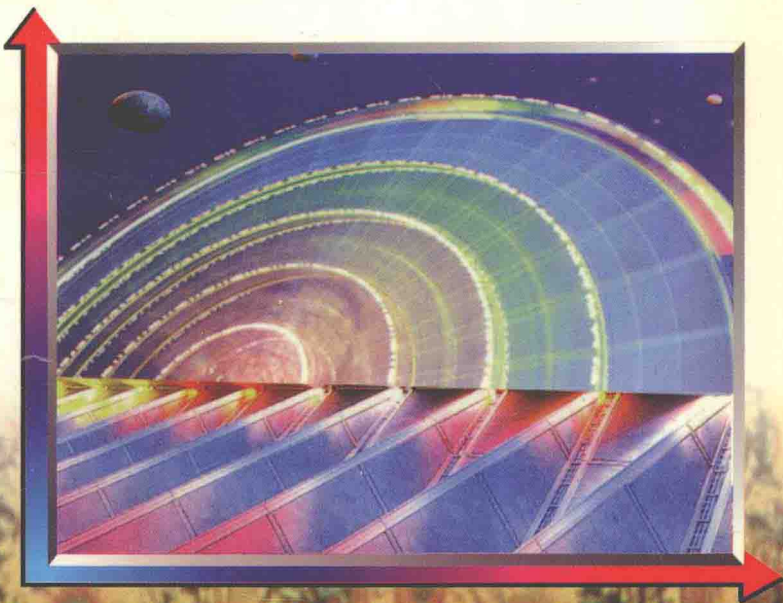


初中二年级 数学精学手册

北京师范大学附中
北京师范大学实验中学

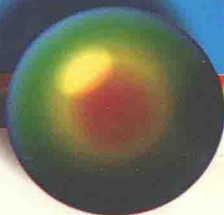
北京师范大学二附中
北京四中

编写组 审定

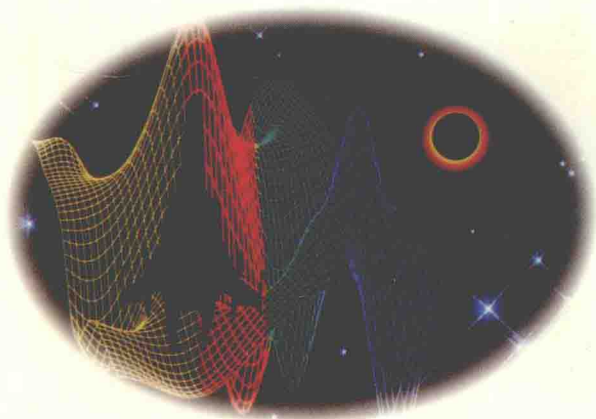


中国致公出版社

封面设计 明 华
电脑制作 袁春平



名校名师 权威指导
化难为易 灵活实效
结构合理 体系科学
精学精练 步步提高



ISBN 7-80096-199-0



9 787800 961991 >

ISBN 7-80096-199-0/G · 169

定价:8.00元

初中二年级数学精学手册

解正己 丁玉梓
张元国 张才富

编著

中国致公出版社

初中二年级数学精学手册

解正己 丁玉梓 编著
张元国 张才富

*

中国致公出版社出版发行
北京市西城区太平桥大街4号 (邮编: 100034)
北京市通县燕山印刷厂印刷 新华书店经销

*

开本: 787 × 1092 1/32 印张: 8 字数: 190千字
1997年6月第2版 1997年6月第2次印刷

印数: 10001-20010册

ISBN 7-80096-199-0/G·169

定价: 8.00元

前 言

该书各章由“主要内容概述”、“典型例题与分析”、“练习题”三部分组成。“主要内容概述”部分,对主要内容及基本结构的阐述,对重点、难点内容的分析等,都渗透初中数学思想和学习方法,有利于学生根据数学本身的特点学好数学。

“典型例题与分析”从覆盖教材内容的基本要点出发,精心选择题型、题例,突出最基本、最重要的基础知识和基本技能,寓特殊解法于深刻理解基础知识和熟练掌握基本技能中,对学生紧扣教材学好数学有直接的指导作用。

“练习题”部分,从普及初中教育的基本要求出发,兼顾系统复习与培养能力的需要,具有典型性、新颖性、阶梯性,并安排少量有一定难度的综合性习题,以达到普及与提高相结合的目的。

该书选材严格按照九年义务教育初中数学内容分章介绍,在各分册最末安排“自我测验题”,供读者系统复习和作自我检查。题型、题量及其计分方法是参照重点中学设计的,有较好的针对性、实用性,一般要求在120分钟内独立完成。书末附有练习题和自我测验题答案或提示,以供参考。

参加本书编著的多为长期以来献身于中学数学教学与研究的高级教师,并得到章士藻教授、特级教师陆训苑等先生的热情指导,在此表示衷心感谢。

由于编写匆促,错误和缺点在所难免,还望读者批评。

中国致公出版社最新初中图书

内容新颖 高效实用 欢迎选购

书 名	定价(元)	书 名	定价(元)
初中一年级英语同步听力训练 (配2盒磁带)	19.60	初中数学典型题解析和强化训练	6.80
初中二年级英语同步听力训练 (配2盒磁带)	19.20	初中物理典型题解析和强化训练	6.80
初中三年级英语同步听力训练 (配2盒磁带)	20.00	初中化学典型题解析和强化训练	6.80
初中一年级英语阅读训练	3.80	初中语文典型题解析和强化训练	5.50
初中二年级英语阅读训练	5.60	初中英语典型题解析和强化训练	6.80
初中三年级英语阅读训练	5.20	初中一年级英语学习手册	8.20
初一英语造句训练	6.60	初中二年级英语学习手册	7.80
初二英语造句训练	5.60	初中三年级英语学习手册	7.60
初三英语造句训练	4.20	初一语文学习手册	7.50
初中一年级英语写作训练	7.00	初二语文学习手册	7.50
初中二年级英语写作训练	6.80	初三语文学习手册	7.20
初中三年级英语写作训练	6.50	初一数学学习手册	5.50
初一英语语法·习惯用语·练习	8.80	初二数学学习手册	8.00
初二英语语法·习惯用语·练习	8.80	初三数学学习手册	8.20
初三英语语法·习惯用语·练习	8.80	初二物理学习手册	6.00
初中英语单词·短语·句型	6.00	初三物理学习手册	7.00
初中英语讲练新编	8.20	初三化学学习手册	7.50
初中英语要点·重点·难点训练	6.20	初中政治总复习测试卷	5.50
初中英语(搭配·用法)词典	6.00	初中语文总复习测试卷	6.00
简明初中英语语法	6.00	初中英语总复习测试卷	6.80
初中英语单项选择题解答指南	6.50	初中数学总复习测试卷	6.00
中学英语句型词典	20.00	初中物理总复习测试卷	5.00
96新题型中考英语试前模拟测试	8.00	初中化学总复习测试卷	4.60
中考命题热点与规律探析(语文)	6.50	中学常用成语分类词典	7.90
中考命题热点与规律探析(英语)	6.20	中学文言文百题解	6.40
中考命题热点与规律探析(数学)	7.00	初中作文指导(技巧·纠偏·训练)	9.00
中考命题热点与规律探析(物理)	6.00	中国初中生大奖作文集萃	12.50
中考命题热点与规律探析(化学)	7.20	怎样添加平面几何辅助线	5.20
		初中平面几何学习指导	5.60
		初中代数学习指导	7.50

凡邮购本社图书,请先汇款,汇款单上注明书名及数量,我社按定价计收书款并加收15%邮寄费。书价如有变动,多退少补。邮购地址:北京市西城区太平桥大街4号中国致公出版社邮购部,邮编:100034,电话:(010)66161155-318。

目 录

前 言

第一章 因式分解	(1)
一、主要内容概述	(1)
二、典型例题与分析	(15)
三、练习题	(27)
第二章 分 式	(30)
一、主要内容概述	(30)
二、典型例题与分析	(45)
三、练习题	(69)
第三章 数的开方	(75)
一、主要内容概述	(75)
二、典型例题与分析	(85)
三、练习题	(93)
第四章 二次根式	(99)
一、主要内容概述	(99)
二、典型例题与分析	(105)
三、练习题	(127)

第五章 三角形	(134)
一、主要内容概述	(134)
二、典型例题与分析	(141)
三、练习题	(155)
第六章 四边形	(160)
一、主要内容概述	(160)
二、典型例题与分析	(167)
三、练习题	(184)
第七章 相似形	(191)
一、主要内容概述	(191)
二、典型例题与分析	(199)
三、练习题	(212)
第八章 自我测验题	(219)
附录 练习题答案或提示	(232)
自我测验题答案或提示	(247)

第一章 因式分解

一、主要内容概述

1. 知识要点

(1) 因式分解 把一个多项式化为几个整式的积的形式
的过程,叫做把这个多项式的因式分解.

因式分解与整式乘法是一对互逆的运算. 整式乘法是把
几个整式相乘,化为一个多项式;而因式分解则是把一个多项
式化为几个因式相乘.

例如:

$$m(a+b+c) \begin{array}{l} \text{整式乘法} \\ \text{因式分解} \end{array} ma+mb+mc$$

$$(a+b)(m+n) \begin{array}{l} \text{整式乘法} \\ \text{因式分解} \end{array} am+an+bm+bn$$

$$(a+b)(a-b) \begin{array}{l} \text{整式乘法} \\ \text{因式分解} \end{array} a^2-b^2$$

要注意因式分解与多项式乘法的联系与区别,互逆运算
既揭示了它们的联系,也反映了它们的区别:它们的出发点不
同,结果也不同. 要防止在进行因式分解的过程中,半路上又
倒回头做乘法的错误. 比如

$$\begin{aligned} m^6-64n^6 &= (m^3)^2-(8n^3)^2 = (m^3+8n^3)(m^3-8n^3) \\ &= (m+2n)(m^2-2mn+4n^2)(m-2n)(m^2+2mn+4n^2) \\ &= (m^2-4n^2)(m^2-2mn+4n^2)(m^2+2mn+4n^2). \end{aligned}$$

上面最后一步是错误的.

(2)公因式 一个多项式的各项都含有的公共的因式,叫做这个多项式的公因式.

要注意公因式是各项都含有的因式,只要有一项不含有此因式,那么这因式就不能称为公因式:如 x^3-5x^2+3x-1 ,虽然 x 是前三项的公因式,但由于不是第四项的公因式,所以 x 不是多项式 x^3-5x^2+3x-1 的公因式.

(3)完全平方式 我们把 $a^2+2ab+b^2$ 及 $a^2-2ab+b^2$ 这样的式子叫做完全平方式.要理解并记忆这两个完全平方式的语言叙述:两个数平方和,加上(或者减去)这两个数的积的2倍,等于这两个数的和(或者差)的平方.

要注意完全平方式与非完全平方式 a^2+ab+b^2 、 a^2-ab+b^2 的区别与联系,区别是中间项系数不同,联系是 $a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab$, $a^2-ab+b^2=(a-b)^2+ab$.

2. 数学思想与方法

(1)数学思想

①类比思想.学习因式分解的概念,可以与小学数学里因数分解的概念进行类比.因数分解,是把一个整数化成几个质因数的积的形式;而因式分解,是把一个多项式化为几个整式的积的形式.因数分解中的“质因数”的概念,类似于因式分解中的在指定的数集上不能再分解的“整式”.因数分解与数的乘法是互逆关系,因式分解与整式乘法也是互逆关系.这样来理解因式分解概念会容易些.

②从特殊到一般,从一般到特殊的思想.我们在学习运用公式法分解因式时,开始常常要对照因式分解公式,如

$$x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x+4)(x-4)$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \uparrow \\ & a^2 - b^2 & = (a+b)(a-b) \end{array}$$

这样对照,就是从一般到特殊的思想方法,又如我们学习用十字相乘法分解因式时,先通过具体例题说明符号规则和分解步骤的基础上,再说明一般情况下二次三项式分解因式符号规律和分解步骤,这种从具体到抽象,从特殊到一般的方法,符合人们的认识规律,读者学起来也容易,我们应该逐步掌握这种认识客观事物的科学方法。

③转化思想 我们学习新知识总是在已有知识的基础上进行的,解决新问题时,往往就是通过某种方法或工具,把未知的转化为已知的,比如分组分解法,就是通过适当的分组,使分组后的多项式能运用已经学过的提公因式法或运用公式法来进行因式分解.配方法、拆项法、设辅助元的方法、变号等,都渗透着这种转化思想。

④分类思想 对于二次三项式的因式分解,我们分为首项系数为1与不为1两类进行讨论;对二次三项式的常数,又分为正数与负数进行研究,从而总结出分解因式时的符号规律.对于不能直接采用提公因式法和公式法的多项式,我们采取分组分解的方法,而分组的方法又分为两类:一类是分组后直接提公因式;另一类的分组后能直接运用公式.分类讨论是中学数学中一种重要的思想方法,我们要在学习新知识过程中,逐步掌握这种思想方法。

(2) 数学方法

①提公因式法 如果多项式的各项有公因式,可以把这个公因式提到括号外面,将多项式写成因式乘积的形式,这种

分解因式的方法叫做提公因式法. 如 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$, 便是采取提公因式法.

运用提公因式法要注意以下几点:

1) 理解提公因式法的依据是乘法分配律与因式分解的互逆关系, 如上述从右到左是按乘法分配律进行整式相乘, 从左到右是用提公因式法进行因式分解.

2) 运用提公因式的关键在于准确地找出各项的公因式, 公因式的系数应取各项系数的最大公约数, 字母取各项都含有的相同字母, 各字母的指数次数取最低的. 例如, 多项式 $25x^2y-15xy^2$ 各项的公因式是 $5xy$, 其分解方法是

$$25x^2y-15xy^2=5xy(5x-3y).$$

3) 公因式可以是单项式, 也可以多项式, 如多项式 $(x+y)+(x^2-y^2)$, 其公因式是 $(x+y)$, 其分解格式是

$$(x+y)+(x^2-y^2)=(x+y)(1+x-y).$$

4) 公因式提取后, 剩下的项不能遗漏, 如上述因式分解时, 把右边写成 $(x+y)(x-y)$ 就错了, 1 作为项的系数通常可以省略, 但如果单独成一项时, 它在提取公因式后不能漏掉. 检查是否漏项可以采用互逆运算, 用整式乘法加以验证.

5) 如果多项式里出现符号相反的因式, 可通过适当变形, 使它出现公因式, 如

分解因式: $4m(a-b)^2-6(b-a)^3$, 则

$$\text{原式} = 4m(a-b)^2+6(a-b)^3=2(a-b)^2(2m+3a-3b),$$

$$\text{或原式} = 4m(b-a)^2-6(b-a)^3=2(b-a)^2(2m-3b+3a).$$

为此, 要熟练地掌握如下的一些式子的恒等变形:

$$ax-by=-(by-ax),$$

$$(a-b)^2=(b-a)^2, \quad (a-b)^3=-(b-a)^3,$$

$$(x-a)(b-x) = -(x-a)(x-b).$$

6) 如果多项式的第一项的系数是负的, 一般要提出“-”号, 使括号内的第一项的系数是正的, 在提出“-”号时, 多项式的各项都要变号.

② 运用公式法 如果把乘法公式反过来, 就可以用来把某些多项式分解因式, 这种分解因式的方法叫做运用公式法.

乘法公式指的是以下五个公式: 平方差公式、和与差的完全平方公式以及立方和与立方差公式.

“反过来”指的是把公式左、右两边换过来, 同一公式, 两种用法, 如下表:

	用于整式乘法	用于因式分解
平方差公式	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
完全平方公式	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
完全平方公式	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
立方和公式	$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
立方差公式	$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

同一公式, 由于用途不同, 语言叙述的顺序也不同. 如平方差公式, 作为乘法公式时, 叙述为“两个数的和与这两个数的差的积等于这两个数的平方差”; 而作为因式分解公式时, 叙述为“两个数的平方差, 等于这两个数的和与这两个数的差的积”.

在运用公式法进行因式分解时必须注意如下几点:

1) 运用公式法的依据是乘法公式的逆变形.

2)运用公式法的关键是要弄清各个公式的形式和特点,熟练地掌握公式,不仅要掌握公式的式子表达(符号语言),而且要掌握公式的语言表述(文字语言).

3)把完全平方公式分解因式时,要根据第二项的符号来选择运用哪一个完全平方公式,如果第二项的符号为正,应选择和的完全平方公式;如果第二项的符号为负,应选择差的完全平方公式.

4)在运用立方和公式或立方差公式分解因式时,一定要弄清因式中各项的符号.

5)公式中的字母,可以表示任何数、单项式或多项式,只要符合公式的特点,就可以灵活运用公式分解因式.

6)如果多项式的各项含有公因式;应先提取这个公因式,再考虑能否运用公式法继续分解,一直分到在有理数范围内不能再分解为止.

7)运用公式法分解因式时,有时要反复几次运用公式,才能最终完成因式分解. 如

分解因式 $(x^2 - y^2 - z^2)^2 - 4y^2z^2$, 则

$$\text{原式} = (x^2 - y^2 - z^2 + 2yz)(x^2 - y^2 - z^2 - 2yz)$$

$$= [x^2 - (y-z)^2][x^2 - (y+z)^2]$$

$$= (x+y-z)(x-y+z)(x+y+z)(x-y-z),$$

③分组分解法 利用分组来分解因式的方法叫做分组分解法.

学习和运用分组分解法时,必须注意如下几点:

1)分组分解法的原则是分组后可以直接提公因式;或者分组后可以直接运用公式;它本身不是一种独立的分解因式的方法,而是一个转化手段. 如

分解因式： $x^3+x^2y-xy^2-xz^2+yz^2-y^3$

原式 $= (x^3-y^3)+(x^2y-xy^2)-(xz^2-yz^2)$ (分组)

$= (x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)-z^2(x-y)$

(运用公式和提取公因式)

$= (x-y)[x^2+xy+y^2+xy-z^2]$ (提取公因式)

$= (x-y)[(x+y)^2-z^2]$ (运用公式)

$= (x-y)(x+y+z)(x+y-z)$ (运用公式)

2) 运用分组分解法的关键是合理选择分组方法,要预见
到分组后能继续因式分解,切勿盲目分组,不顾后果。

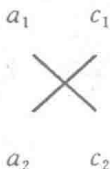
3) 运用分组分解法分解因式时,经常运用到加法的交换律、结合律以及乘法对加法的分配律,这三大运算律是中学代数里“最基本的思想、最重要的本质”,一定要掌握好,在运用交换律和结合律时要特别注意各项的符号。

① 十字相乘法 对于二次三项式 ax^2+bx+c ,如果二次项系数 a 分解成 a_1, a_2 ,常数项 c 分解成 c_1, c_2 ,并且把 a_1, a_2, c_1, c_2 排列如下形式:

按斜线交叉相乘、再相加,就得到

$a_1c_2+a_2c_1$,如果它正好等于

ax^2+bx+c 的一次项系数 b ,



那么 ax^2+bx+c 就可以分解为 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$,即

$ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$.

像这种借助画十字交叉线分解系数,从而帮助我们二次三项式分解因式的方法,通常叫做“十字相乘法”。

学习和运用十字相乘法分解因式时必须注意如下几点:

1) 十字相乘法分解因式的理论依据是多项式乘法的逆变

形:

多项式乘法: $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$,

十字相乘法: $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$;

多项式乘法:

$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2$,

十字相乘法:

$a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$.

2) 对于首项系数为1的二次三项式 x^2+px+q , 如果能够把常数 q 分解成两个因数 a, b 的积, 并且 $(a+b)$ 等于一次项的系数 p , 那么它就可以分解因式, 即

$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

这里的关键是如何找出相应的两个数 a, b , 这往往需要经过多次尝试, 如

分解因式: $x^2-4x-12$

这里常数项是负数, 它分解成的两个因数必为异号. 显然, -12 可以分解成 $1 \times (-12)$, $(-1) \times 12$, $3 \times (-4)$, $(-3) \times 4$, $2 \times (-6)$, $(-2) \times 6$. 现要求两个因数的和等于一次项系数 -4 , 通过观察可知 $2 \times (-6)$ 这一组符合条件

故 $x^2-4x-12=(x+2)[x+(-6)]$
 $= (x+2)(x-6)$.

1 2
X

关于 a, b 的符号还是有规律可循的.

1 -6

如果常数项 q 是正数, 那么把它分解成两个同号的因数, 它们的符号与一次系数 p 的符号相同; 如果常数 q 是负数, 那么把它分解成两个异号因数, 其中绝对值较大的因数与一次

项系数 p 的符号相同. 当然, 对于分解的两个因数, 还要看它们的和是不是等于一次项系数 p .

3) 对于首项系数不为1的二次三项式 ax^2+bx+c 分解因式的步骤是: 先分解二次项的系数 $a=a_1 \cdot a_2$, 将其可能的一组数分别写在十字交叉线的左上角和左下角; 再分解常数项 $c=c_1 \cdot c_2$, 将其可能的一组数分别写在十字交叉线的右上角和右下角; 把每条线段两个端点的数相乘(即十字相乘)后求和 $a_1c_2+a_2c_1$, 看是否恰好等于一次项系数 b , 如果相等, 原式即可分解成:

$$\begin{array}{l}
 ax^2+bx+c \\
 =a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2 \\
 =(a_1x+c_1)(a_2x+c_2).
 \end{array}$$

$\begin{array}{cc}
 a_1 & c_1 \\
 & \times \\
 & \\
 a_2 & c_2
 \end{array}$

如果不相等, 再重新换一组数进行尝试, 直到符合条件为止. 比如,

$$\begin{array}{l}
 \text{分解因式: } 6x^2+x-12 \\
 6=2 \times 3, \\
 -12=3 \times (-4), \\
 2 \times (-4) + 3 \times 3 = 1, \\
 \text{原式} = (2x+3)(3x-4).
 \end{array}$$

$\begin{array}{cc}
 2 & 3 \\
 & \times \\
 & \\
 3 & -4
 \end{array}$

4) 为了减少尝试次数, 使符号问题简单化, 当二次项系数为负数时, 往往先提出负号使首项系数为正数时, 这样首项系数分解因数, 就可只考虑分解为两个正因数的积, 比如

$$\text{分解因式: } -10x^2+25x-18$$

原式先化为 $-(10x^2-25x+18)$ 把10分解为 1×10 , 或者 2×5 , 与18分解的因数, 选可能性大的逐个尝试, 便发现