常將**近似數**縮寫成一個數,並規定其縮寫之法則俾使其精確度憑此而可判定. 此即**有效數字** (Significant figures) 觀念介入之由來.

現規定縮寫一個近似數時，所寫出之每位數字，除用以定小數點位置之 0 以外，每一位數字 0, 1, 2, 3, ……9 均具確定之意義，而最後之一位數至多只有半單位之出入。如此而寫出之數，即稱爲**有效數字**。兹將有效數字之寫法及其含義說明如下：

0.00263　共有**有效數字** 2, 6, 3。係代表**近似數** 0.00263 ($\pm$.000005)。故稱該數正確至三位有效數字。

3809　共有**有效數字** 3, 8, 0, 9。係代表**近似數** 3809 ($\pm$0.5)。正確至四位有效數字。

46300　共有有效數字 4, 6, 3, 0, 0。係代表近似數 46300 ($\pm$0.5)。正確至五位有效數字。

4630×10^1　共有有效數字 4, 6, 3, 0, 係代表近似數 46300 ($\pm$5)。正確至四位有效數字。

4.63×10^4　共有有效數字 4, 6, 3，係代表近似數 46300 ($\pm$50)。正確至三位有效數字。

利用**有效數字**之觀念，訂定寫出之法則，且可憑此而判定其準確度，誠屬方便之至。但有時並不能嚴格實施此種辦法而縮寫近似數。例如有一已知之近似數如前所述者 1.724($\pm$0.0135)，表示其正確値介乎 1.7105 與 1.7375之間。若縮寫成1.724，則代表1.724($\pm$.0005)，故$1.7235<\overline{N}<1.7245$。若寫成1.72，則代表1.72($\pm$.005)，故$1.715<\overline{N}<1.725$。若寫成 1.7，則代表1.7($\pm$0.05)。故$1.65<\overline{N}<1.75$。

上述三種寫法，並無一種實足表示原有誤差之範圍，唯有第三種寫法，始將原有誤差之區間包括在內，但因將誤差之區間作人爲之放大，反將原「正確數」之不定界限增加過度，失却縮寫該近似數之原意，且只有兩位有效數字，將影響今後連續計算之精密度，因此通常採用中庸之道，而將該近似數縮寫成三位有效數字之數如 1.72，雖然犧牲誤差限値之精確意義，但有較多之有效數字可供今後之運算也。

設有正確數 27 及 13.1，相除而得無窮小數

$$27/13.1=2.061068702\cdots\cdots$$

爲使該數在今後計算中具實用價值，經常用四捨五入之**捨位**法而寫成近似數如，

$$2.06,\ 2.061 \text{ 或 } 2.06107 \text{ 等等.}$$

因**捨位**而產生之誤差，恒在前述有效數字所規定之誤差極限之內，因此成爲近似數。如寫成：

2.06　則正確至小數二位，正確至三位有效數字。

2.061　則正確至小數三位，正確至四位有效數字。

2.06107　則正確至小數五位，正確至六位有效數字。

(*B*) 絕對誤差，相對誤差 (Relative errors) 及百分誤差 (Percentage errors)

設一**正確數**爲$\overline{N}$，其**近似數**用其**基數** N 表示，則二者相差之數，稱爲該近似數之**實際誤差** E。有下列關係

$$\boxed{\overline{N}-N=E} \text{ 或 } \boxed{\overline{N}=N+E} \qquad (1)$$

此項實際誤差可爲正數或負數，且恒爲不能確定之數。但有時可決定該實際誤差之界值 E_a，即上述近似數 N 之**絕對誤差** E 與 E_a 有下列關係

$$\boxed{|E|\leqq E_a} \qquad (2)$$

因此原正確數$\overline{N}$ 介乎 $N-E_a$ 及 $N+E_a$ 之間，此即(A)節中所引用之

$$\boxed{N-E_a\leqq\overline{N}\leqq N+E_a} \qquad (3)$$

如有近似數 4.629，係正確至三位小數，且具四位有效數字者，其絕對誤差 $E_a=0.0005$，故其所代表之正確數 $\overline{N}$ 爲

$$4.6285 \leqq \overline{N} \leqq 4.6295$$

近似數之具有單位者，則其絕對誤差亦具同一單位。

一近似數 N 之**相對誤差**，常用 E_r 表示，係由下式所定義

$$\boxed{E_r \equiv \frac{E_a}{\overline{N}}} \tag{4}$$

但因正確數$\overline{N}$ 爲未知之數，故寫成

$$\boxed{E_r \leqq \frac{E_a}{N-E_a} \text{ 或 } E_{r_{max}} = \frac{E_a}{N-E_a}} \tag{5}$$

近似數之具有單位者，其相對誤差與單位無關。

至於**百分誤差**，則用 E_p 表示，而定義爲

$$\boxed{E_p \equiv 100E_r\% = 100\frac{E_a}{\overline{N}}\% \leqq 100\frac{E_a}{N-E_a}\%} \tag{6}$$

【例 1】 設有直徑約 2 吋之圓桿，用準確至千分之一吋之測微器度量，則其絕對誤差爲 $E_{a1}=0.0005$吋.

若用捲尺以度量長約 1 哩之路軌，準確至 1 呎爲限時，則其絕對誤差爲 $E_{a2}=\frac{1}{2}$呎 = 6 吋.

前者之相對誤差爲 $E_{r1} < \frac{0.0005}{2-0.0005} = \frac{1}{3998} \doteq \frac{1}{4000}$

後者之相對誤差爲 $E_{r2} < \frac{6}{5280\times12-6} \doteq \frac{1}{10559}$

兩相比較，雖然後者之絕對誤差爲前者之 12,000倍，但後者之準確度實較前者爲高，即後者之度量較前者爲準確.

由此可見此項度量或計算，用以衡量其準確度之指標，實際上係用相對誤差 E_r，而不用絕對誤差 E_a 也。

【例 2】 兩個近似數 3.2435 及 1510.1723 均爲小數四位之數，其絕對誤差同

爲 0.00005，但其相對誤差並不相同，且相差甚遠，再比較兩個近似數 3.2435 及 746.25，均爲五位有效數字之數，但小數之位數不同．二者之絕對誤差分別爲 0.00005 及 0.005，但其相對誤差分別爲 0.000016 及 0.000007 而爲同一類型．

由此可見絕對誤差與近似值之小數位數有直接關連，但相對誤差則與近似值之有效數字之位數有直接關連．茲將有效數字之位數與相對誤差間之關係通則，不作證明而綜合說明如下：

① 設有正確至 n 位有效數字之近似數，其最前之有效數字爲 k，如 $k\times\times\times\times$ 者，則其相對誤差之界値如下：

$$\boxed{\begin{array}{l} E_r<\dfrac{1}{2k\times 10^{n-1}} \\ E_r<\dfrac{1}{k\times 10^{n-1}} \end{array}} \quad \begin{array}{l}\text{（近似數中除 } k \text{ 以外尙有不爲 0 之數字者）} \\ \text{（近似數中除 } k \text{ 以外其餘數字均爲 0 者）}\end{array} \qquad (7)$$

【例 3】(a)正確至五位有效數字之近似數 864.32．

其中 $k=8, n=5$，依照上述通則而得 $E_r<\dfrac{1}{2\times 8\times 10^4}$．

驗算：絕對誤差 $E_a=0.005$

$$E_r<\frac{0.005}{864.32-0.005}=\frac{5}{864320-5}=\frac{1}{2\times 86432-1}=\frac{1}{2(86432-\frac{1}{2})}<\frac{1}{2\times 8\times 10^4}$$

(b)再觀近似數 0.0800，正確至三位有效數字，其中 $k=8, n=3$ 依照上述通則而得 $E_r<\dfrac{1}{8\times 10^2}$．

驗算：$E_a=0.00005$，$E_r<\dfrac{.00005}{0.0800-.00005}=\dfrac{1}{1600-1}<\dfrac{1}{8\times 10^2}$

$$\not<\frac{1}{2\times 8\times 10^2}.$$

此處所陳述之通則，其逆陳述並不成立，但有下述通則可用．

② 若一近似數之相對誤差，$E_r<\dfrac{1}{(k+1)\times 10^{n-1}}$，則該近似數正確至 n 位有效數字，而其絕對誤差恒小於最後一位有効數

字之一個單位.

若一近似數之相對誤差,

$$\boxed{E_r < \frac{1}{2(k+1)\times 10^{n-1}},\text{或 } E_r \leqq \frac{1}{2\times 10^n}} \quad (8)$$

則該近似數恆正確至 n 位有效數字.

(*C*) 誤差通式

設有一數 N, 係由一組數 N_i 所決定者, 則可列成關係式

$$\boxed{N = f(N_1, N_2, \cdots N_n)} \quad (1)$$

且 $$dN = \frac{\partial f}{\partial N_1}dN_1 + \frac{\partial f}{\partial N_2}dN_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial N_n}dN_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial N_i}dN_i$$

此即各該數之極微變値之間應有之關係, 若各該數之變値並非極微, 但較為微小時, 上列關係近乎成立, 故可改寫成誤差間之關係式

$$\boxed{E = \frac{\partial N}{\partial N_1}E_1 + \frac{\partial N}{\partial N_2}E_2 + \cdots + \frac{\partial N}{\partial N_n}E_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N}{\partial N_i}E_i} \quad (2)$$

故有 $$\boxed{|E| = \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N}{\partial N_i}E_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial N}{\partial N_i}\right|\left|E_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial N}{\partial N_i}\right|E_{ai}} \quad (3)$$

因 N 之絕對誤差 E_a 代表 $|E|$ 之極大值, 故得

$$\boxed{E_a = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial N}{\partial N_i}\right|E_{ai}} \quad (4)$$

此即計算函數 N 之絕對誤差時所用之通式.

若 (4) 式中之係數 $\left|\frac{\partial N}{\partial N_i}\right|$ 均不甚大時, 則$N_1, N_2, \cdots N_n$ 諸數之不定程度 E_{ai}, 只產生函數 N 之微量變動, 因此該函數具**穩定** (Stable) 之特