

大學叢書

學圖體立

王石安著

商務印書館發行

立 體 圖 學

緒 言

立體圖學 (Practical solid geometry) 爲幾何學之一分科，專研究物體在空間之位置及形狀，精確表現於一平面上之方法學科也。其所表示之圖，當物體與眼之位置固定後，比即應有與實際所見之物體有同一之感。是故眼與物體上之各點相結之直線與所表示物體之平面相交，將其交點連結成線，爲作圖上必要之條件。如斯所作之圖，稱爲其物體之投影 (Projection)。投影所作之平面，稱爲投影面 (Plane of projection)。又表示眼之位置之點，謂之視點 (Point of sight)。由視點所發出而通過物體各點之直線，謂之視線 (Line of sight)。又視線上投影面與物體上之各點間之線分，謂之投射線，或投影線 (Projector or line of projection)。

如 Fig. 1 所示，S 爲視點，平面 T 爲投影面，A B D F 爲空間之物體，S 與 A B D F 之各點相結之直線與平面 T 相交，將其各交點相結，即成 a b d f 圖形。此時 a b d f 爲物體 A B D F 於平面 T 上之投影。而

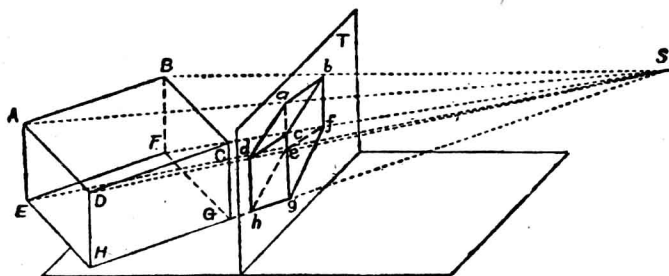


Fig. 1

直線 SA, SB, SC……爲視線, Aa, Bb, Cc……爲投影線。

視點與物體間其距離爲有限時，則所投之影稱爲透視投影 (Perspective projection)。又稱爲圓錐投影 (Conical projection)。視點與物體間之距離，若遠至於無限之極限，則所有之投影線，均成平行，此時之投影，稱爲平行投影 (Parallel projection)。平行投影中，投影線垂直於投影面者，謂之正投影 (Orthogonal projection or orthographic projection)。其不垂直者，謂之斜投影 (Oblique projection)。

投影	{	透視投影	{	正投影
		平行投影		斜投影

正 投 影 圖

總 論

1. 投影面

如 Fig. 2 所示，設物體 A 與物體 B 位於平面 H 上，其共通之投影爲 a ，若吾人僅以 a 而想像空間物體 A, B 之形狀，乃屬不可能之事。因之其位置與形狀，亦不能加以限定。然於他一平面 V 上，另作一投影 a' , b' ，藉 a 與 a' , b 與 b' 之助，斯時 A, B 之形狀，方可想像得知。次設 A 上之一點 P 之投影爲 p, p' ，則 P 之位置，可由 p, p' 向水平直立兩面引垂線，以其垂線相交之點表之。是故正投影中，通常有二投影面方能限定空間中物體之形狀，及其全部點之位置。茲因作圖之便利，取其一面保持水平之位置，他一面保持直立之位置。其保持水平者，稱爲水平投影面 (Horizontal plane of projection)。

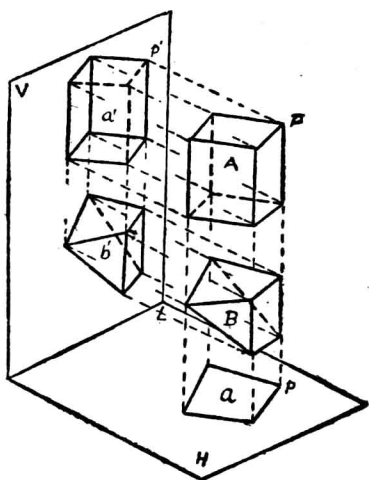


Fig. 2

保持直立者，稱爲直立投影面 (Vertical plane of projection)。其兩投影面間之交切線，稱爲基線 (Ground line)。

2. 二面角

平面因能無限擴張，故其水平直立兩投影圖，可分空間為四。其基線之周，可作成四二面角。二面角之名稱，其水平投影面之上，位於直立投影面前方者，為第一二面角 (First dihedral angle)。位於後方者，為第二二面角 (Second dihedral angle)。其水平投影面之下，位於直立投影面之後方者，為第三二面角 (Third dihedral angle)。位於前方者，為第四二面角 (Fourth dihedral angle)。

3. 投影之區別

投影可依投影面而分別之，如水平投影面上之投影，稱為水平投影 (Horizontal projection)。或為平面圖。直立投影面上之投影，稱為直立投影 (Vertical projection)。或為立面圖 (Elevation)。如 Fig. 3 所示，a 為立體 A 之平面圖，a' 為其立面圖也。

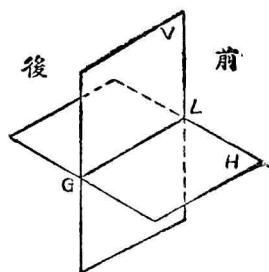


Fig. 3

又投影線，其至水平投影面者，為水平投影線 (Horizontal projector)，至直立投影面者，為直立投影線 (Vertical projector)。

4. 投影面之迴轉

上述之投影，

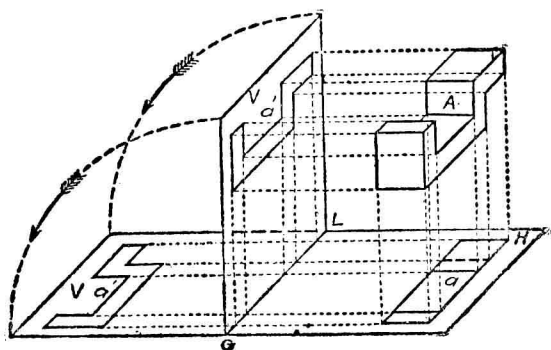


Fig. 4

因其在水平直立兩平面上，故作圖上，若仍保持其兩平面間所成之直角之關係，殊感不便。勢非將其移至同一平面上不可。轉移之法，通常以基線爲軸，將直立投影面向後方迴轉，使其與水平面重合。如 Fig. 4 所示，其矢所指之方向，即爲迴轉直立投影面所示之方向也。

第一章 點之投影

1. 點之投影

如 Fig. 5 所示, A 爲空間之一點, 由點 A 向水平投影面與直立投影面引垂線, 其足爲 a, a' 。此時 a 爲 A 之平面圖, a' 爲其立面圖。然此時含水平投影線 Aa 之各平面, 垂直於 H, 含 Aa' 之各平面垂直於 V。由是可知含 Aa, Aa' 之平面 V_1 必垂直於 H, V 兩投影面。今 H, V 兩平面互相垂直, 若 V_1 與 H 相交爲 ma , V_1 與 V 相交爲 $a'm$, 則四邊形 $Aaa'm$ 爲矩形, $am, a'm$ 均垂直於基

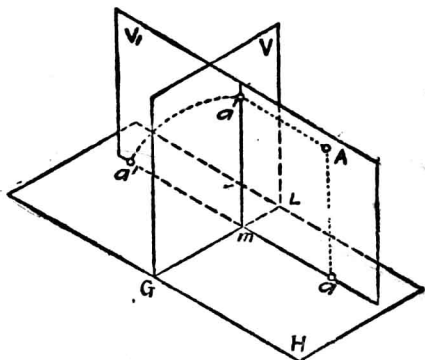


Fig. 5

線 GL。故知由平面圖 a 至基線之距離 am 與由點 A 至直立投影面之距離相等。由立面圖 a' 至基線之距離 $a'm$ 與由點 A 至水平投影面之距離相等。

次以基線爲軸, 將直立投影面向後方迴轉, 使其與水平投影面重合。今因 $am, a'm$ 均垂直於基線, 故 ama' 成一直線後, 亦必垂直於基線。

當投影面迴轉後, 點之平面圖與立面圖所連結之直線, 必垂直於基線。今爲作圖之便利計, 故稱此線爲投射線 (Projection line)。

(註) 水平投影面略稱爲 H. P., 直立投影面略稱爲 V. P., 基線則略稱爲 GL。

2. 點之投影與二面角

如 Fig. 6 (a) 所示, A 爲第一二面角內之一點, 其兩投影爲 a, a' 。B 爲第二二面角內之一點, 其兩投影爲 b, b' 。C 爲第三二面角內之一點, 其兩投影爲 c, c' 。D 爲第四二面角內之一點, 其兩投影爲 d, d' 。今將其直立投影面, 以基線爲軸向後方迴轉, 使其與水平投影面重合, 即得如

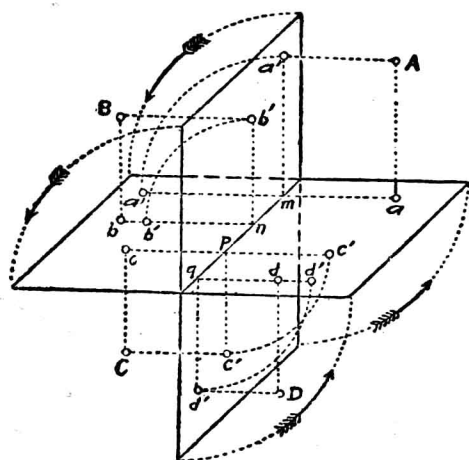


Fig. 6(a)

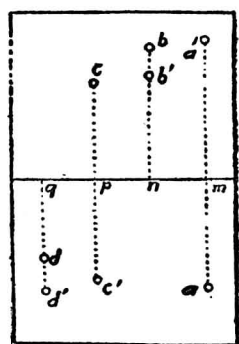


Fig. 6(b)

Fig. 6 (b) 所示之圖。圖中投射線 aa', bb', cc', dd' 等與基線所交之點爲 m, n, p, q , 則 am, bn, cp, dq 等之長, 等於由 A, B, C, D 至直立投影面之距離。 $a'm, b'n, c'p, d'q$ 等之長, 等於由 A, B, C, D 至水平投影面之距離。

如上圖所示, 兩投影面迴轉後, 其點之投影對於其基線已易其位置。即:

- (1) 第一二面角內之點, 其平面圖在基線之下, 立面圖在基線之上。
- (2) 第二二面角內之點, 其平面圖及立面圖均在基線之上。

(3) 第三二面角內之點，其平面圖在基線之上，立面圖在基線之下。

(4) 第四二面角內之點，其平面圖及立面圖均在基線之下。

今設一點在水平投影面上時，其立面圖則在基線上。在直立投影面上時，其平面圖亦在基線上。又點在基線上時，其平面圖及立面圖，均在基線上。

3. 副投影

每一點對於所定之一對投影面，僅有一平面圖及一立面圖。今欲變更投影面之位置，可將其點向各新投影面上投影，而生新投影。此等新投影面，對於原投影面，稱為副投影面 (Auxiliary plane of projection)。副投影面上所作之投影，對於原平面圖及立面圖，稱為副投影 (Auxiliary projection)。

如 Fig. 7 (a) 所示，H. P. V. P. 為所定之一對投影面，A 為空間之一點。 a, a' 為點 A 之平面圖及立面圖。設平面 A. P. 與 H. P. 直交於基線 $G'L'$ 。水平面上 A 之投影為 a ，其副投影為 a'' 次以 $G'L'$ 為軸將 A. P. 向後方迴轉，使其與 H. P. 重合後，將 $G'L'$ 及 a'' 與原投影同一圖示時，則得如 Fig. 7 (b) 所示之圖。今以 A. P. 為新直立面，而與

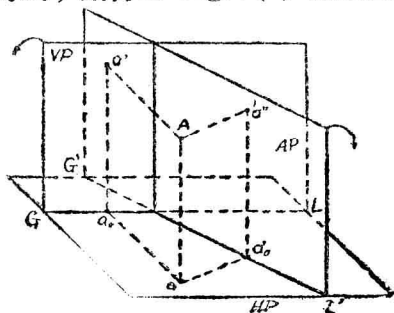


Fig. 7(a)

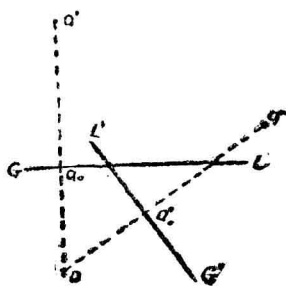


Fig. 7(b)

H.P. 視爲一對之投影面，則 a'' 爲 A 之新立面圖，而與 a 對於新基線 $G'L'$ 形成一對新投影圖。此時 $G'L'$ 稱爲副基線 (Auxiliary ground line), a'' 稱爲副立面圖 (Auxiliary elevation)

又原投影與副立面圖之間，有下列之關係。

$$aa'' \perp G'L' \quad a''a'_0 = Aa = a'a_0.$$

是故關於一副基線 $G'L'$ ，而作已知之點 a, a' 之副立面圖時，可由平面圖 a 至 $G'L'$ 作垂線，於其足作垂線 a'_0a'' ，取其與 a_0a' 等長可也。但 a'' 之位置，必隨 a' 之位於 GL 之上方或下方，而位於 $G'L'$ 之上方或下方。

間有如 Fig. 8(a) 所示，將副基線 $G'L'$ ，置於 V.P. 之上，此時直交於 V.P. 之平面 A.P. 爲副投影面。而 V.P. 與 A.P. 可視爲新一對投影面，因之 A.P. 上之投影 a'' ，可視爲新平面圖。

後以 $G'L'$ 爲軸將 A.P. 向下方迴轉，使其與 V.P. 重合，而 a'' 落於 V.P. 上。今將 a'' 與 $G'L'$ 同時添諸原投影內，則得 (b) 圖，此時

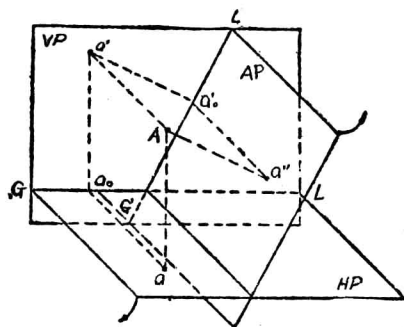


Fig. 8(a)

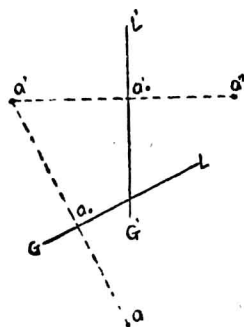


Fig. 8(b)

$$a'a'' \perp G'L' \quad a''a_o' = Aa' = aa_o$$

由此關係，可決定圖上 a'' 之位置。此時 a'' 爲 A 之副平面圖 (Auxiliary plan)，而與立面圖 a' 對於 $G'L'$ ，形成 A 之新投影圖。

4. 側面投影

垂直於水平直立兩投影面之平面上之投影，即垂直於基線之平面上之投影。通稱此投影，謂之側面投影 (Profile)。或謂之側面圖 (Side elevation)。側面投影，可視爲副立面圖，復可視爲副平面圖。其求法，與求副立面圖及副平面圖之方法完全相似。例如若視其爲副立面圖，可將其迴倒於水平投影面，如視其爲平面圖，可將其迴倒於直立投影面。如 Fig. 9 所示，爲已知一點 P 之平面圖及立面圖，以 OV_1 爲其副基線，而求其側面圖 p'' 之圖。今其側面圖，視爲副平面圖，故向直立投影面迴倒。

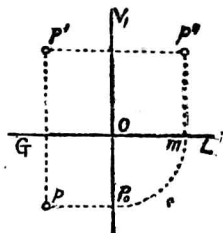


Fig. 9

5. 直線之副投影

直線之副投影，因其爲一直線。故直線之副投影，爲其兩端二點之副投影相結而成。如 Fig. 10 所示，爲已知三角形 ABC 之兩投影，於 $G'L'$ 爲副基線之平面上，而求其副立面圖 $a''b''c''$ 之圖也。

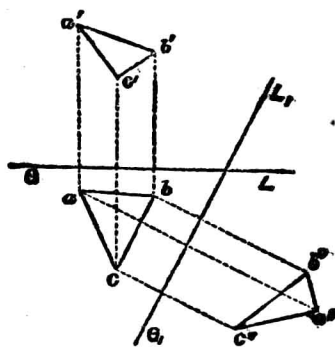


Fig. 10

作圖題1. 垂直於基線之直線之投影 $aba'b'$ 爲已知，求其水平跡與直立跡。

如 Fig. 11 所示,先求 AB 之側面圖 $a''b''$ 。次將其延長線,使其與基點相交於點 h_1 ,與副基線相交於點 v_1 。此時 h_1 為水平跡之側面圖, v_1 為直立跡之側面圖。由是再逆求其水平跡 h ,直立跡 v' 可也。

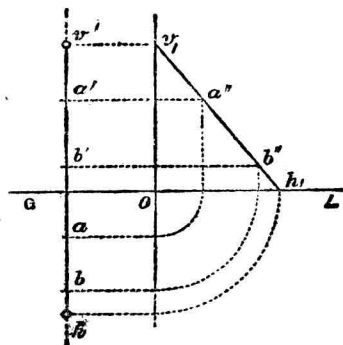


Fig. 11

6. 多面體之副投影

求多面體之副投影,與求其平面圖及立面圖之法相同,其求法可依求其各稜之副投影而得。

如 Fig. 12 所示,為直四角柱,其底面平行於直立投影面之投影為已知,而求其副投影之圖也。圖中 $a_1 b_1 c_1 - d_1 e_1 f_1 g_1 h_1$ 以 $G'L'$ 為副基線之副立面圖。求 $a_1, b_1, \dots$ 之法,可由 $a, b, \dots$ 向 $G'L'$ 引垂線,復由垂線之足 $m_1, n_1, \dots$ 截取 $m_1 a_1, n_1 b_1, \dots$ 之長,等於 $A, B, \dots$ 之高 $a'm, b'm, \dots$ 可也。又與 $G'L'$ 為副基線之副投影面相垂直,以 $G''L''$ 為副基線之平面而於其平面上,其副投影為 $a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2 g_2 h_2$ 。至求 $a_2, b_2, \dots$ 之法,可由 $a_1, b_1, \dots$ 向 $G''L''$

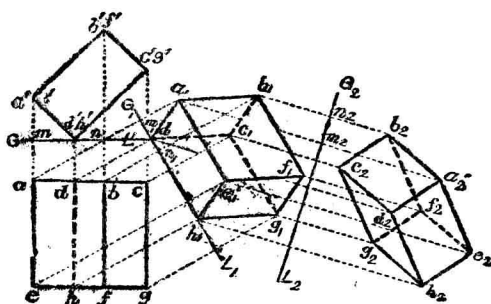


Fig. 12

L'' 引垂線,於其垂線上,由其足 $m_2, n_2, \dots$ 截取 $m_2 a_2, n_2 b_2, \dots$ 等於 $a m_1, b n_1, \dots$ 可也。

作圖題2. 求垂直於立方體之一對角線之平面上，其立方體之投影。

如 Fig. 13 所示，乃立方體之一對角線平行於直立投影面，其一面置於水平投影面上，而作其平面圖 $a b c d$ ，與立面圖 $a' b' c' d' e' f' g' h'$ 之圖也。其求法，先引 $G_1 L_1$ 垂直於 $a' g'$ ，後以 $G_1 L_1$ 為副基線，而作 $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 g_1 h_1$ 是即所求之投影也。

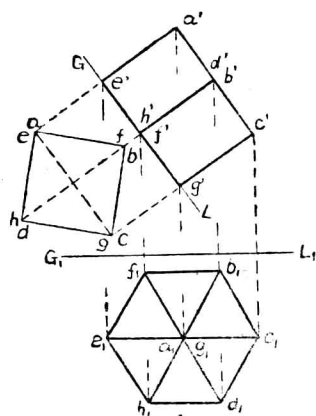


Fig. 13

作圖題3. 有一平面與正六角錐之一斜面成角 θ ，求其平面上之投影。

如 Fig 14. 所示，先作其底置於水平投影面上之平面圖 $v a b c d e f$ 。次引 GL 垂直於 cd ，而作其立面圖 $v' a' b' c' d' e' f'$ 。此時斜面 $v c d$ ， $v' c' d'$ 垂直於直立投影面，故若與 $v' c'$ 成角 θ 引副基線 $G_1 L_1$ ，而作副平面圖 $v_1 a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ ，則得所求之投影。

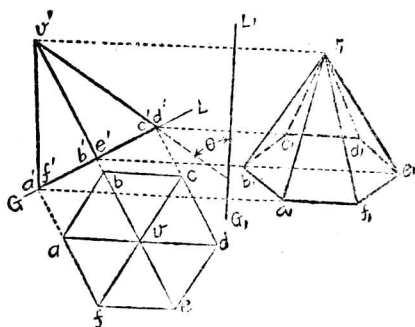


Fig. 14

作圖題4. 求平行於正八面體之一面之平面上，其正八面體之投影。

如 Fig. 15 所示，置八面體之一對角線 EF 垂直於水平投影面，而作其平面圖 $a b c d e f$ 。次引基線垂直於 $a d$ ，而作其立面圖 $a' b' c' d' e' f'$ 。此時面 A D F，因其垂直於直立投影面，故平行於 $a' f'$ 所引之 $G_1 L_1$ 爲副基線，而作成之副投影 $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ ，是爲所求之投影。

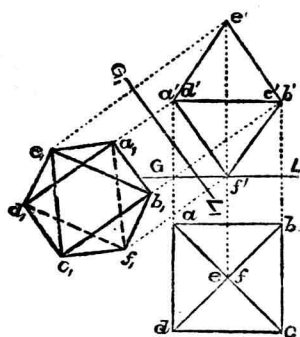


Fig. 15

練習題

(1) 有垂直於基線之直線，其一端位於 H.P. 下 2 呎，V.P. 前 4 呎，他端位於 H.P. 上 4 呎，V.P. 後 6 呎，試求其直線之實長跡，及與投影面所成之角度。

(2) 有底面一邊爲 3 呎之正五角形，高 4 呎之直角柱，今其一側面位於直立投影面上，其底與水平投影面成 45° 之傾斜，試求其投影。

(3) 如 Fig. 16 所示，爲寬 6 呎之階段之側面圖，今其副基線與基線成 30° ，其階段之副立面圖如何？

(4) 如 Fig. 17 所示，爲直角相交之正四角柱之立面圖，今副基線與基線成 25° 其副立面圖如何？

(5) 如 Fig. 18 所示，乃立體之底與水平投影面成 30° 之平面圖，試求其立面圖，其後使副基線與基線成 25° 之角，再求其副立面圖。

(6) 試求 Fig. 19 所示之立體之副立面圖。此時副基線與基線成 20° 之角度。

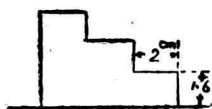


Fig. 16

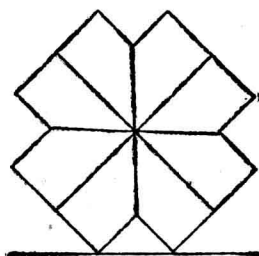


Fig. 17

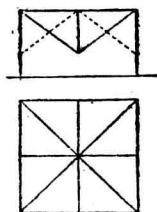


Fig. 18

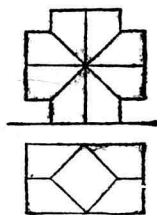


Fig. 19

(7) 有底為正五角形，每邊之長為 4 呎，高為 5 呎之正角錐體，今其一斜面位於水平投影面上，其軸之平面圖與其基線成 30° ，試求其平面圖及立面圖。

(8) 有一邊長為四呎之正八面體，其一對角線與水平投影面成 60° ，試求其投影。

(9) 有正十二面體，其每邊之長為 3 呎，其最長之對角線垂直於水平投影面，試求其投影。

(10) 有正七角錐體，其底為正七角形，底邊一邊之長為 3 呎，錐體高為 7 呎，試作其一斜面與水平投影面成 30° 之投影圖，次作副基線與基線成 45° ，再求其副平面圖。

(11) 有底之長為 3 呎，相等邊之長為 4 呎之二等邊三角形 $a' v' b'$ ，

其 $a'b'$ 與基線平行，今以此爲高 6 吋之正六角錐之一斜面之立面圖，其角錐之底爲一邊 3 吋之正角形，試求其平面圖及立面圖。

(12) 有直徑 5 吋，高 7 吋之直圓柱，其底與水平投影面平行時，其投影若何？又其副基線與基線成 35° 時，其副平面圖若何？