机器人学：力学与控制

韩朔眺 胡学岑 编

南京航空学院
1990.1.

前　言

机器人技术是近三十年发展起来的高技术，机器人是典型的机电一体化产品之一。工业机器人已成了提高生产过程自动化，改善劳动环境条件，提高生产效率和产品质量的有效手段。应运而生的机器人学已形成一门独立的学科。我们编译的这本讲义是以美国1987年出版的“Robotics, Control, Sensing, Vision, and Intelligence”一书为蓝本的，可作为自控专业本科选修课及硕士研究生的教材。

本讲义第一章至第三章由韩朔朗编写，第四章至第八章由胡学岑编写，全文由王立审阅。

由于编者水平有限，讲义中错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1989年9月

20-A89-301-200

目　录

第一章　绪言 …… 1

1.1 概述 …… 1

1.2 机器人发展简史 …… 3

1.3 机器人的运动学和动力学 …… 5

1.4 机器人的轨迹规划和控制 …… 5

1.5 机器人的传感技术 …… 6

1.6 机器人的编程语言 …… 7

1.7 机器人的智能化 …… 7

第二章　机器人运动学 …… 9

2.1 引言 …… 9

2.2 运动学正问题 …… 10

2.2.1 转动矩阵 …… 10

2.2.2 合成转动矩阵 …… 14

2.2.3 绕任意轴转动的转动矩阵 …… 15

2.2.4 以欧拉角表示的转动矩阵 …… 17

2.2.5 转动矩阵的几何解释 …… 19

2.2.6 齐次坐标和齐次变换矩阵 …… 20

2.2.7 齐次变换矩阵的几何解释 …… 22

2.2.8 合成的齐次变换矩阵 …… 23

2.2.9 杆臂，关节及其参数 …… 25

2.2.10 Denavit－Hartenberg表达式 …… 26

2.2.11 机器人的运动学方程 …… 30

2.2.12 末端夹持器位置和姿态的其他表示法 …… 35

2.3 运动学逆问题 …… 38

2.3.1 求解欧拉角的逆变换法 …… 38

2.3.2 求解关节角的几何法 …… 44

2.3.3 求解关节角的逆变换法 …… 57

第三章　机器人动力学 …… 64

3。1 引言 …… 64
3。2 拉格朗日——欧拉法 …… 64
3。2。1 机器人的关节速度 …… 65
3。2。2 机器人的动能 …… 68
3。2。3 机器人的势能 …… 69
3。2。4 机器人的动力学方程 …… 70
3。2。5 具有转动关节的机器人动力学方程 …… 71
3。2。6 例子——一个两自由度的机器人 …… 75
3。3 牛顿——欧拉法 …… 79
3。3。1 转动坐标系 …… 79
3。3。2 运动坐标系 …… 81
3。3。3 杆臂运动学 …… 82
3。3。4 机器人的递推动力学方程 …… 85
3。3。5 杆臂相对于其自身坐标系的递推动力学方程 …… 88
3。3。6 计算方法 …… 90
3。3。7 一个两杆臂机器人的例子 …… 91
3。4 广义达朗贝尔动力学方程 …… 96
3。4。1 获取简化动力学模型的经验法 …… 104
3。4。2 例子——一个两自由度的机器人 …… 108

第四章 轨迹规划 …… 112
4。1 概述 …… 112
4。2 关节内插轨迹 …… 112
4。3 直角坐标路径轨迹规划 …… 122

第五章 机器人关节运动控制 …… 130
5。1 机器人控制概述 …… 130
5。2 计算力矩法 …… 131
5。2。1 单关节的传递函数 …… 131
5。2。2 单关节位置控制器 …… 135
5。2。3 系统特性和稳定判据 …… 137
5。2。4 多关节机器人的控制器 …… 143
5。2。5 数字控制系统的采样频率 …… 144
5。3 近似最小时间控制 …… 145
5。4 变结构控制 …… 147

第六章 机器人分解运动控制 …… 150
6.1 基本概念 …… 150
6.2 分解运动速度控制 …… 153
6.3 分解运动加速度控制 …… 155
6.4 分解运动力控制 …… 156

第七章 机器人自适应控制 …… 159
7.1 模型参考自适应控制（MRAC） …… 159
7.2 自校正自适应控制 …… 161
7.3 自适应摄动控制 …… 163
7.3.1 概述 …… 163
7.3.2 摄动方程 …… 163
7.3.3 系统参数辨识与控制 …… 165

第八章 机器人感觉系统 …… 168
8.1 概述 …… 168
8.2 力觉传感器 …… 169
8.2.1 关节力传感器 …… 169
8.2.2 基座力传感器 …… 169
8.2.3 腕力传感器 …… 170
8.2.4 握力传感器 …… 172
8.3 触觉传感器 …… 173
8.3.1 导电橡胶触觉传感器 …… 175
8.3.2 磁致弹性触觉传感器 …… 176
8.3.3 光电触觉传感器 …… 178
8.3.4 PVDF触觉传感器 …… 179
8.4 滑觉传感器 …… 179
8.4.1 滑轮式滑觉传感器 …… 180
8.4.2 滚筒式光电滑觉传感器 …… 180
8.4.3 应变片式滑觉传感器 …… 181
8.5 接近觉传感器 …… 182
8.5.1 红外接近传感器 …… 182
8.5.2 光纤接近传感器 …… 182
8.6 距离传感器 …… 183
8.7 机器人传感器实用化条件 …… 184

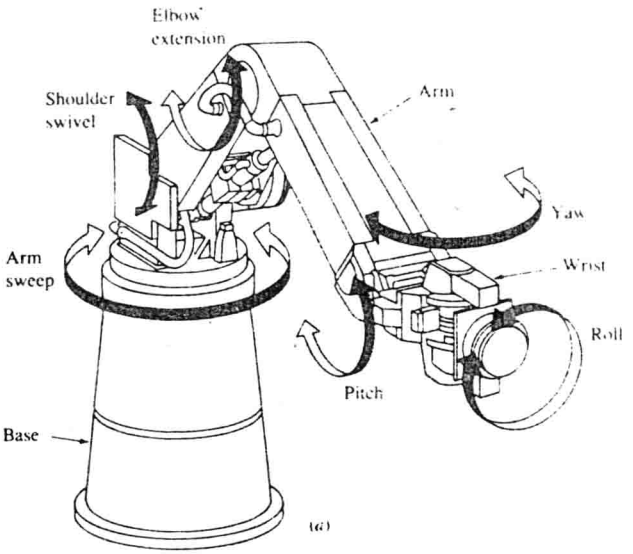
第一章　绪　言

1.1　概　述

由于提高生产率和获取质优产品的迫切需要，在工业生产中已越来越多地采用了自动化技术。现在，大多数自动化生产任务仍由专用机器完成，这些机器是按生产过程的预定要求设计的，故通常称为硬自动化系统。它们的灵活性不好且成本偏高，于是机器人应运而生。它可以比较灵活地适应工作环境，生产成本也较低。

“robot”这个字来源于捷克字“robota”。其意思为“工作”。美国韦氏大辞典对机器人的定义是“能完成通常由人类所做工作的自动装置”。根据这个定义，洗衣机也可称之为机器人。美国机器人协会对工业机器人下了一个比较确切的定义：机器人是一种可以再编程序的多功能操作器，通过可变编程实现各种运动以搬动材料，工件、工具或专用设备，从而完成各种工作任务。简言之，机器人是一种带有外部传感器的，程序可再编的通用操纵器，它可完成各种工作任务。根据这个定义，机器人必须具有智能。这通常是由计算机的算法以及控制系统，传感系统等组合而成。

工业机器人是一种通用的计算机控制的操纵器，它由几个刚性杆臂借助于转动关节或移动关节串联而成。杆链的一端附于基底之上，另一端是空悬的，上面装有工具以操作工件或完成装配任务。关节的运动使各杆臂产生相对运动。从机械结构上看，机器人由手臂（或躯干），手腕组件和工具组成。它可到达处在其工作空间内的工件处。工作空间是机器人手臂可达的范围，它的手臂可把手腕组件伸到工作空间内的任何一点。手臂通常具有三个运动自由度，它们的合成运动可使手腕到达工件所在的位置。手腕组件一般也具有三个转动自由度。它们的合成运动给工具以合适的方位（位置和姿态），以便按工件的位置和形状拿起它来。后三个自由度的运动通常称之为俯仰，侧摆，滚转。因此对于一个六关节的机器人来说，手臂组件是定位的机构，手腕组件是定姿态的机构。图 1.1



所示的辛辛纳提Milacron T^3 机器人和Unimation PUMA机器人可清楚的说明这个概念。

工业机器人广泛地用在制造和装配线上，例如，搬运材料，点焊，弧焊，零件装配，喷漆，装卸工件，空间和海底探测，假肢研究，以及处理危险材料等。这些机器人按运动方式可分为下列四类（图1。2）：

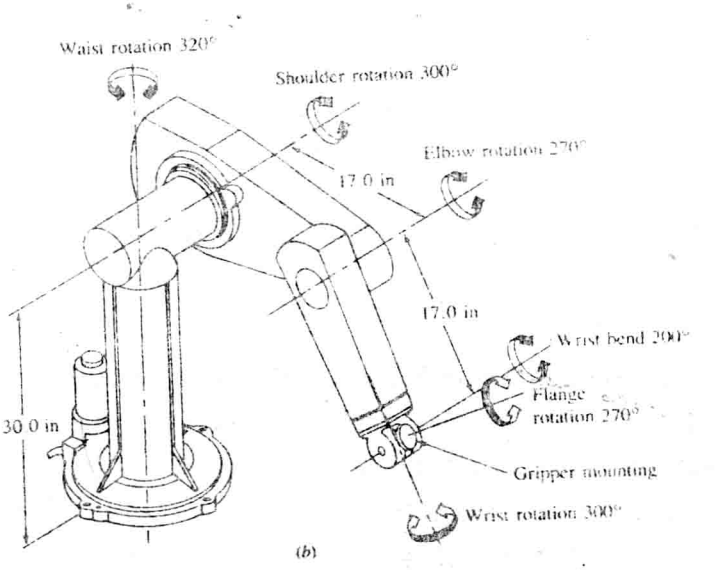


图1。1 （a） 辛辛纳提Milacron T^3 机器人
（b） PUMA560机器人

笛卡尔坐标（三个直线运动轴）。例如IBM的RS－1机器人和Olivetti的Sigma机器人。

园柱坐标（两个直线运动轴和一个转动轴）。例如Prab的Versatran 600机器人。

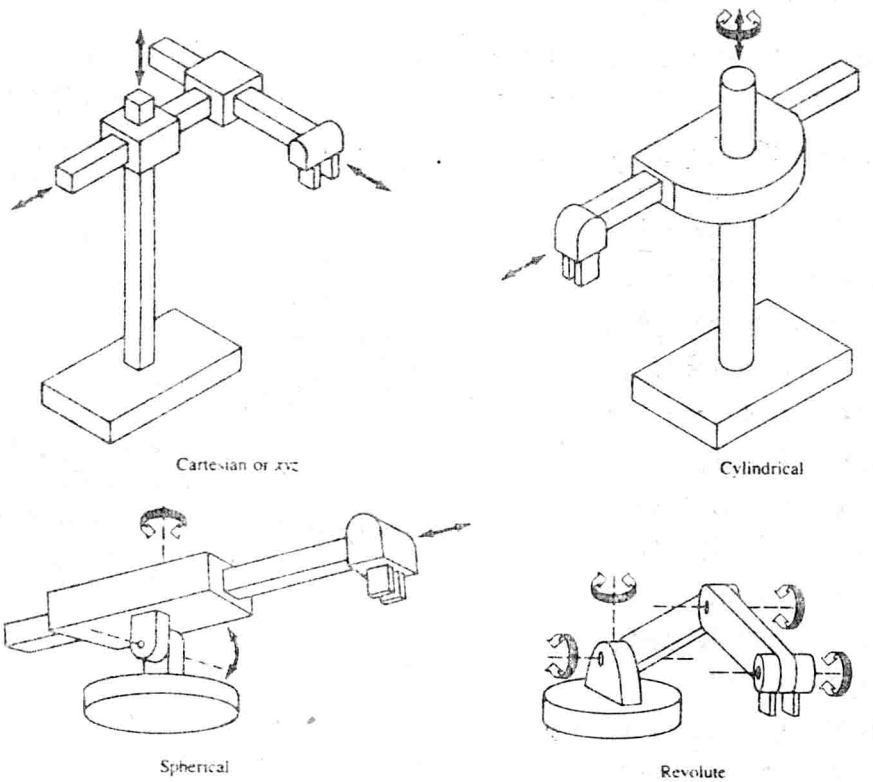


图1。2 机器人杆臂的运动方式

球形坐标（一个直线运动轴和两个转动轴）：例如Unimation公司的Unimate 2000B机器人。

转动坐标或关节连接的坐标（三个转动轴）：例如Cincinnati Milacron的T³机器人和Unimation公司的PUMA机器人。

当今大多数用小型和微型计算机控制的工业机器人基本上都是位置控制的机器人。使用者利用手持示教控制盒预先引导或教会机器人完成一系列的运动，然后机器人再复现这些预置的或预先编程的运动，从而完成一个给定的任务。不过，这些机器人没有或几乎没有安装外部传感器，故不能得到必要的工作环境的讯息。因此，工业机器人主要用来完成比较简单的重复的工作任务。当前，改进机器人系统的整体性能已引起越来越多的研究人员的注意。

1．2 机器人发展简史

*1921*年剧作家Karel Capek在他的讽刺剧R．U．R．（洛桑万能机器人）中首次使用了robot这个字，并从而引入到英语中。在该剧里robot是类似于人的机器，但工作起来却从不会疲倦。开场时，剧中的robot是代替工人工作的，但到后来却转而反对其制造者，并要消灭全人类。此剧对于今天人们对机器人的某些流行看法具有很大的影响，其中包括认为“机器人是具有智能和个性的类人机器”这样的看法。*1926*年德国有关机器人的电影“大都会”，*1939*年纽约世界博览会上展出的行走机器人Electro和机器狗Sparko以及更近的，在*1977*年映出的影片“星球大战”中的机器人C-3PO都强化了这种看法。现代工业机器人与过去六十年舆论界所期待的机器人相比要简单得多。与现代工业机器人有关的早期研究工作可以追溯到第二次世界大战才结束后的时期。四十年代末期在美国Oak Ridge和Argonne国家实验室就开始研制遥控机械手以处理放射性材料。这些机械手都是“主从式”的，可以真实地再现操作者的手和臂的运动。主动机械手由操作者导引完成一系列的动作，而从动机械手就尽可能准确地复现主动机械手的运动。后来，把主动机械手与从动机械手的运动用机械连接起来以实现力反馈，目的是让操作者能感受到从动机械手与操作对象之间所产生的力。在五十年代中期，电连接和液压连接代替了机械连接，例如GE公司的Handyman和GM公司的Minotaur I就是这样的。

在此之后很快出现了能够自治复现操作的更为高级的系统。在五十年代中期George C。Devol研制了一台名为“可编程序的铰接式变换器”的机械手，它的动作可由程序加以编制（因而动作可以改变）并可复现程序中各指令所确定的一系列运动步骤。Devol和Joseph F。Engelberger两人把这种想法进一步发展之后，Unimation公司在*1959*年造出了第一台工业机器人。其关键是把机械手与计算机联系在一起，从而产生了一种能够通过示教而去自动执行各种任务的机器，即机器人。机器人与一般的机械式自动化机器不同，它能在所费不多的情况下再编程序，以重新组合运动，从而适应

生产任务的变化。由于可编程的机器人成了一种新型的强有力的生产工具，在六十年代又开始采用传感器反馈以大大加强机器人的灵活性（柔性）。六十年代初期H。A。Ernst〔1962〕研制了一台带触觉传感器的计算机控制的机器人。这台名为MH－1的机器人能够“感受”到块状物的各种信息，并利用这些信息控制手去堆叠它们而无需操作人员的帮助。这是对无规则的环境具有适应能力的机器人的首批实例之一。其整个系统包含一台六自由度的操作手ANL Model－8，一台TX－0计算机，后者通过接口设备控制操作手的运动。这个研究课题后来演变成为MAC计划的一部分，研究人员在操作手上安装了一台电视摄像机，从而开始了机器视觉的研究。与此同时Tomovic和Boni〔1962〕二人研制了一台原型机，上装压力传感器，可以感受工件的信息并作为反馈信号输给电动机以执行两种抓取规程中的一种。只要手一和工件接触，与工件大小和重量成比例的信号就由压力传感器送入计算机中。1963年美国AMF公司向市场上推出了VERSATRAN机器人。从这年开始，陆续研制了各种各样的机器人。例如，Roehampton机器人和Edinburgh机器人等。

六十年代末，McCarthy〔1968〕和他的同事们在斯坦福大学人工智能实验室研制了一台带手、眼和耳（即操作手，电视摄像机和麦克风）的计算机。这台设备能够辨识语音、“看得见”散布在桌面上的物件并能按照指令拿取它们。也就在这一时期，Pieper〔1968〕研究了由计算机控制的机器人的运动学问题，而Kahn和Roth〔1971〕对具有一定结构形式的，利用“砰一砰”控制的机器人的动力学和控制问题做了分析研究。

同时，其他一些国家（特别是日本）也开始注意到工业机器人的重要性。早在1968年日本川琦公司就获得了Unimation公司的机器人的生产许可证。在1969年，机器人的研究获得了惊人的成就，美国GE公司为美国军队研制成功了一台供实验用的可以行走的车辆。同年波士顿大学也研制成功一台机器人，次年斯坦福大学研制了一台装有摄像机和计算机控制的机器人。从此开始了机器人学中某些最重要的课题的研究。斯坦福大学的机器人曾完成了一个实验，即按照各种指令自动地堆叠工件。在当时，这对一台自动化机器人来说是非常复杂的工作。1974年Cincinnati Milacron公司推出了它的第一台计算机控制的工业机器人——“The Tomorrow Tool”即T^3。此机器人可提升100磅以上的重物，并能跟踪装配线上的移动工件。

在七十年代，大量的研究工作集中在如何利用外部传感器协助机器人完成操作任务上。Bolles和Paul〔1973〕把斯坦福大学的机器人与PDP－10计算机连接起来，利用视觉反馈和力反馈去装配汽车水泵。大约在同时IBM公司的Will和Grossman〔1975〕研制了一台带触觉和力觉传感器的机器人，它可完成一台有20个零件的打字机的机械装配工作。Inoue〔1974〕在MIT人工智能实验室从事力反馈方面的人工智能研究。精确装配中的初始定位方法采用了着陆导航的搜索技术，在Draper实验室，Nevins等人〔1974〕研究了与适从性有关的传感技术。由此研制成功了名为Remote Center Compliance（RCC）的被动适从装置，它安装在机械手末关节上的装接板处供精密装配之用。Bejczy〔1974〕在喷气推进实验室（JPL）利用斯

坦福机器人完成了计算力矩控制法的研究。从那时起出现了各种机器人的控制方法。

今天，所谓机器人学所包括的范围比几年前广泛得多，它涉及许多边缘学科的领域，其中包括运动学、动力学、轨迹规划、控制、传感技术、程序语言和人工智能等。

1．3 机器人的运动学和动力学

机器人运动学研究的是机器人各杆臂相对于固定参考坐标系的运动几何关系，而不考虑产生运动的力或力矩。因此，运动学描述的是机器人作为时间函数的空间位移，特别是机器人末端夹持器的位置和姿态与关节变量空间的关系。

机器人运动学包含两个基本问题。第一个问题通常指的是正运动学问题，第二个问题指的是逆运动学问题或运动学的解。因为机器人杆臂运动时的独立变量是关节变量，而根据任务要求所提出的末端夹持器的位置和姿态通常都是相对于固定参考坐标系的，所以最常遇到的还是逆运动学问题。Denavit和Hartenberg〔*1955*〕提出了一套系统而通用的方法，该方法利用矩阵代数来描述机器人杆臂相对于固定参考坐标系的几何关系。也就是利用一个*4* × *4*的齐次变换矩阵来表达两相邻杆臂间的空间关系，把正运动学问题简化成求一个等价的*4* × *4*齐次变换矩阵，此矩阵表述了手坐标系的空间方位和参考坐标系的关系。推导机器人动力学方程时也要用到齐次变换矩阵。一般说来逆运动学问题有好几种解法。常用的方法有矩阵代数法、迭代法和几何法。本讲义第二章将详细地论述正运动学问题和逆运动学问题。

机器人动力学研究的是杆臂运动与作用力（或力矩）之间的关系。动力学方程是一组描述机器人动态性能的数学表达式。在用计算机仿真研究机器人杆臂的运动，设计合适的控制律，评估机器人的结构时都要用到动力学方程。机器人的动力学模型可由有关的物理学定律（如牛顿定律等）求得。然后进一步可以求出以杆臂几何参数和惯性参数表示的动力学方程。比较方便的方法是拉格朗日——欧拉法和牛顿——欧拉法。第三章将详细地讨论这些问题。

1．4 机器人的轨迹规划和控制

在得到了机器人的运动学和动力学方程之后，就可以按所需运动轨迹来控制各关节的执行元件以完成预定的工作任务。在此之前还需要知道机器人的杆臂是否会碰到障碍物以及手部是否必须按一定的轨迹运动。控制问题可分解为两个相关的子问题——规迹规划和运动控制。

机器人的手部从初始方位（位置和姿态）运动到最终方位所经过的空间曲线称为轨迹。轨迹规划是借助某一多项式函数，利用内插法去近似于希望的轨迹，从而得到一系列预先设置的与时间有关的点位，以此来控制机器人从初始方位运动到所需的方位。第四章将讨论轨迹规划的问题。

一般说来，运动控制的问题包含两部分，即（*1*） 求取机器人的动力学模型，

（2） 利用动力学模型决定控制规律或控制对策以得到希望的系统响应和动态性能。因为第一部分已在第三章详细地讨论过了，故第5，6，7三章将集中讨论第二部分的问题。从控制分析的观点看，机器人运动的控制通常分为两个不同的阶段。第一阶段是粗略控制，在此阶段机器人沿预定轨迹从初始方位运动到所希方位的附近。第二阶段是精确控制，此时利用来自传感器的反馈信息控制末端夹持器与工件之间的相互作用以完成工作任务。

当今工业机器人的控制方法是把每一个关节分别作为简单的单回路伺服系统加以处理。此法因为忽略了整个杆臂系统位形和运动的变化，故建立的动力学模型与实际情况相距较远。被控系统参数的变化有时足以使这种简单的反馈控制失去作用，系统的响应速度和阻尼都会变小。故此法仅适用于精度和速度要求不高的场合。用这种方法控制的机器人，其运动速度不高且带有抖动。要提高机器人的控制水平，则需要求得精确的动力学模型，采用高级的控制方法，利用特定的计算机系统以及并行处理技术。

1．5 机器人的传感技术

利用外部传感器可使机器人灵活地适应其周围环境的要求。这与预编程的操作不同，后者是通过“示教”的方法使机器人“再现”编程的功能以完成工作任务。虽然“示教——再现”式是当前工业机器人最主要的工作方式，但如何利用传感技术却是机器人学领域中热门的研究课题，因为这可使机器人对其周围环境具有一定程度的智能。第八章将对机器人的传感技术加以讨论。

机器人传感器的功能可分为两种：检测内部状态和检测外部状态。内部状态传感器检测用于机器人控制的变量，例如关节的位置。外部状态传感器检测距离，接近和接触等变量，以用于机器人的导引和目标的辨识及处理。虽然接近觉，接触觉和力觉的传感技术在改善机器人的功能上起着重要的作用，但视觉在传感功能中被认为是最有用的。机器人的视觉功能指的是，根据三维世界的图像，提取图像信息的特征，然后做特征化处理并加以理解。这通常也称为机器视觉或计算机视觉。它可分为六个主要部分：（1）提取图像信息，（2） 预处理，（3） 区域分割，（4） 图像描述，（5） 识别，（6） 图像理解。

为了方便起见，可按工作过程的复杂程度来划分视觉处理的水平，即分为三种处理水平：低、中和高三级。三级之间虽然没有明显的界限，但把机器视觉系统不可缺少的六个部分加以分类却是有一定意义的。提取图像信息和预处理属于低级水平。在这一级，把图像信息作适当补偿（例如降噪处理），最后获得原始的图像特征（例如明暗度不同的若干不连续点）。中级水平的视觉处理是把经低级水平视觉处理所得的图像再提取其特征，然后做特征化处理并加以区别。前述之区域分割，图像描述和识别属于中级水平的视觉。高级视觉则是仿效人去认识对象的过程。

1．6　机器人的编程语言

使用机器人的一个主要障碍是在使用者和机器人系统之间缺少合适而有效的信息交流方法，使用者难于直接指导机器人去完成给定的任务。当然现在也有几种与机器人通讯的方法，主要的三种方法是（1）　不连续的单词识别，（2）　示教再现，（3）　高级编程语言。

现今的语音识别的水平是十分原始的，并且通常与说话者有关。它只能从有限的词语中识别一组不连续的单词，同时通常还要求说话者在单词间要有停顿。虽然现在由于快速计算机和有效算法的出现而有可能实时识别单词，但依靠识别不连续的单词去描述一个工作任务是有局限性的。此外还需要大量的存贮空间以存贮语音数据，并需要一段训练时间来建立语音模板供识别之用。

示教再现法先要引导机器人完成所需的动作以教会机器人怎样运动。这通常包含下面几个步骤：（1）　用手动控制的办法引导机器人慢速完成要求的全部工作任务，并在适当的位置记录下关节的转角以便将来复现这些动作；（2）　编辑和复现所教的动作；（3）　如果所教的动作是正确的，则机器人就以适当的速度重复运转。这种方法在现代工业机器人中得到了最为广泛的应用。

解决人——机器人通讯问题的较为常用的方法是利用高级编程语言。机器人常用于弧焊，点焊和喷漆等方面。完成这些任务不需要机器人和环境之间相互进行通讯联络，并易于用导引法编程。可是如果应用机器人完成装配任务，则通常需要高级编程语言。这当然是办得到的；因为机器人通常都是由计算机控制的，而人和计算机通讯的最有效的方法就是利用高级编程语言。此外，利用程序来描述装配任务，则机器人只要简单地去执行适当的程序就能完成不同的工作。这就增加了机器人的灵活性和多功能性。

1．7　机器人的智能化

机器人学的一个基本问题是如何规划运动轨迹以完成预定的任务，然后控制机器人去执行完成任务所必须的指令。这里所谓的规划是指工作前预先决定机器人运动的轨迹。此问题可由解题系统根据初始条件来解决。因此，规划后得到的是一个运动轨迹的表达式，据此可实现预定的目的。

对于机器人解题方法的研究，导致在人工智能领域提出了许多有关解题系统的设想。一个典型的情况是：一台机器人上装有若干传感器，能在简单的环境中完成一系列基本的操作。由于机器人的操作，就把环境从一种状态或结构变为另一种状态或结构。例如所谓“块状物环境”，可认为是由几个放在桌上或相互堆叠在一起的带标记的块状物和一台装有电视摄像机的机器人所构成，机器人的手可以拿起块状物并使其运动。在某些情况下，机器人又可能是一台带电视摄像机的可动装置，它可完成若干种工作，例如可

以把某些物体在还存在其他一些物体的环境中从一个地方推到另一个地方。

智能化的重点是机器人如何解题，即如何完成规划。机器人规划器的作用是在初、终两个状态间决定一条合适的轨迹。规划功能为机器人系统提供了智能和解题能力，这方面的内容是热门的研究课题。轨迹规划要在机器人上得到实时应用，还需有快速有效的规划算法，以及高速专用的计算机系统。

第二章　机器人运动学

2.1　引　言

机械操作手是一个由若干执行元件驱动的开链机构，它由一些刚体（杆件）组成，利用转动关节或移动关节把各杆件串接在一起。开链的一端固定在支承基座上，而另一端却空悬着，上装工具（末端夹持器）以操作工件或进行装配作业。各关节间的相对运动带动杆件运动从而将手部定位到所希望的姿态。机械操作手工作时，在许多情况下，人们感兴趣的是怎样在空间描述其终端夹持器与固定参考坐标系之间的相对关系。按照习惯，今后我们把机械操作手就称为机器人。

机器人杆臂运动学所研究的，是机器人的杆臂相对于固定坐标系运动时的几何关系，它是时间的函数，并不考虑引起运动的力或力矩。因此，它分析描述的是机器人在空间的位移（是时间的函数），特别是描述关节变量空间和机器人末端夹持器的位置及姿态之间的关系。本章将论述机器人杆臂运动学中在理论和实际两方面都是十分重要的两个基本问题：

1。对于一台给定的机器人，已知关节转角向量 $q(t)=(q_1(t), q_2(t),\cdots q_n(t))^T$ 和杆臂的几何参数（式中 n 是自由度数），则机器人的末端夹持器相对于参考坐标系的位置和姿态是什么？

2。已知机器人的末端夹持器相对于参考坐标系的位置和姿态以及杆臂的几何参数，试问机器人的手部能够到达规定的位置和姿态吗？如果能够的话，又有多少不同的解（指各杆臂构成不同的几何位形）可以满足同样的要求？

第一个问题通常称为运动学的正问题（或前向问题），而第二个问题称为运动学的逆问题（或求杆臂解的问题）。因为机器人杆臂系统中的独立变量是关节变量，而要完成的作业任务通常都是以参考坐标系为依据来表示的，故最常遇到的是逆问题。表明这两个问题之间关系的简单方块图见图 *2*。*1*。

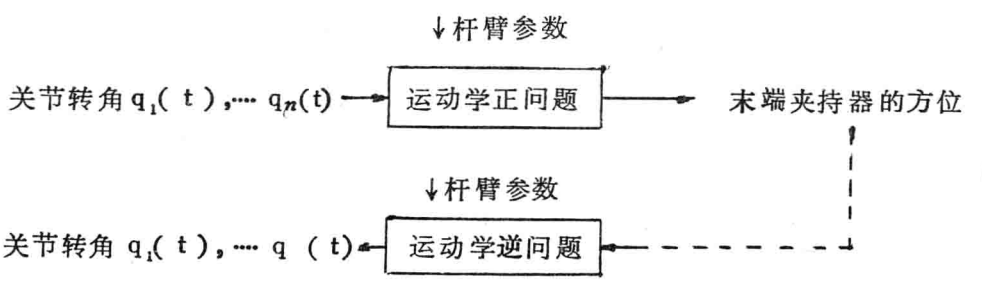


图 *2*。*1*　运动学正问题和逆问题

因为机器人的杆臂可以相对于参考坐标系转动和（或）移动，故末端夹持器在空间的总位移就是由杆臂的角位移和线位移造成的。Denavit和Hartenberg〔1955〕提出了一种通用而系统的方法，即利用矩阵代数来描述和表达机器人的杆臂相对于固定坐标系的空间几何关系。此法利用4×4齐次变换矩阵来描述两个相邻的刚性杆件之间的空间关系，并将运动学的正问题加以简化以找出一个把“手部坐标系”与参考坐标系联系起来的4×4齐次变换矩阵。这些齐次变换矩阵在推导机器人杆臂动力学方程时也是有用的。

一般说来，运动学的逆问题有几种方法可解。常用的一些方法是矩阵代数法，迭代法和几何法。本章将以具有转动关节的机器人为例来介绍矩阵代数法和几何法。

2.2 运动学正问题

为了描述和表达机器人杆臂相对于固定参考坐标系的位置，我们将利用向量和矩阵代数*推演出一套系统的、通用的方法。因为机器人的杆臂可以相对于参考坐标系转动和（或）移动，故沿着每一个杆臂的关节轴线，需建立一个附体坐标系。运动学的正问题被简化为找出一个把附体坐标系与参考坐标系联系起来的变换矩阵。用3×3转动变换矩阵就可描述附体坐标系相对于参考坐标系的旋转运动。然后利用齐次坐标来表示三维空间中的点向量，这时为了把附体坐标系的平移运动也包括进来，转动变换矩阵就被扩展为4×4的齐次变换矩阵。Denavit和Hartenberg〔1955〕首先使用了这个矩阵表达式来描述机器人杆臂在空间的几何关系。Denavit－Hartenberg表达式的优点就是在推导机器人杆臂运动方程时它的算法是普遍适用的。

2.2.1 转动矩阵

一个3×3的转动矩阵可以被定义为在三维欧氏空间中对一个位置向量进行处理的变换矩阵，它把用转动坐标系OUVW（附体坐标系）表示的该向量的坐标，变换到参考坐标系OXYZ中去。图2.2所示为两个右手直角坐标系，即以OX，OY，OZ为坐标轴的OXYZ坐标系和以OU，OV，OW为坐标轴的OUVW坐标系。OXYZ坐标系固定在三维空间中并作为参考坐标系。OUVW坐标系将相对于参考坐标系转动。事实上，OUVW坐标系可以看作为附体坐标系。也就是说它始终而且是很适当地附着在刚体上(例

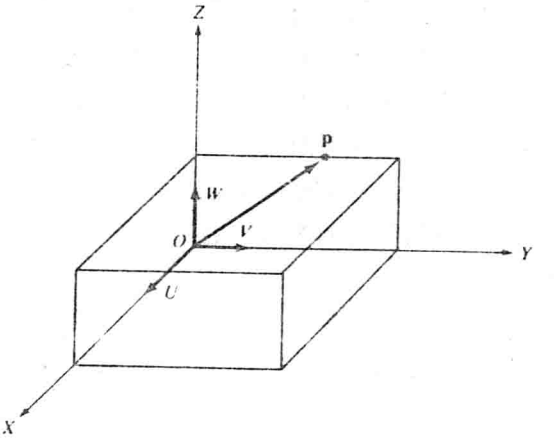


图2.2 参考坐标系和附体坐标系

* 向量用小写字母表示，矩阵用大写字母表示。

如一架飞机或机器人的一个杆臂），并随之一起运动。设（$\mathbf{i}_x$，$\mathbf{j}_y$，$\mathbf{k}_z$）和（$\mathbf{i}_u$，$\mathbf{j}_v$，$\mathbf{k}_w$）分别是沿着OXYZ和OUVW坐标系中各相应坐标轴的单位向量。空间中的一点p就可用它相对于这两个坐标系的坐标来表示。为了易于讨论，我们假定p相对于OUVW坐标系是固定的。于是点p可由它相对于OUVW和OXYZ坐标系的坐标分别表示为

$$\mathbf{p}_{uvw} = (p_u, p_v, p_w)^T \quad \text{and} \quad \mathbf{p}_{xyz} = (p_x, p_y, p_z)^T \tag{2.2-1}$$

式中$\mathbf{p}_{uvw}$和$\mathbf{p}_{xyz}$表示相对于不同坐标系的同一个点p。角标T表示矩阵的转置。

在OUVW坐标系转动以后，我们需要找到一个3×3的变换矩阵R，它可把$\mathbf{p}_{uvw}$的坐标，变换到用OXYZ坐标系的坐标来表示。也就是说

$$\mathbf{p}_{xyz} = \mathbf{R}\mathbf{p}_{uvw} \tag{2.2-2}$$

需要注意的是点$\mathbf{p}_{uvw}$已经随OUVW坐标系一起作了转动。

根据向量分量的定义，可得

$$\mathbf{p}_{uvw} = p_u\mathbf{i}_u + p_v\mathbf{j}_v + p_w\mathbf{k}_w \tag{2.2-3}$$

式中p_x，p_y和p_z表示p分别沿OX，OY和OZ轴的投影。利用数性积的定义和式（2.2-3）可得

$$\begin{aligned} p_x &= \mathbf{i}_x\cdot\mathbf{p} = \mathbf{i}_x\cdot\mathbf{i}_u p_u + \mathbf{i}_x\cdot\mathbf{j}_v p_v + \mathbf{i}_x\cdot\mathbf{k}_w p_w \\ p_y &= \mathbf{j}_y\cdot\mathbf{p} = \mathbf{j}_y\cdot\mathbf{i}_u p_u + \mathbf{j}_y\cdot\mathbf{j}_v p_v + \mathbf{j}_y\cdot\mathbf{k}_w p_w \\ p_z &= \mathbf{k}_z\cdot\mathbf{p} = \mathbf{k}_z\cdot\mathbf{i}_u p_u + \mathbf{k}_z\cdot\mathbf{j}_v p_v + \mathbf{k}_z\cdot\mathbf{k}_w p_w \end{aligned} \tag{2.2-4}$$

如以矩阵形式表示，则为

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x\cdot\mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x\cdot\mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x\cdot\mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y\cdot\mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y\cdot\mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y\cdot\mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z\cdot\mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z\cdot\mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z\cdot\mathbf{k}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} \tag{2.2-5}$$

与式（2.2-2）相比较，则该式中R可表示为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x\cdot\mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x\cdot\mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x\cdot\mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y\cdot\mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y\cdot\mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y\cdot\mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z\cdot\mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z\cdot\mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z\cdot\mathbf{k}_w \end{bmatrix} \tag{2.2-6}$$

与此相似，也可从$\mathbf{p}_{xyz}$的坐标求得$\mathbf{p}_{uvw}$的坐标：

$$\mathbf{p}_{uvw} = \mathbf{Q}\mathbf{p}_{xyz} \tag{2.2-7}$$

或为

$$\begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_u\cdot\mathbf{i}_x & \mathbf{i}_u\cdot\mathbf{j}_y & \mathbf{i}_u\cdot\mathbf{k}_z \\ \mathbf{j}_v\cdot\mathbf{i}_x & \mathbf{j}_v\cdot\mathbf{j}_y & \mathbf{j}_v\cdot\mathbf{k}_z \\ \mathbf{k}_w\cdot\mathbf{i}_x & \mathbf{k}_w\cdot\mathbf{j}_y & \mathbf{k}_w\cdot\mathbf{k}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \tag{2.2-8}$$

因为点积是可以交换的，故从式（2.2-6）到式（2.2-8）可以看出

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{T} \tag{2.2-9}$$

$$\mathbf{QR} = \mathbf{R}^{T}\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{I}_3 \tag{2.2-10}$$

式中 $\mathbf{I}_3$ 是一个 3 × 3 的单位矩阵。式（2。2－2）或（2。2－7）所表示的变换称为正交变换，又因为点积中的向量全都是单位向量，故也称为正则正交变换。

推演上述变换矩阵的主要目的是求出转动矩阵，它可描述OUVW坐标系绕参考坐标系OXYZ的三个坐标轴的转动。如果OUVW坐标系绕OX轴转动α角而到达空间某一新位置，那末相对于坐标系OUVW的，坐标为 $(p_u, p_v, p_w)^T$ 的点 p_{uvw}，此时相对于参考坐标系OXYZ的坐标 $(p_x, p_y, p_z)^T$ 就和以前不同了。与此有关的变换矩阵 $\mathbf{R}_{x,\alpha}$ 称之为绕OX轴转动α角的转动矩阵。由上述变换矩阵的概念可推导出 $\mathbf{R}_{x,\alpha}$，即

$$\mathbf{p}_{xyz} = \mathbf{R}_{x,\alpha}\,\mathbf{p}_{uvw} \tag{2.2-11}$$

考虑到 $\mathbf{i}_x \equiv \mathbf{i}_u$，则

$$\mathbf{R}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x\cdot\mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x\cdot\mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x\cdot\mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y\cdot\mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y\cdot\mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y\cdot\mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z\cdot\mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z\cdot\mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z\cdot\mathbf{k}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{2.2-12}$$

用相似的方法，可以求出绕OY轴转∅角的 3 × 3 转动矩阵和绕OZ轴转θ角的 3 × 3 转动矩阵，即（见图 2。3）：

$$\mathbf{R}_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2-13}$$

矩阵 $\mathbf{R}_{x,\alpha}$，$\mathbf{R}_{y,\phi}$ 和 $\mathbf{R}_{z,\theta}$ 称之为基本转动矩阵。其他表示有限转动的变换矩阵都可以从这些矩阵推导出来。

