

2
145
算學叢書

古算法之新研究續編

許 蓀 舫 編

中華書局印行

民國三十一年十月初版
民國三十四年十月初版



分類號 419

算學叢書

古算法之新研究續編 (全一冊)

定價國幣三元六角

(郵運匯費另加)

編者 許 莚 舫

發行人 姚 戟 楣
中華書局有限公司代表

印刷者 中華書局永寧印刷廠
上海澳門路四六九號

發行處 各埠中華書局

序

溯自歐風東漸，潮流所趨，莫不醉心歐化，士之能捨西術而沉潛於國學者，日益寡矣。至如數理之學，我國古人初未嘗不殫精竭慮，發其微，抉其奧，以顯示於世；而今之治西算者，咸棄之如敝屣，不屑加以提倡，古人心血，逝如流水，良可慨也！

曩見日人三上義夫於其所著中國算學之特色一書中，提議稱近今習用之圓周率爲「祖率」，以其爲我國祖冲之所發見也。噫！余因此而有感焉：夫西人苟於學術有所發明，恆冠其名於發明物之首，以示紀念先哲之意，而表後人景仰之心，意至善法至良也；回顧國人，殊懵懵然忘其先賢創造之艱，今外人且越俎而代謀之，國人猶未能響應，麻木不仁，一至於此，余不禁爲古人痛哭而長歎息已。

考西算書中之畢達哥拉斯定理即我國周髀之句股弦定理也；巴斯加三角形即我國楊輝之乘方求廉圖也；和涅法即我國秦九韶之正負開方術也；希洛公式即我國秦氏之三斜求積法也，諸如此類，不一而足，其發見也，國人猶遠早於西人，其立術也，中法乃未遜於西法，由是言之，我國古算殊大足以煥耀於世，又何至湮沒而不彰哉？庸詎知今之算書，式必西碼，術必西名，其能介紹國算之智識者，實如鳳毛麟角，數典忘

祖，甘爲外人之學奴，其風會之所趨歟！抑人心之將死歟！

今有人焉，處於風會已成之後，而能保其潛修之行，孜孜兀兀，終日不倦，沉溺於古書堆中，究他人之所不屑究，言他人之所不屑言，其亦可謂能卓然自樹立者矣。許子蕤，從余遊有年矣，其爲人也，忠誠果敢，沉默寡言笑；其爲學也，不爲風尚所囿，尤能於古人所言，反覆推闡，不遺餘蘊。昔著古算法之新研究一書，曾索序於余，余自愧離羣索居，學術荒落，兼之簿書累累出入，日有數擔，退食之餘，輒昏然欲睡，致未能酬雅意。今者，許子又以該書續編見示，釐然秩然，內容猶勝初編，頗足以見好學深思之功，使他日治算者得此，因許子之思，而引起其研究之興趣，羣策羣力，發揚固有之國粹，爲民族爭光，則許子之功，豈淺鮮哉，是爲序。

民國二十五年五月蘅江秦沅序於財政部。

序 二

世嘗謂歐西科學勝於中國，其實中國開化最早，科學之一鱗半爪，略見於古書者，如黃帝之造指南車，周髀之言筮以寫天，墨子之說重學，光學（註一）可見三代以前，科學發明，已屬不少，固不獨淺人之所見河圖、洛書爲數理之原也。惟因歷代聖君賢相，常重道而輕藝，故自來發明家之著名者，寥落如晨星，蓋殫精研究而湮沒無聞者，不可勝數矣。以是歎科學之厄於昔而遜於西，其理由具在，觀於元李冶之測圓海鏡，爲天元一（註二）所自出，明代唐順（註三）諸名人不能識，必待遜清而始顯，蓋科學絕續之所係，匪一言所能盡矣。

許生蕓舫精研數理，能以西算闡揚古法，以余曾刊有海鏡一隅及江蘇官書局刊有割圓通解二書之故，持其所著書請序於余。嗚呼！悲夫痛哉！念遜清光緒二十年，江蘇學政龍湛霖提倡西學，選南菁書院高材生七人，立爲課長，並購置工程機器，延聘著名技師，擬在院後縣積穀倉開辦製造廠，以課長七人負其責而董其成。其時院中理學士承項戴鄒李（註四）諸公之後，人人皆能自奮，出新意以補西書之所未備，闡西書之所未言，每一題出，士各自抒心得，於成法外獨闢蹊徑，及今四十年來，苟能繼續猛進，何難凌駕西人而上之，更何強鄰之足

以亡我爲慮乎？惜乎瞿某承乏龍後，崇尚空談，摧殘實學，毀賣已裝之機器，辭退已延之技師，使向者人人屬望之名士，遂退而爲魯論所稱作者之七人。蓋余當時著海鏡一隅，割圓通解之時，豈復料四十年後之一老，仍不免目覩中國累卵之危乎？此可爲痛哭長歎息者也！

蕤舫之著是書，其有當於當日菁院諸名士之用心歟？吾意蕤舫知華人之智不弱於西人，故著有是書。然則世之閱是書者，其以是書爲中西競爭科學之導線則可，若但以是書爲考古之階梯，則恐非著書者之初衷，尤非序是書者之所忍道也。

次賢吳誠敘於錫城近聖居

(註一) 見墨子經說。

(註二) 天元一之術即今之代數學，立天元一者，即設未知數爲 X 也。如積求之者，即以表同數之二代數式相消成零也。

(註三) 明代大儒唐荆川顧箬溪二公互相推重，自謂得算學三昧，猶未識李氏之書。唐氏之說曰：「藝士著書，往往以祕其機爲奇，所謂立天元一云爾，如積求云爾，漫不省其爲何語。」顧氏則言：「細考測圓海鏡，如求城徑，即以二百四十爲天元；半徑，即以一百二十爲天元，既知其數，何用算爲，似不必立可也。」

(註四) 項名達、戴熙、鄒伯奇、李善蘭，皆清代之大算學家。

序 三

輒近以還，國人鑒夫歐西物質文明之驚人，競尚西學，末流所趨，視國學如敝屣，國未亡而文化行將先亡。一、二有識之士，蹙然憂之，以爲西學誠有足多者，然我國學術自有其光輝之歷史，去其糟粕，擷其精華，披沙儘可獲金，於是年來復有提倡國學之議。顧所謂國學者，要以讀經爲主，進而探求考據詞章義理之學；若作古算之研究，則絕無僅有焉。

夫數學亦我國學術之一，倡自黃帝時之隸首，厥後代有佳著，祇以歷代帝王大抵重尚儒經，而士大夫又喜攻詞章義理之學，迎合上權，博取利祿，致古算湮沒而不彰，迨宋明末葉，教士利瑪竇湯若望輩，挾西洋數學以進，初國人亦未加注目，近數十年來，歐西科學，一日千里，國家賴是而富強，而數學爲一切科學之基礎，於是國人加以重視，學校又各設數學一課，咸本西洋算法，以爲固創自西洋也。數典忘祖，洵可嘆矣！

澄江許蕤舫先生治數學有年，嘗於教授之餘暇，作古算之研究，運用西法，解析古理，已編著古算法之新研究一冊，付中華出版，說理明顯，得閱者權，近復編著續集，稿成，囑予序其端。予不文，於數學尤乏研究；顧蕤舫先生能於舉世所絕不重視之古算，獨悉心檢討，使國人知數理之學，吾國先西洋而發

明;而湮沒不彰之古算,得因之而重顯於今日,是不惟嘉惠於學子之參考,且大有功於振興國家之文化也.其學可佩,其志可嘉,爰樂而爲之序.

中華民國二十四年十二月 吳縣 林達祖 謹序.

編輯大意

(1)本書初編偏重平面圖形，續編則偏重立體圖形。惟說理仍極淺顯，習過初等平面幾何學者，亦不難澈底明瞭。

(2)九容之術，創自李冶；惟所立之法，每題僅一、二種。至清末吳鹹始推闡之，乃各得十法。吳先生今尚健在，即無錫名醫吳次公也。本書得力於其所著海鏡一隅者甚多，用誌數語，聊表謝忱。

(3)清黃宗憲發明求一別術，及用求一術解「加較」及「減較」二題，皆載求一術通解書中。又駱春池曾以求一術解百難題，茲以初編未暇論及，特補出之。

(4)初編論重差之術，僅及劉徽海島算經第一題；凡測高而欲兼知其遠者用之。今再詳述其餘八題，於是谷深、河廣、城垣、樓閣，皆可不用測量儀器而實測矣。

(5)句股術之變化，本書已詳述無遺。其公式悉用幾何方法證明，極錯綜變換之妙。或謂此章問題，用代數方法解之，不外乎二次方程式，又何必故弄玄虛，造成極繁複之公式哉？殊不知數學之效力，非僅使問題之解法簡易而已也，其能顯形與數之祕奧者，亦彌足珍貴。正與有代數方程式後，而四則難題之算術解法，仍未偏廢，同一理也。

(6)古時算經,以輯古爲最難,所述二十題,其解法皆以一、二行了之,閱者如墜五里霧中,一時莫得其解;故後世終乏知音也。今本書選出七題,以代數式及圖形反覆證明,俾學者知中國之三次方程式,於唐初固已有若是之成績矣。

(7)本書篇末附錄古算難題詳解一百問,採自各種算經。以其原題字句,別有風格,故悉錄原文,並註出處。其題意隱晦難明者,於詳解中加以解釋,學者細閱之,定能感無限之樂趣。

著者識

目 錄

序 一

序 二

序 三

編輯大意

第一章 九容術.....1

(1) 九容術之源流

(2) 句股容圓

(3) 句外容圓

(4) 弦外容圓

(5) 句上容圓

(6) 句外容圓半

(7) 弦內容圓弱半

(8) 弦上容圓

(9) 弦上句外容圓半

第二章 求一術之續.....41

(10) 求一術源流之續

(11) 求一術別法

(12) 用無定方程馭求一術

(13) 用求一術解百難題

(14) 求一術別題

第三章 重差術之續.....55

(15) 重差術源流之續

(16) 松生山上

(17) 南望方邑

(18) 俯視深谷

(19) 登山望樓

(20) 東南波口

(21) 清淵白石

(22) 登山望津

(23) 登山臨邑

第四章 少廣術之續.....69

(24) 少廣術源流之續

(25) 帶縱較數開立方方法

(26) 帶縱和數開立方方法

(27) 相併立方方法

(28) 相減立方方法

第五章 垛積術之續.....99

(29) 垛積術源流之續

(30) 正方垛積

(31) 長方垛積

(32) 三角垛積

(33) 六角垛積

第六章 句股術之續.....109

(34) 句股術源流之續

(35) 句與股弦較

(36) 句與股弦和

(37) 弦與句股較

(38) 弦與句股和

(39) 句弦較與股弦較

(40) 句弦和與股弦和

(41) 句弦和與句股和

(42) 句股和與弦較和

(43) 句弦和與弦和較

(44) 句弦和與弦較和

(45) 句股較與弦和和

(46) 句股較與弦和較

(47) 句弦較與弦和和

(48) 股弦較與弦較和

(49) 句股積與句

(50) 句股積與弦

(51) 句股積與句股較

- | | |
|-------------------|--------------|
| (52) 句股積與句弦較 | (53) 句股積與句股和 |
| (54) 句股積與句弦和 | (55) 句股積與弦和和 |
| (56) 句股積與弦和較 | (57) 句股積與弦較和 |
| (58) 句股積與弦較較 | (59) 句股形求中垂線 |
| (60) 求中垂線所分弦之二分 | |
| (61) 整數句股弦求法之圖形說明 | |
| (62) 句股容長方 | |

第七章 輯古術.....157

- | | |
|------------------|----------------|
| (63) 輯古術之源流 | (64) 三次正數方程式解法 |
| (65) 句弦積與股弦較求股 | (66) 方臺求積還原術 |
| (67) 方臺截積術 | (68) 圓臺求積還原術 |
| (69) 圓臺截積術 | (70) 長方臺求積還原術 |
| (71) 長方臺截積術 | (72) 楔積還原術 |
| (73) 楔之截積術 | (74) 隄積還原術 |
| (75) 隄之截積術 | |
| (76) 等高方圓柱共積還原術 | |
| (77) 等邊徑方圓柱共積還原術 | |
| (78) 方圓臺共積還原術 | |

附錄 古算難題詳解.....207

第一節 緒言

第二節 整數四則問題

第三節	分數四則問題	第四節	最小公倍數問題
第五節	比例問題	第六節	開方求積問題
第七節	句股旁要問題	第八節	聯立方程問題

古算法之新研究

(續編)

第一章

九容術

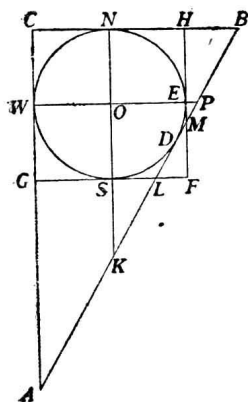
§1. 九容術之源流 劉徽 九章算術 句股章第十六問，述句股容圓之法，爲後世九容術之肇始，本書初編旁要術中已論及之，惟解法僅一、二種，尙未能曲盡其妙也。

元初李冶得九容之術於洞淵老人，遂著測圓海鏡十二卷，其書以句股容圓爲題，自圓心圓外縱橫取之，錯綜變化，各極其妙，當冶病革時，語其子克修曰：「吾生平著述，死後可盡燔去，獨測圓海鏡一書，吾嘗精思致力焉，後世必有知者。」蓋是書闡明天元之術，爲中國數學至精之詣也。

清光緒時，澄江南菁書院 吳誠以書中所載九容之題僅以一、二法了之；疑當日授受之妙，不盡於此，乃著海鏡一隅以廣衍其術，除末一題僅有三法外，其餘各得十法，於是未發之蘊，宣洩無遺，李氏所謂後世之知音，其在斯人歟！

知句股形之三邊，而求其所容圓之直徑，爲句股容圓之正法，因容法有九，故曰九容，海鏡原書集各題於一圖，其中句

股凡九,而合容一圓.且各題所設之數,皆合總圖而無奇零,神妙無出其右,茲先繪總圖於下,並記其各線之長,而後再列表以示九種容法.



$$AK = 255, \quad KL = 153,$$

$$LD = LS = 72,$$

$$DM = ME = 30,$$

$$MP = 34, \quad PB = 136,$$

$$AG = 360, \quad KS = 135,$$

$$LF = 48, \quad FM = 90,$$

$$PE = 16, \quad BH = 80,$$

$$OS = OW = ON = OE = EH$$

$$= HN = NC = CW$$

$$= WG = GS = 120,$$

海鏡設問,以圖中之圓爲圓城,其 E, S, W, N 爲東、南、西、北四門.又稱 C 爲乾地, H 爲艮地, F 爲巽地, G 爲坤地;蓋按八卦之方位以定其名也.

圖中各形及各線,原書皆給以專門之名稱,茲以名目繁多,徒資紛擾,故不贅及.

種數	名 稱	容圓之句股形	海鏡原術(r = 半徑)
1	句股容圓	ABC	$2r = a + b - c$

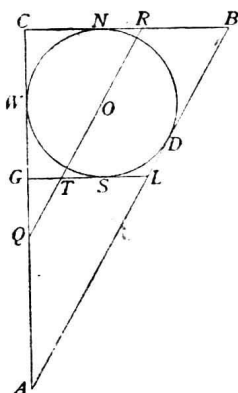
2	句外容圓	<i>ALG</i>	$2r = c - b + a$
3*	股外容圓	<i>BHM</i>	$2r = c + b - a$
4	弦外容圓	<i>MLF</i>	$2r = a + b + c$
5	句上容圓	<i>APW</i>	$2r = \frac{2ab}{c+b}$
6*	股上容圓	<i>BNK</i>	$2r = \frac{2ab}{c+a}$
7	句外容圓半	<i>KLS</i>	$2r = \frac{2ab}{c-a}$
8*	股外容圓半	<i>MPE</i>	$2r = \frac{2ab}{a-b}$
9	弦內容圓弱半	<i>KPO</i>	$2r = \frac{2ab}{c}$

表中附有*號者,諸術皆與前一種相同,蓋交換前者之公式中之句與股,即得後者之公式,故實際僅有六種容法也。

海鏡一隅所述十法,其前之九法,皆用乘除,惟末法則用天元,茲以天元之術,述之篇幅甚長,尙非本書續編所可論及,故此章以帶縱或減縱開平方法代用之。

測圓海鏡原書,除九容之題外,更載雜法百數十問,皆用天元術解之,當俟詳論天元術後續述之。

近人於海鏡原圖過



$$\begin{aligned}
 NR &= 64, \\
 GQ &= 105, \\
 GT &= 56, \\
 QT &= 119, \\
 TR &= 272.
 \end{aligned}$$