小学数学

竞赛指导

主编 于长青 路 芬 张 真

哈尔滨地图出版社

小学数学竞赛指导

XIAOXUE SHUXUE JINGSAI ZHIDAO

主编　于长青　路　芬　张　真

哈尔滨地图出版社
·哈尔滨·

图书在版编目(CIP)数据

小学数学竞赛指导/于长青,路芬,张真主编.—哈尔滨:哈尔滨地图出版社,2005.12
ISBN 7-80717-209-6

Ⅰ.小... Ⅱ.①于...②路...③张... Ⅲ.数学课-小学-解题 Ⅳ.G624.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 146871 号

哈尔滨地图出版社出版、发行
(地址:哈尔滨市南岗区测绘路 2 号　邮编:150086)
哈尔滨庆大印刷厂印刷
开本:787 mm×1 092 mm　1/16　印张:10.375　字数:260 千字
2005 年 12 月第 1 版　2005 年 12 月第 1 次印刷
印数:1～1 000　定价:25.00 元

前　言

人类社会的文明是不断发展的，数学好比其中一棵富有生命力的智慧树，她随着人类社会文明的兴衰而荣枯。千百年来，虽几经沧桑，但在数学家们的辛勤培育下，她已成长为一棵枝繁叶茂、硕果累累的参天大树，成为人类文明的重要组成部分。

自 1894 年匈牙利首次举行数学竞赛以来，距今已有 100 多年了。国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad 简称 IMO)自 1959 年开办，至今为止已举办了 45 届，每年都有五六十个国家和地区参加，中国选手已多次在 TMO 中荣获世界第一。

数学竞赛之所以受到各国的普遍重视，是由于数学竞赛已是当代数学教育研究的重要课题之一，是发现与培养人才的一条有效途径。

数学奥林匹克的教学，强调对学生的思维能力进行多方位的训练，习惯于直接思维的学生，在接受了数学奥林匹克的训练后，其间接思想和塑向思维的能力也会有很大的提高，可以肯定地说，凡是参加过数学奥林匹克学习的学生，不管他是否在各类数学竞赛中获过奖，他们的思维能力、分析问题与解决问题的能力都会有显著提高。

既然学习数学奥林匹克的重要性如此的明显，各类数学竞赛书也就大量地涌现在读者面前，那么，怎样选择呢？书名乃大同小异，内容也多有雷同。于是，从中选出有代表性，有特色的书来，就成为读者的当务之急。

本书在体裁安排上力求务实、高效，使读者能用较短的时间获得较高的学习成绩，同时本书偏重于开拓解题思路和解题技巧，使读者通过本书的学习和训练，找到规律性的东西，从而达到举一反三的目的，并进而提高其整体素质。

我们在编写本书的过程中借阅了大量的资料，谨在此对那些给予我们帮助的书的作者一并表示感谢！由于时间匆忙，书中难免有不妥之处，恳请在使用过程中给我们提出宝贵意见。

作　者

2005 年 12 月

目　录

第一章　数学竞赛概述

第一节　数学竞赛的教育价值

一、数学竞赛的由来和发展

数学竞赛是一种数学教育活动。它的出现虽然只有一百多年的历史,但在国内外掀起的热潮却风起云涌,方兴未艾。

1886年,法国举行了最早的一次数学解题竞赛。以后,这种竞赛也相继在匈牙利、罗马尼亚、挪威等国举行。1959年,罗马尼亚数理学会首先发出创议,在布加勒斯特举行第一届"国际数学奥林匹克",简称IMO,这就是"国际中学生数学奥林匹克"。以后,每年举行一次。由于这种国际性的竞赛活动为各国表现本民族的聪明才智提供了舞台,所以得到了越来越多的国家的重视。1959年第1届IMO只有东欧七国的54名选手参加,到2003年在东京举行的第44届IMO时,参加的国家或地区的代表队增加到82支,参赛选手达457人。

为什么这种"数学解题竞赛"被称为"数学奥林匹克"呢?

Olympiad是希腊的一个地名,古希腊人常在这里举行体育竞技。1894年国际体育大会决定:把世界性的综合性运动会叫做"奥林匹克运动会"。这是力量、灵活与美的竞赛。数学是"思维的体操",数学竞赛与体育比赛在精神上有着相通之处,因而解数学难题的竞赛被称之为"数学奥林匹克"。

我国的数学竞赛活动开始于1956年,当时,在国家提出"向科学进军"的背景下,在华罗庚等最有威望的数学家的倡导下,经过上级批准,在北京、上海、天津、武汉四大城市开始举办省、市一级的高中三年级学生的数学竞赛。在这次活动中,华罗庚等老一辈数学家亲自参加科普讲演和命题工作,社会影响巨大。对于提高青少年学习数学的兴趣,立志献身数学研究或其他科学技术,产生了深远的影响。这样的数学竞赛和科普活动,在1962年又举行了一次。

经过十多年的停顿,1978年,在彻底否定文化大革命、拨乱反正、正本清源的背景下,开始举办全国性高中学生的数学竞赛,1983年开始举行全国性初中数学竞赛。1986年为纪念华罗庚教授逝世一周年,举行了首届"华罗庚金杯"少年数学邀请赛,全国有150多万小学生参加了预赛,2万多学生参加了复赛,69人参加了决赛,拉开了我国小学数学竞赛的序幕。

1989年在第30届IMO上,我国选手取得的总分第一的好成绩,极大地激发了我国人民的民族自豪感和广大中小学生学习数学和参加数学竞赛的兴趣。为了协调好小学、初中、高中这三个层次的数学竞赛的关系,中国数学会普及工作委员会决定:从1991年开始每年举办一次"全国小学数学奥林匹克"竞赛。并且规定:要把它办成"大众化"、"普及型"的活动。试题"不超前、不超纲",并且都有小学生能看懂的算术解法。这样,就使我国的小学数学竞赛得以纳入规范化的轨道。

由于热心于数学普及和数学竞赛活动的数学工作者和广大数学教师的共同努力,我国各级数学竞赛的水平迅速提高;参加IMO的代表队取得的成绩越来越使世人瞩目。1985年我国首次派代表参加了第26届IMO。1986年在第27届IMO上,我国代表队取得了总分第四的好成绩。在1989年第30届IMO中,我国代表队获总分第一。至今一直名列前茅。这些辉

煌成果的取得，首功应归广大中、小学教师，以及一些有志于数学普及工作的同志。他们不计个人得失，乐于奉献，主动工作，面对艰苦的物质条件，坚持长期努力，使我国的数学奥林匹克事业，跨入了世界强国的行列(表1-1)。

表1-1　我国在国际数学奥林匹克(IMO)中取得的成绩

届	年	总　分	名　次	金牌	银牌	铜牌	备　　注
26	1985		16	0	0	1	
27	1986	177.5	4	3	1	1	美国、前苏联总分203
28	1987	200	2	2	2	2	罗马尼亚总分250
29	1988	201	2	2	3	1	前苏联总分217
30	1989	237	1	4	2	0	罗马尼亚第一
31	1990	228	1	5	1	0	前苏联第二
32	1991	232	2	4	2	0	前苏联第一
33	1992	240	1	6	0	0	美国第二
34	1993	215	1	6	0	0	德国第二
35	1994	229	2	3	3	0	美国第一
36	1995	236	1	4	2	0	罗马尼亚第二
37	1996	160	6	3	2	1	罗马尼亚第一、美国第二
38	1997	223	1	6	0	0	匈牙利第二
39	1998	中国未参加					伊朗第一、保加利亚第二
40	1999	182	1	4	2	0	俄罗斯并列第一
41	2000	218	1	6	0	0	俄罗斯第二、美国第三
42	2001	225	1	6	0	0	俄罗斯、美国并列第二
43	2002	212	1	6	0	0	俄罗斯第二、美国第三
44	2003	211	2	5	1	0	保加利亚第一

为了使数学竞赛活动健康地发展和进一步规范化，在1990年11月召开的“中国数学会第六次普及工作会议”上提出了“继往开来，长盛不衰”的奋斗目标，制定了“数学竞赛大纲(草案)”。

1992年3月召开的“中国数学会第七次普及工作会议”通过了制定的“数学竞赛大纲”认为：在我国已经成为世界数学奥林匹克强国的形势下，要着眼于普及，着眼于提高大多数学生学习数学的兴趣，使学有余力的学生能更好地发展他们的运算能力、逻辑思维能力、空间想像能力、分析问题和解决问题的能力、独立思考和自学能力。逐步学会分析、综合、归纳、演绎、抽象、概括、类比等数学思想方法，成为一代有探索和创新精神的科学人才。

二、数学竞赛的教育价值

实践证明：作为一种数学教育活动的数学竞赛，对于推进教学改革和提高教学质量，有着多方面的重要作用，是其他学科教学难以取代的。主要有以下几点：

1.强化数学教育功能，突出能力培养的教学导向。

数学竞赛活动能巩固和扩大学生所学的知识：拓宽解题思路，促进思维能力的发展，培养探索精神和创造才能；促使更多的学生爱好数学，从而促进数学教学质量的提高。

例如，在学科教学中，有关四则运算的习题，大多是根据相应的法则就能算出得数的题目。但数学竞赛中的这类题就不是单纯按法则操作就能解决的。有的需要先找到题目里隐含的某些简便计算的窍门，有的需要巧妙地综合题目提供的各种信息进行逻辑推理。虽然也需要运用计算法则，但解决问题主要不是靠法则的运用。

【例1】 计算　$0.625\times(1\frac{2}{3}+3\frac{1}{6})+\frac{1}{6}\div1\frac{3}{5}-\frac{5}{8}$

【分析】 用简便方法计算这道题，需要先发现：加、减的几个数中都含有因数$\frac{5}{8}$，即0.625。

解　原式$=\frac{5}{8}\times(1\frac{2}{3}+3\frac{1}{6})+\frac{1}{6}\times\frac{5}{8}-\frac{5}{8}$

$=\frac{5}{8}\times(2\frac{2}{3}+3\frac{1}{6}-1)$

$=\frac{5}{8}\times4$

$=2\frac{1}{2}$

【例 2】　将下列算式中的汉字换成数字，要求相同的汉字换成相同的数字，不同的汉字换成不同的数字，并且等式成立。

$$\begin{array}{r} \text{青山绿水} \\ \times\quad\quad 9 \\ \hline \text{水绿山青} \end{array}$$

解　(1)因为“青”≥1，所以“水”≥9。只能是“水”=9，“青”=1。

$$\begin{array}{r} 1\,\text{山绿}\,9 \\ \times\quad\quad 9 \\ \hline 9\,\text{绿山}\,1 \end{array}$$

(2)如果“山”≥1，则“绿”≥9，乘数 9 乘十位后，再乘百位上的数时，必有向千位的进位。矛盾。所以“山”=0，“绿”×9 时，积的末位是 2，所以“绿”=8。结果是

$$\begin{array}{r} 1\;0\;8\;9 \\ \times\quad\quad 9 \\ \hline 9\;8\;0\;1 \end{array}$$

在这里，不但要考察被乘数各位上的数与乘数相乘的情况，而且要考察向相邻高位的进位。并且一般从最高位或最低位的考察入手。

【例 3】　设 O 代表 2，S 代表 3，并且相同的字母代表相同的数字，不同的字母代表不同的数字。那么，在下面的算式中，其他字母各代表什么数字？

$$\begin{array}{r} C\,R\,O\,S\,S \\ +\;R\,O\,A\,D\,S \\ \hline D\,A\,N\,G\,E\,R \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(十字路口)} \\ \\ \text{(危险)} \end{array}$$

【分析】　处理这道加法题，同样要从最高位或最低位入手。研究每一位上的运算和相邻数位间的进位关系，逐步由已知推出未知。难点是如何确定 A 代表的数字。

参照下面的程序框图(图 1-1)，即可依次确定算式中的各个字母所代表的数字。

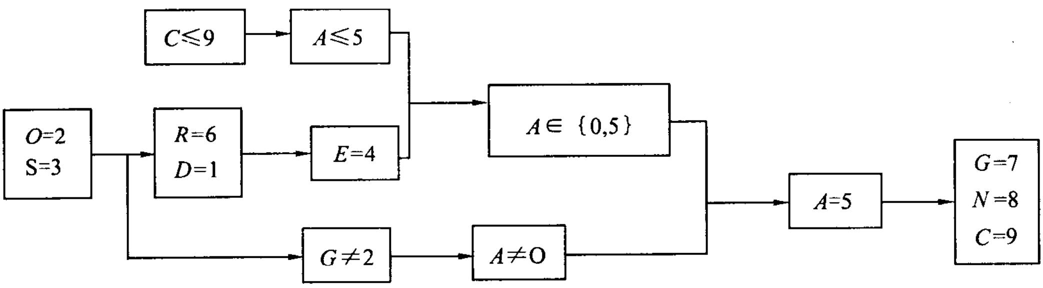

图 1-1

2. 促进教师的知识更新，推动数学教育改革。

数学竞赛活动的广泛开展，使教师逐步明确：什么样的教学教育才被认为是高水平的。从而促进数学方法论的研究，推动课程、教材、教法改革的探索。

许多竞赛题涉及数论、图论、向量、矩阵、多项式、函数方程以及组合数学等，来源于高等数学的思想。但它的解法完全是初等的。有些竞赛题表面上看不像"数学题"，用不了多少数学知识和工具。但解答它需要敏锐的数学思考、深刻的数学分析和独特的数学构思。

3. 早期发现和重点培养有潜力的青少年，实行因材施教和智力的早期开发。

数学竞赛是一项建立在兴趣与爱好基础上的课外活动，是因材施教的一种方式，让喜欢科学、喜欢钻研的学生参加这项活动，有助于他们掌握正确的思想方法，提高研究能力、知识水平、心理素质和合作精神，从而终身受益。科学史表明：大科学家往往在青少年时期就崭露头角。其重要标志之一就是具有优异的数学才能。而数学才能又是其他许多专业才能的基础。

4. 题型新颖，是高等数学的深刻思想与初等数学的高度技巧相结合的产物。有助于提高学生敏锐的直觉、洞察力和解题技巧。

数学竞赛中的不少试题，接近数学研究工作的前沿。中国数学会普及工作委员会在 1983 年研究全国高中数学联赛的命题方向时，确定了"在普及的基础上不断提高"的方针。并规定"联赛的命题范围不超出现行教学大纲"。1988 年决定：全国高中联赛的一试试题应该是"高考"水平的。但决赛试题不能不以 IMO 的试题为准，在 1998 年召开的第十次全国数学普及工作会议商定：根据全面实施素质教育、减轻学生过重负担的要求，全国高中数学联赛一试的试卷包括 6 道选择题、6 道填空题和 3 道解答题。满分 150 分。其中考查"双基"的、较容易的试题占 60 分，考查综合运用能力的、中等难度的试题占 60 分，考查灵活运用能力的、较难的试题占 30 分。二试自愿参加。试卷包括 3 道解答题，其中有一道平面几何试题。满分 150 分。

【例 4】 已知：正整数 a,b 能使 $ab+1$ 整除 a^2+b^2，

求证：$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=k$ 是某个正整数的平方。

证明 (1)所以 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=k\Rightarrow a^2+b^2=kab+k$

所以"正整数 a,b 能使 $ab+1$ 整除 a^2+b^2，除得的商是正整数 k"就是"方程 $x^2+y^2=kxy+k$ 有正整数解 a,b，其中 k 是正整数"。

(2)其次证明：如果方程 $x^2+y^2=kxy+k$ 有正整数解 a,b，那么

$$\begin{cases}a_1=a\\b_1=ka-b\end{cases}\qquad 以及\begin{cases}a_2=kb-a\\b_2=b\end{cases}$$

也是这个方程的(非负)整数解。

事实上，根据"$a^2+b^2=kab+k$"可以推出：

$$\begin{aligned}a_1^2+b_1^2&=a^2+(ka-b)^2\\&=(a^2+b^2)+k^2a^2-2kab\\&=kab+k+k^2a^2-2kab\\&=k^2a^2-kab+k\\&=ka(ka-b)+k\\&=ka_1b_1+k\end{aligned}$$

$$a_2^2+b_2^2=(kb-a)^2+b^2$$

$$
\begin{aligned}
&=(a^2+b^2)+k^2b^2-2kab\\
&=kab+k+k^2b^2-2kab\\
&=k^2b^2-kab+k\\
&=kb(kb-a)+k\\
&=ka_2b_2+k
\end{aligned}
$$

(3)用反证法证明“$b_1<b$ 或 $a_2<a$”,即“$ka-b<b$ 或 $kb-a<a$”。

假设“$ka-b\geqslant b$ 并且 $kb-a\geqslant a$”,则

$$
\left.\begin{aligned}
&ka-b\geqslant b\Rightarrow ka\geqslant 2b\Rightarrow \frac{k}{2}\geqslant\frac{b}{a}\\
&ka-a\geqslant a\Rightarrow kb\geqslant 2a\Rightarrow \frac{k}{2}\geqslant\frac{a}{b}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow k\geqslant\frac{b}{a}+\frac{a}{b}
$$

而另一方面,

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2+b^2}{ab+1}&\Rightarrow a^2+b^2=kab+k\\
&\Rightarrow kab<a^2+b^2\\
&\Rightarrow k<\frac{b}{a}+\frac{a}{b}
\end{aligned}
$$

矛盾。

在以下的证明中,假设 $k\neq 1$,即 $k\geqslant 2$。因为 $k=1$ 时,$k=1=1^2$,本题求证的结论自然成立。

$$
\left.\begin{aligned}
&k\geqslant 2\\
&k<\frac{b}{a}+\frac{a}{b}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2\Rightarrow a\neq b\Rightarrow a<b \text{ 或 } a>b
$$

(4)证明:“当 $a<b$ 时,$ka-b\geqslant 0$”;“当 $a>b$ 时,$kb-a\geqslant 0$”。

①当 $a<b$ 时:因为 $k\geqslant 2$,

所以 $\left.\begin{aligned}&kb-a\geqslant 2b-a>2b-b=b>a\\&kb-a<a \text{ 或 } ka-b<b\end{aligned}\right\}\Rightarrow ka-b<b$

因为 $\left.\begin{aligned}&\frac{b}{a}\leqslant b\\&\frac{a}{b}\leqslant a\end{aligned}\right\}\Rightarrow k<\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leqslant a+b\leqslant a^2+b$

$$\Rightarrow a^2+b-k>0$$

所以$(ka-b+1)b=kab-b^2+b$

$$
\begin{aligned}
&=kab+k-k-b^2+b\\
&=a^2+b^2-k-b^2+b\\
&\left.\begin{aligned}&=a^2-k+b>0\\&\qquad\qquad b>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow ka-b+1>0\\
&\qquad\qquad\qquad\Rightarrow ka-b+1\geqslant 1\\
&\qquad\qquad\qquad\Rightarrow ka-b\geqslant 0
\end{aligned}
$$

②同样可证:当 $a>b$ 时,$kb-a\geqslant 0$。

(5)以上证明了:当正整数 a,b 是方程

$$x^2+y^2=kxy+k \quad (k\in N, k\geqslant 2)$$

的解时,如果 $a<b$,则

$$\begin{cases}a_1=a\\ b_1=ka-b\end{cases} \quad (0\leqslant ka-b<b)$$

也是这个方程的非负整数解。如果 $a>b$,则

$$\begin{cases}a_2=kb-a\\ b_2=b\end{cases} \quad (0\leqslant kb-a<a)$$

也是这个方程的非负整数解。这就是说,我们可以将 a,b 中较小的数不变,将较大的数换成另一个比它小的非负整数,使它们仍然是这个方程的解。

将一个非负整数换成另一个比它小的非负整数,经过若干次这样的变换,必然得出数 0,即

$$\frac{a_n^2+b_n^2}{1+a_n+b_n}=k$$

中的 a_n,b_n 有一个为零,所以 k 是自然数的平方。证完。

这道出现在 1988 年第 29 届 IMO 中的竞赛题是以往各届 IMO 中最难的一道题。当时,澳大利亚 4 位水平最高的数论专家,花了一整天仍然没有解决这道题。但 268 名选手中有 11 人解出了这道题,包括我国获得满分的选手何宏宇。据说,没有哪一届 IMO 的哪一道题难倒过所有的选手,但却难倒了许多数学家和教练。

有些数学竞赛试题是数学家近期研究成果的副产品,难度大,并富于新意。由于竞赛题的命题人刻意创新,所以多数题的解答没有常规的思维模式可套,没有现成的解题思路可循。而需要整体上的洞察力、敏锐的直觉、灵活的数学机智和独创的解题技巧。要求人们探索、研究、发现和发挥高度的创造性。参赛选手在解答某些试题中表现出来的机智甚至超出了命题人的预料。

【例 5】 在一个圆周上有 10 个点,把圆周分成 10 段互不包含的弧。其中 6 点染成红色,4 点染成白色。规定:两端都是红色点的弧标上 4;两端都是白色点的弧标上 $\frac{1}{4}$;一端为红色点,另一端为白色点的弧标上 1(图 1-2(1))。

求证:所有这些数的乘积与红点、白点的不同分布无关。并且求出这个乘积。

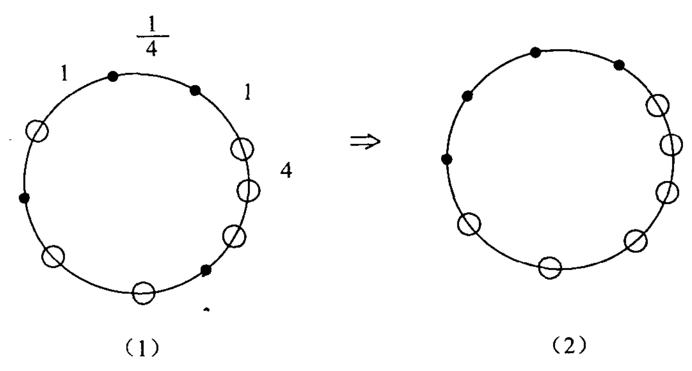

图 1-2

【分析 1】 (用变换的思想)先分四种情况证明:交换相邻的红点和白点,乘积不变。通过

这种交换，我们总可以使红点中另有两点与白点相邻(图 1－2(2))。

因此，所求的乘积为 $4^{6-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{4-1}\cdot 1^2=16$。

【分析 2】 (用对应的思想)设想红点对应于 2，白点对应于$\frac{1}{2}$。每段孤标记的数就是它两端对应的数的乘积。因此，不论红点与白点的分布情况如何，这十段弧上所标的数的乘积均为 $\left[2^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^2=16$。

实践证明：学生是否参加过数学竞赛的培训，将在思维能力上表现出明显的差异，由于数学竞赛题型新颖，叙述的趣味性与技巧的独创性相结合，显示了真与美的统一，深受学生的欢迎。

【例 6】 李白无事街上走，手中提壶去买酒。遇店加一倍，见花喝一斗。三遇店和花，喝光壶中酒。试问壶中原有多少酒？

【分析 1】 (用代数方法)

$$[(x\cdot 2-1)\cdot 2-1]\cdot 2-1=0$$

【分析 2】 (用逆推法)如图 1－3 所示。

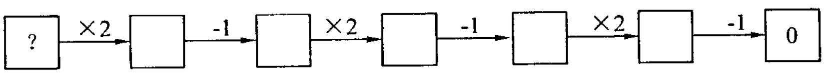

图 1－3

仔细品味一道构思巧妙的竞赛题或其解答，无异于读一篇诗，听一支歌，看一部电影，获得艺术上的享受，如果说“数学是思维的体操”，那么，数学竞赛就是“思维的体操”，这是一种高品味的、高智力水平的艺术。

第二节　小学数学竞赛的组织

小学数学竞赛可以在不同的级别进行，它可以是单项比赛，也可以是综合性比赛。在一个班级内举行的单项比赛(如速算比赛、应用题比赛等)，机动灵活，可配合课堂教学的内容，而且能吸引多数(甚至全体)学生参加。下面主要说明数学竞赛的组织工作。

一、竞赛前的准备

在举行数学竞赛前，先要做好下列各项工作：

1. 成立竞赛组织委员会或专门工作组；
2. 确定竞赛的日期、项目、内容、比赛方法和奖励办法，并列入学校的学期计划；
3. 宣传竞赛的意义和要求，内容和办法；
4. 举办专题讲座，印发《问题集》，组织培训活动，介绍课外读物等；
5. 委派命题人员，收集资料，编拟竞赛试题；
6. 批阅学生的问题解答，举行问题解答会，由教师讲述解题的理论、策略和技巧，或者由学生介绍解题经验；
7. 对竞赛选手给予临场指导：(图 1－4)

二、竞赛中的工作

单项比赛一般只赛 1 次，综合性竞赛往往要赛 2～3 次(预赛、复赛、决赛：或预赛、决赛)，

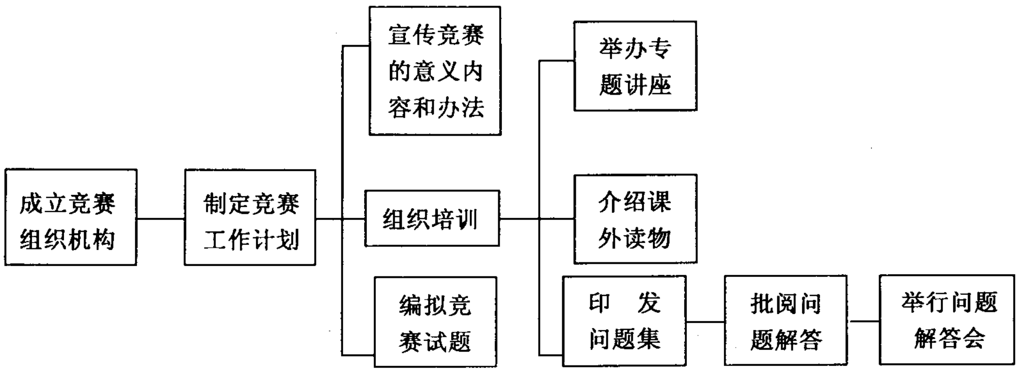

图 1－4

工作程序大致如下：

1．举行预赛。在动员的基础上让学生自愿报名。组织培训，在培训的基础上比赛。学校举行的综合性竞赛，可用期中或期末考试作为预赛。

2．公布预赛试题解答（并由教师对预赛情况评讲、小结），发放复赛许可证。

3．举行复赛。动员有复赛许可证的学生都参加。

4．公布复赛试题解答，发放决赛许可证。

5．举行决赛。

6．公布决赛试题解答和优胜名单。

7．召开大会，颁发优胜证书和奖品（图 1－5）。

预赛、复赛、决赛的间隔可为 2～3 周，参加的人数大致按 100:10:1 掌握，并且应参照比赛的人数和考分的自然分布，在适当的和比较稀疏处划分数线。

获奖人数大致为决赛人数的 20％～50％。对参加决赛的其他学生，可发给纪念奖。

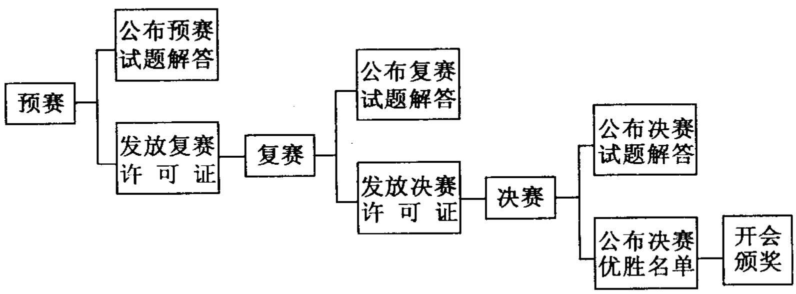

图 1－5

三、竞赛后的工作

1．对于学生在竞赛试题的答卷中反映出来的知识缺陷和能力问题，应仔细分析，认真评讲。

2．帮助优胜的学生总结自己的学习经验，研究自己的学习方法、学习思想、学习态度和学习习惯，在颁奖大会或主题班会上发言，借助生动的典型事例和高而可攀的榜样，影响其他同非智力因素的优化。

3．教师可根据正反两方面的反馈信息，检查自己的教学工作、竞赛组织工作和选手培训工作，分析教育思想和教学方法，找出教学中的薄弱环节，研究改进的措施。

小学数学单项比赛一般只赛一次。如速算比赛,低年级主要是赛基本口算,比正确、迅速,看谁在规定的时间内算对的题最多;中高年级在比速度的基础上,主要比合理、灵活,看谁能合理地利用运算定律、运算性质和各种技巧,进行简便计算。

第三节　竞赛选手的选拔和培训

竞赛选手的培训是数学竞赛准备工作中最重要的一项工作。如果是准备参加上一级的竞赛,那么学校的工作主要是竞赛选手的选拔和培训。

一、竞赛选手的选拔

竞赛选手的选拔,应该在自愿报名的基础上,严格按事先公布的程序和量化的标准公正地进行。

对于落选的学生,要鼓励他们再接再励,迎头赶上,并欢迎他们参加针对入选同学开展的部分培训活动。

二、竞赛选手的培训

对于入选学生的培训要注意以下几点:

1. 满足他们的求知欲,提高他们学习数学的兴趣和积极性,适当扩大他们的知识眼界,进一步培养他们的思维能力和数学才能。

为此,不能只进行解题训练,要给他们举办一些有趣的、通俗的专题讲座,指导他们看一些有关的课外读物。

2. 培训题的编选应有明显的梯度和较大的跨度,注意从较低的起点出发,逐步提高难度、综合性和技巧性;注意渗透数学思想方法,逐步开拓学生的解题思路。题目的内容要能引起深入的讨论和思考。

3. 引导学生正确处理解题的规范性与创造性的关系。在训练中,对于解题的书写格式提出明确的要求是必要的,但学生掌握解题格式后,就应该放手让他们随机应变,灵活处理,根据题目的具体特点寻求简捷的解题思路和巧妙的解题方法。防止因循守旧,不敢创新,从而培养学生良好的思维品德。

4. 逐步培养学生用抽象的数学观点看问题、想问题和处理问题。

5. 结合培训,进行思想品德教育。如勤学苦练、谦虚谨慎、胜不骄、败不馁等。使学生认识到:数学既有趣,又有用。数学修养是未来一切行业的工作人员都必须具备的。掌握数学,需要经过一番艰苦的努力。在竞赛中,可能获胜,也可能失败。但胜败并不重要,重要的是掌握数学知识,提高数学修养,学会科学的思想方法,从而终生受益。

第四节　小学数学竞赛题的特点和命题原则

一、小学数学竞赛题的特点

小学数学竞赛试题,尤其是决赛试题,应力求具备以下特点:

1. 涉及的知识,一般限制在学科课程内容的范围内,超出学科课程的少数知识,应包含在专题讲座中。

2. 着重考查学生分析问题的能力和综合运用数学知识解决问题的能力。考查学生思维的敏捷性和反应的灵活性。

3. 要有一定的难度与综合性，但难而不怪，高而可攀。初看起来似乎无从下手，一旦找到解题关键，就能迎刃而解，要防止试题过难，脱离教学实际，影响学生学习数学的兴趣、积极性和信心。

4. 构思巧妙，内容新颖，寓意深刻，形式活泼，思路宽阔，解法灵巧，并富有情趣和启发性，能让学生积极思考。

5. 竞赛不宜选用陈题，至少应予以改编的变化。

6. 试题必须正确无误，有确定的答案，并且必须有简单的算术解法。表达清晰，符合小学生的理解水平和语言习惯。

7. 各个试题应彼此独立，一道题的解答不应影响另一道题（蓄意安排的“递进式”题组除外）。

8. 试题应具有正确的思想性，并对小学生的思想品德教育有益。

二、小学数学竞赛试卷

综合性竞赛的试卷，应具有适当的难度和良好的区分度。

首先，其中要有一定数量的“基本题”，以考查基础知识和基本技能，这类题的难度与灵活性大致相当于学年升级考试中较难的试题。

其次，还要有一些探索性和技巧性较强的、要求综合运用多方面知识来解答的“综合题”，这类题大致相当于课本中的思考题，在升级考试中，通常只有个别试题达到这样的难度与综合性。

第三，为了使竞赛试卷具有良好的区分度，其中还应包括少数需要运用高技巧、机智和非常规思维才能解答的“研究题”，解答这类题，需要有相当强的探索能力和创造才能。

在各级竞赛的决赛试题中，上述三种试题的比例（在满分中所占的百分数）大致如下（表 1－2）：

表 1－2

所占的百分数＼试题 竞赛级别	基本题（%）	综合题（%）	研究题（%）
学　校	70～80	20～30	0～10
乡　镇	60～70	30～40	0～10
区　县	50～60	30～40	10～20
省、直辖市	40～50	30～40	20～30
省际联赛	30～40	30～40	30～40

试题的题型，除传统的回答题（简答题）、证明题、计算题、应用题和填空题外，还应该有选择题和判断题。问答题和证明题既能考查学生掌握数学知识的水平，也能考查学生灵活运用知识的能力、书面表达的能力、逻辑思维的严密性和数学语言的正确性等。但解答时，每次考试的题数少，知识的覆盖面窄，阅卷的工作量大，评分的客观性差。运用选择题和判断题，知识的覆盖面广，便于评分和统计，但不能考查学生的逻辑推理能力和数学语言的表达能力。选择题和判断题的另一缺点是可以借助非数学方法选择答案，从而影响成绩的准确性。

近年来，对培养“创新意识和实践能力”的关注，促使在小学数学竞赛中，添进了开放题、操作题和建模题，以及其他运用数学知识和方法来解决的实际问题。甚至有的地区，将“小学数学竞赛”、“小学数学奥林匹克”更名为“小学生探索与应用能力竞赛”。这些变化现在尚未影响这项教育活动的实质。

第二章 速　　算

利用运算规律，可以简化运算，达到既快又准的目的。

例如，计算下列算式：

(1)$66+47+34+53$；

(2)$352-174+248$；

(3)$25\times32\times125$；

(4)$35\ 000\div25$。

上面的四个算式，都非常简单，相信同学们都会计算出正确的答案。但是，你是怎么去算的呢？是否可以简化运算呢？

观察上述算式，发现第 1 题中 66 与 34，47 与 53 的和都是 100，第 2 题中 248 与 352 的和是 600，抓住这一特点，可以心算出这两题的结果分别为 200 与 426。根据 25 与 4，125 与 8 的积分别是整百、整千的数，可把第 3 题中 32 分解为 4 与 8 的积，原题变为$(25\times4)\times(8\times125)$；同样把第 4 题中 35 000 分解为 350 与 100 的积，原题变为 $350\times100\div25=350\times(100\div25)$。于是，就可以迅速得到第 3，4 两题的答案分别为 100 000 与 1 400。

【例 1】 计算下列各题：

(1)$52+88+48$；

(2)$321+679+27$；

(3)$1\ 234+5\ 678+8\ 766+4\ 322$。

【分析】 多看看题，观察后我们发现

$$52+48=100,321+679=1\ 000,$$
$$1\ 234+8\ 766=10\ 000,5\ 678+4\ 322=10\ 000。$$

如果两数的和恰好能凑成 10，100，1 000，…，那么，就把其中一个数叫做另一个数的补数，这两个数互为补数。

因此，我们就得到速算的一种方法：*在计算几个加数的和时，运用加法交换律、结合律，把互为补数的两数先相加，然后，再把所得和相加。*

解　(1)原式$=52+48+88=(52+48)+88$

$=100+88=188$；

(2)原式$=(321+679)+27=1\ 000+27=1\ 027$；

(3)原式$=(1\ 234+8\ 766)+(5\ 678+4\ 322)$

$=10\ 000+10\ 000=20\ 000$。

只要掌握下面的规律，就能迅速答出一个数的补数。

一个数的个位数字与它的补数的个位数字相加是 10，其他位的数字相加是 9。

例如，2 678 的补数，个位数字是 $10-8=2$，十位数字是 $9-7=2$，百位上的数字是 $9-6=3$，千位上的数字是 $9-2=7$，因此，数 2 678 的补数是 7 322。

【例 2】 计算下列各题：

(1)$65+75+36$；

(2)$9\ 998+3+99+998+3+9$；

(3)$199\ 999+19\ 999+1\ 999+199+19$。

【分析】 观察这组题的特点。与例 1 相比较，例 2 各题中没有给出互为补数的两个数，也就是一个加数不是另一个加数的补数，该怎样凑整呢？

试着把一个加数分解成两部分（或者添加一个数），使其中一部分（或者添加数）是另一个加数的补数，把互为补数的数先相加，所得和再参加下一步计算。这样，可以简捷地算出结果。

在此例中，看着 65，把 36 分解为 35 与 1 的和；看着 9 998，998，99，9，把两个 3 分解为 2 与 1 的和；看着 199 999，19 999，1 999，199，把 19 分解为 15 与四个 1 的和，或者看着199 999，19 999，1 999，199，19，添加五个 1。通过这样处理，就把例 2 转化为例 1 的形式。

解 (1)原式 $=65+75+35+1=(65+35)+(75+1)$

$=100+76=176$；

(2)原式 $=9\,998+2+1+99+998+2+1+9$

$=(9\,998+2)+(1+99)+(998+2)+(1+9)$

$=10\,000+1\,000+1\,000+10=11\,110$；

(3)原式 $=199\,999+19\,999+1\,999+199+15+1+1+1+1$

$=(199\,999+1)+(19\,999+1)+(1\,999+1)+(199+1)+15$

$=200\,000+20\,000+2\,000+200+15$

$=222\,215$。

(3)也可以如下计算：

原式 $=(199\,999+1)+(19\,999+1)+(1\,999+1)+(199+1)+(19+1)-5$

$=200\,000+20\,000+2\,000+200+20-5$

$=222\,200+(20-5)=222\,215$。

【例 3】 计算下列各题：

(1)$3\,932+2\,997$；

(2)$5\,947-2\,997$；

(3)$1\,238+2\,759-98-997$。

有了计算例 1、例 2 的经验，计算例 3 时，自然想到“凑整”：把加数或减数凑成整十、整百、整千的数与另一个数的和或差，然后，再运用运算定律进行计算。

解 (1)原式 $=3\,932+(3\,000-3)=6\,932-3=6\,929$；

(2)原式 $=5\,947-(3\,000-3)$

$=5\,947-3\,000+3$

$=2\,947+3=2\,950$；

(3)原式 $=1\,238+2\,759-100-1\,000+2+3$

$=(1\,238+3)+2\,759-100-1\,000+2$

$=1\,241+2\,759-100-1\,000+2$

$=4\,000-1\,000-100+2=2\,902$。

在做乘除运算时，凑整法同样有用，所不同的是把已知数适当结合或分解成积。

在考虑凑整时，记住一些特殊的积是有益的，例如，$2\times5=10$，$4\times25=100$，$8\times125=1\,000$，$625\times8=5\,000$，等等。

【例 4】 用简便方法计算：

(1)$4\times23\times25$；　　(2)96×125；

(3)$25\times32\times125$；　　(4)$75\,000\div125\div15$；

(5)$38\,600\div25$。