高中数学精讲

专题讲座

仇炳生 编著

教育出版社

高中数学精讲

专题讲座

（各年级通用）

仇炳生　编著

江苏教育出版社

高中数学精讲·专题讲座
仇炳生 编著
责任编辑 喻 纬

出版发行:江 苏 教 育 出 版 社
(南京市中央路165号,邮政编码:210009)
经 销:江 苏 省 新 华 书 店
照 排:南京理工大学激光照排公司
印 刷:江 苏 新 华 印 刷 厂
(南京市中央路145号,邮政编码:210009)

开本787×1092毫米 1/32 印张9.375 字数210,000
1996年11月第1版 1996年11月第1次印刷
印数1—55 200册

ISBN 7—5343—2850—0

G·2851 定价:7.10元
江苏教育版图书若有印刷装订错误,可向承印厂调换

敬告读者

《高中数学精讲》是江苏教育出版社奉献给全国广大读者的一套高中数学学习辅导读物.《高中数学精讲》的第一批5种自1991年出版之后,很快便受到读者们的喜爱,它们不但被高中学生视为“家庭教师”,也被广大高中数学教师当作案头常备的教学参考书.1994年10月,《高中数学精讲》(5种)被中国书刊发行业协会评选为“全国优秀畅销书”.1996年,《高中数学精讲》又将增加配合综合复习的两个新品种——《专题讲座》和《解题方法》.

这套书的作者中,有特级教师7人:周学祁(通州市教育局教研室),杨浩清(常州高级中学),仇炳生(南京师范大学附属中学),张连昌(金坛市华罗庚中学),周祥昌(无锡市第一中学),张乃达(扬州中学),汤希龙(扬州大学师范学院附属中学).长期以来一直关心中学数学教育的微分几何专家蒋声教授(扬州大学师范学院),也应邀编写《解题方法》一书,参加《高中数学精讲》的作者队伍,进一步提高了这套书的品位.这套书不但力图体现一批多年从事高中数学教学的特级教师的教学水平,而且传递了作者们在实现高中数学教学向“素质教育”转变方面的最新探索的成功经验.

这套书中的《代数上册》、《立体几何》、《代数下册》和《平面解析几何》,分别与现行的四册高中数学教材配套编写,系浓缩作者新授课的教学精华而成,可供读者在教学中同步使用.各册内容的安排及章节的划分,与课本基本一致.各小节的内容讲解部分,不求面面俱到,而着力于剖析教材的重点、

难点和关键，例题的解答与分析也力求将“三基”(基础知识、基本技能技巧和基本思想方法)的教学与解题训练融为一体，各册中配备的练习题、习题、复习题，由易到难循序渐进，举一反三以少胜多.《思路方法》、《专题讲座》和《解题方法》，既可供一、二年级时配合新授课教学使用，也可供三年级高考复习时使用.《思路方法》及时介绍与整理了新授课过程中出现的数学思想方法，并进一步作了分类、总结.《专题讲座》根据高考要求，将重点教学内容作了梳理和适度的补充与提高.《解题方法》则侧重于帮助读者将学过的种种解题方法融会贯通，切实掌握快速找到正确解题思路的方法与技巧.

《高中数学精讲》可供高中学生，自学高中数学者，中学数学教师、教研员、高中数学家庭教师，师范院校数学系师生阅读使用.

《高中数学精讲》面世五年而常销不衰，是与不停地采用“滚动式修订”从而保证“常出常新”分不开的.每次重印，作者都及时修订，力求消灭错误.每逢高中数学教学内容或高考要求有所调整，都及时组织作者改写有关内容，以确保《高中数学精讲》丛书始终保持与高中数学教学内容配套.每隔一段时间，都组织作者全面修订，撰写新版书稿，新版书稿在保持原有特色的同时，系统地融入高中数学教学与高考复习中的新鲜经验，并将例题、习题大幅度地更换成新题.我们希望，崭新的《高中数学精讲》(7 种)能更加切合全国广大读者的需要.

尽管如此，书中的不足之处仍然在所难免，欢迎读者们提出批评、建议，以便随时作进一步的修订.

江苏教育出版社

1996 年 10月

目　录

第1讲 集合及其应用

1.1 集合

集合是数学中最基本的概念，应用十分广泛. 如方程的解的全体称为这个方程的解集；曲线被看作适合某种条件的点集；解方程组被看作求方程组中所有方程的解集的交集等. 集合作为定义或说明其他概念的基础，它是数学中一个不予定义的原始概念. 对集合可以作如下说明：将一些确定的且彼此不同的事物（称为元素）看作一个整体，就形成一个集合. 因此，集合中的元素具有确定性、互异性及无序性.

例1 已知数集 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$ 及数集 $B=\{a+b,1,2a-b+5\}$，若 $A=B$，求实数 a 和 b 的值.

解 由 $A=B$，得 $1\in A$，根据集合中元素的互异性和无序性，得集合 A 中三个元素有且仅有一个为 1.

由 $a+2=1\Longrightarrow a=-1$；

$(a+1)^2=1\Longrightarrow a=0$ 或 $a=-2$；

$a^2+3a+3=1\Longrightarrow a=-1$ 或 $a=-2$.

$\therefore\ a=0,A=\{1,2,3\}$.

$\because\ A=B$，

$$\therefore \begin{cases}a+b=2,\\2a-b+5=3,\end{cases} \text{或} \begin{cases}a+b=3,\\2a-b+5=2.\end{cases}$$

由 $a=0$，得 $b=2$ 或 $b=3$.

$\therefore$ 所求实数为 $a=0,b=2$ 或 $a=0,b=3$.

例 2 （选择题）已知集合 $M=\{x|x=t^2-4t+2,t\in R\}$，$N=\{y|y=x^2-4x+2,x\in R\}$，$P=\{(x,y)|y=x^2-4x+2,x\in R\}$，则集合 M,N,P 的关系是

(A) $M=N=P$. (B) $M=N\neq P$.

(C) $M\neq N=P$. (D) $M\neq N\neq P$.

分析 集合 M 中元素为数 x，且 $x=t^2-4t+2=(t-2)^2-2\geqslant-2$，由此，$M=[-2,+\infty)$. 同理，$N=[-2,+\infty)$. 所以，$M=N$. 在数集 M 与 N 的表示法中，仅采用的字母不同，但它们同表示函数 $y=x^2-4x+2$ 的值域. 集合 P 中元素为一对有序实数组 (x,y)，且 x,y 满足等式 $y=x^2-4x+2$. 由此，集合 P 是表示满足条件 $y=x^2-4x+2$ 的点 (x,y) 的轨迹（点集），即表示顶点在 $(2,-2)$、开口向上的抛物线. 由集合 P 的元素点 (x,y) 与集合 M（或 N）的元素数 x 不相同，所以，$M=N\neq P$. 即应选(B).

在研究一个集合的性质时，首先应认清它的元素所表示的对象，进而分析这些元素所在的范围. 如例 2 中，由集合 M 与集合 P 的元素所表示的对象完全不同，立即得到判断 $M\neq P$；集合 M 与集合 N 的元素所表示的对象及其所在的范围都相同，尽管它们的表示法中采用了不同的字母，仍然得到 $M=N$. 因此，集合表示法中，采用不同字母与集合的性质无关.

例 3 设集合 M 满足 $\{a,b\}\subseteq M\subset\{a,b,c,d,e\}$，则不同的集合 M 共有多少个？并写出这些集合.

解 由题意，集合 M 是含有元素 a,b，且是集合 $\{a,b,c,d,e\}$ 的真子集. 因此，不同的集合 M 的个数等于集合 $\{c,d,e\}$ 的真子集的个数. 故不同的集合 M 的个数共 $2^3-1=7$. 它们是 $\{a,b\}$，$\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,b,e\}$，$\{a,b,c,d\}$，$\{a,b,c,$

$e\}$和$\{a,b,d,e\}$.

一般地，对于含 n 个元素的集合，它的子集共有 2^n 个，真子集共有 2^n-1 个. 实际上，子集的元素都是从原集合的元素中选出来的. 原集合中任何一个元素对此集合的子集都有被选中或没有选中两种可能，因此，对 n 个元素进行挑选时，不同的选法共有 2^n 个，即含 n 个元素的集合的子集共有 2^n 个.

例 4 已知 $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，$A\cap B=\{c,d\}$，$A\cap\overline{B}=\{a,g\}$. 求 $\overline{A}\cap B$.

集合的"交"、"并"、"补"三种运算对应的逻辑语言分别为"且"、"或"、"非". 这种理解，对于认识集合运算的意义以及集合论的应用起着重要作用. 由此得到例 4 的解法一.

解法一 $A\cap B$ 表示由集合 A 且是集合 B 的元素组成的集合，$A\cap\overline{B}$ 表示由集合 A 且非集合 B 的元素组成的集合. 因此，$A\cap B$ 与 $A\cap\overline{B}$ 是集合 A 中的元素按是否是 B 的元素所分成的两类，故得 $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=\{c,d,a,g\}$.

$\overline{A}\cap B$ 表示由非集合 A 且是集合 B 的元素组成的集合，又 $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，故得 $\overline{A}\cap B=\{b,e,f\}$.

应用集合的图示法(韦恩图)，易得例 4 的解法二.

解法二 由题意，易得表示集合 A 与集合 B 关系的韦恩图(如图 1-1)，因此，$\overline{A}\cap B=\{b,e,f\}$.

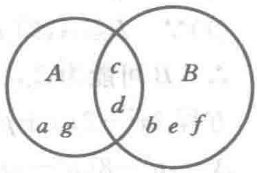

图 1-1

由于图形具有简明、直观的特点，借助图示的方式分析问题成为数学中重要的分析方法. 韦恩图是分析和解决集合

问题的常用的工具.

例 5 若集合 M,N,P 满足 $P\cup M=P\cup N$,则必定成立的等式是

(A) $M=N$. (B) $P\cap M=P\cap N$.

(C) $P\cap\overline{M}=P\cap\overline{N}$. (D) $\overline{P}\cap M=\overline{P}\cap N$.

分析 $P\cup M$ 与 $P\cup N$ 的韦恩图,如图 1-2 所示. 由题

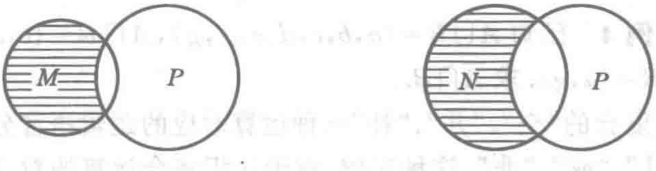

图 1-2

意,$P\cup M=P\cup N$. 于图中,易得两块阴影部分所表示的集合相等,即 $\overline{P}\cap M=\overline{P}\cap N$,故应选(D).

例 6 设集合 $A=\{x\,|\,x^2-3x+2=0\}$,集合 $B=\{x\,|\,2x^2-2px+p^2-3p+4=0\}$.

(1)若 $B\subseteq A$,求实数 p 的取值范围;

(2)若 $A\cap B=\varnothing$,求实数 p 的取值范围.

解 $A=\{x\,|\,x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$.

(1)$\because$ $B\subseteq A$,即 B 是 A 的子集,

$\therefore$ B 可能为$\varnothing$,$\{1\}$,$\{2\}$或$\{1,2\}$.

方程 $2x^2-2px+p^2-3p+4=0$ 中,

$\Delta=4p^2-8(p^2-3p+4)=-4(p-2)(p-4)$.

1° 若 $p<2$ 或 $p>4$,则 $\Delta<0$,$\therefore$ $B=\varnothing\subseteq A$;

2° 若 $p=2$,原方程为 $2x^2-4x+2=0$.

$\therefore$ $B=\{1\}\subseteq A$;

3° 若 $p=4$,原方程为 $2x^2-8x+8=0$.

$\therefore\ B=\{2\}\subseteq A$;

4° 若 $2<p<4$,则 $\Delta>0$,原方程有两个相异实根.由 $B\subseteq A=\{1,2\}$,得 $B=\{1,2\}$.解得 $p=3$.

综合1°,2°,3°,4°,当 $p\in(-\infty,2]\cup\{3\}\cup[4,+\infty)$ 时,$B\subseteq A$.

(2) 由 $A\cap B=\varnothing$,得 $B=\varnothing$ 或 $1\overline{\in}B$ 且 $2\overline{\in}B$.由(1),$p<2$ 或 $p>4$ 时,$B=\varnothing$;当 $2<p<3$ 或 $3<p<4$ 时,$1\overline{\in}B$ 且 $2\overline{\in}B$.

$\therefore\ p\in(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,4)\cup(4,+\infty)$ 时,$A\cap B=\varnothing$.

1.2 集合的应用

集合思想是数学的基本思想,应用集合的观点分析和认识数学现象,可以更深刻地揭示问题的本质.例如,由于曲线(点的轨迹)被看作适合某种条件的点集,因而求两条曲线的交点则是求两个点集的交集;解不等式组本质上与解方程组相同,被看作求不等式组中每一个不等式的解集的交集;分类主要体现子集、并集的思想;间接处理问题的方法则反映了补集思想的应用等.

1. 交集法

若要求某一个问题的解同时满足若干个条件,则这个问题的解集就是所有分别满足其中某一个条件的解集的交集.求这类问题的解集时,通常采用减弱条件、化难为易的方法,即先分别求出满足某一个条件的解集(也可以先求出满足某几个条件的解集),再求这些解集的交集.

例7 求函数 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\sqrt{9^x-3^{x+2}}$ 的定义域.

解 所求函数的定义域为$\{x|x^2-3x+2\neq 0,x\in R\}\cap\{x|9^x-3^{x+2}\geqslant 0\}$.

由$x^2-3x+2\neq 0$,得$x\neq 1$且$x\neq 2$;

由$9^x-3^{x+2}\geqslant 0$,得$3^x(3^x-9)\geqslant 0$,∴ $x\geqslant 2$.

∴ 所求函数的定义域为$\{x|x>2\}$.

例8 已知定义在R上的二次函数$y=(m+n)x^{m^2-3m+4}-4x+n$有最小值2,求实数m和n的值.

分析 由题意,实数m和n应满足三个条件:函数解析式中x的最高次数为2,x的二次项系数大于0且函数有最小值2.因此,所求问题的解集是分别满足上述三个条件的解集的交集.

解 由题意,得

$$\begin{cases}m^2-3m+4=2,\\ m+n>0,\\ y_{最小值}=2.\end{cases}$$

由$y=(m+n)x^2-4x+n$

$$=(m+n)\left(x-\frac{2}{m+n}\right)^2+n-\frac{4}{m+n},得$$

$$y_{最小值}=n-\frac{4}{m+n}=2\quad(m+n>0).$$

由$m^2-3m+4=2$,解得$m=1$或$m=2$.

当$m=1$时,$n-\dfrac{4}{1+n}=2$,∴ $n=-2$或$n=3$.

由$m+n>0$,得$m=1$且$n=3$.

当$m=2$时,$n-\dfrac{4}{2+n}=2$,∴ $n=\pm 2\sqrt{2}$.

由$m+n>0$,得$m=2$且$n=2\sqrt{2}$.

∴ 所求的m,n的值为$m=1$且$n=3$或$m=2$且

$n=2\sqrt{2}$.

2. 分类

分类是数学中重要的解题思想.通过分类,可以将复杂的问题转化为一些较简单的问题,以利于求解.若把所分的每一类都看作适合某种条件的集合,则将 I 分为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 共 n 类,是指它们满足下列两个条件:

$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=I$;

$A_i\cap A_j=\varnothing,i,j=1,2,\cdots,n$ 且 $i\neq j$.

因此,应用分类思想解题,实际上是将集合 I 的求解问题转化为它的子集的求解问题.

例 9 解不等式 $|x-2|+|2x+1|-|5-x|>1$.

分析 解此不等式的关键在于如何将绝对值不等式转化为一次不等式.由于 $2,-\dfrac{1}{2}$ 和 5 分别是 $|x-2|,|2x+1|$ 和 $|5-x|$ 解脱绝对值符号的关键点,又使左式有意义的 x 的取值范围为 R,故本题可分为 $x<-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\leqslant x<2,2\leqslant x<5$ 和 $x\geqslant5$ 四种情况分别求不等式的解集.原不等式的解集为这些解集的并集.

解 (1) 当 $x<-\dfrac{1}{2}$ 时,原不等式可化为

$-(x-2)-(2x+1)-(5-x)>1$,解得 $x<-\dfrac{5}{2}$.

$\therefore$ 不等式的解为 $x<-\dfrac{5}{2}$.

(2) 当 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x<2$ 时,原不等式可化为

$-(x-2)+(2x+1)-(5-x)>1$,解得 $x>\dfrac{3}{2}$.

∴ 不等式的解为$\frac{3}{2}<x<2$.

(3) 当$2\leqslant x<5$时,原不等式可化为

$(x-2)+(2x+1)-(5-x)>1$,解得$x>\frac{7}{4}$.

∴ 不等式的解为$2\leqslant x<5$.

(4) 当$x\geqslant 5$时,原不等式可化为

$(x-2)+(2x+1)+(5-x)>1$,解得$x>-\frac{3}{2}$.

∴ 不等式的解为$x\geqslant 5$.

综上,原不等式的解集为$\left\{x \middle| x<-\frac{5}{2}或x>\frac{3}{2}\right\}$.

例 10 解关于x的不等式

$(m+3)x^2+2mx+m-2>0$ $(m\in R)$.

解 (1) 当$m=-3$时,原不等式为$-6x-5>0$.

∴ 原不等式的解为$x<-\frac{5}{6}$.

(2) 当$m\neq -3$时,原不等式为一个二次不等式.

$\Delta=4m^2-4(m+3)(m-2)$

$=4(6-m)$.

1° 当$m>6$时,$\Delta<0$且$m+3>0$.

∴ 原不等式的解为一切实数.

2° 当$m=6$时,原不等式为$(3x+2)^2>0$.

∴ 原不等式的解为$x\neq -\frac{2}{3}$且$x\in R$.

3° 当$-3<m<6$时,$\Delta>0$且$m+3>0$.

∴ 原不等式的解为

$x>\frac{-m+\sqrt{6-m}}{m+3}$或$x<\frac{-m-\sqrt{6-m}}{m+3}$.

4° 当$m<-3$时,$\Delta>0$且$m+3<0$.

∴ 原不等式的解为

$$\frac{-m+\sqrt{6-m}}{m+3}<x<\frac{-m-\sqrt{6-m}}{m+3}.$$

应用分类思想解题，关键在于确定分类标准，使所分的各类既不重叠又不疏漏，且有利于将复杂问题转化为简单问题. 在前面例6中，按集合 B 的四种可能情况，分为四类求解；例9中，按解脱绝对值符号的关键点进行分类；对于例10，解法中作了两次分类，首先按此不等式是否为一元二次不等式，即按不等式中二次项系数是否为零分为两类. 在确定原不等式为一元二次不等式后，再按判别式 Δ 与0的关系分类，使原不等式转化为标准不等式求解.

3. 间接方法

由于 $A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$ 以及 $\bar{\bar{A}}=A$，因此，在分析集合 A 的性质时，也可以通过分析 $\overline{A}$ 的性质实现. 实际上，这是数学中常用的间接处理问题的方法，其中 $\bar{\bar{A}}=A$ 反映了反证法的基本思路.

例11 不大于1000的自然数中，既不是3的倍数，也不是5的倍数的自然数共有多少？

分析 设不大于1000的自然数的全体为全集 I，其中，3的倍数或5的倍数的自然数集合为 A，则所求自然数集合为 $\overline{A}$. 由此得如下解法.

解 ∵ 不大于1000的自然数中，3的倍数共有333个，5的倍数共有200个，15的倍数共有66个，

∴ 不大于1000的自然数中，3的倍数或5的倍数的自然数共有 $333+200-66=467$(个).

∴ 不大于1000的自然数中，不是3的倍数也不是5的倍数的自然数共有 $1000-467=533$(个).