XING XI

信息论与或然逻辑

张文修

西安交通大学出版社

信息论与或然逻辑

张 文 修

西安交通大学出版社

内 容 提 要

或然逻辑是研究不确定性推理的逻辑，它在智能计算机的发展中有着重要的作用。本书通过胡国定先生引进的信息量及用信息的观点描述或然逻辑的基本思想，利用信息量的计算给出了或然逻辑的各种推理方式，以及在计算机上实现或然逻辑推理的方法。同时，本书也给出了大量的例子说明或然逻辑在科学研究中的应用。本书适用于计算机科技工作者及从事人工智能研究的科技工作者，也适用于从事系统科学和方法论研究的数学工作者。

(陕)新登字 007 号

信息论与或然逻辑

作者　　张文修
责任编辑　　吴寿锽

*

西安交通大学出版社出版
(邮政编码 710049)
西安交通大学出版社印刷厂印装
陕西省新华书店经销

*

开本 787×1092 1/32　印张 4.25　字数: 93 千字
1992 年 12 月第 1 版　1993 年 1 月第 1 次印刷
印数: 1—1000
ISBN7-5605-0497-3/O·86　定价: 5.10 元

序

由于计算机科学的迅速发展，人工智能的研究已成为当代科学研究的重大课题，特别是人工智能中的不确定性推理越来越多地引起人们的关注。如多值逻辑、模态逻辑、直觉主义逻辑、非单调逻辑以及模糊逻辑等应运而生。但是这些逻辑都是在数理逻辑中寻找工具，虽然应用性强，但基础薄弱。模糊逻辑通过隶属函数给出推理过程中的确定程度，由于它采用极大极小运算，又使推理过程中信息量损失太多。胡国定先生通过信息量的计算研究不确定性推理，另辟新径，为思维过程的量化开创了一条新路。它是打开高深莫测的思维科学大门的一把真正的钥匙。

胡国定先生多年来从事信息论与方法论的研究，使他能够发现思维过程中信息流动的实质。他比较了思维过程信息流动与通讯过程信息传递的异同点，引进了与香农信息量完全不同的定义。他将知识的内涵当作信息，以该内涵所对应的外延补集作为信息量，更加贴切地反映了思维推理的实质。同时新的信息量的概念，又具有香农信息量的运算性质，为研究思维过程中信息获取、信息变换、信息提取、信息组织、信息再生提供了有力的工具。

我有幸在 60 年代就跟着胡国定先生学习香农信息论。最近几年、几乎每年都有机会一起讨论他的新的信息论的观点。虽然他的一系列研究文章尚未正式发表，然而在我与他一起的私人讨论中，能够有机会掌握他的思想精髓，使我受到了很大启发。在此基础上，我和我的学生做了一些更加具体的工作。

例如引进内涵空间与外延空间，在内涵空间上建立了具有半可加测度的信息量，给出合情推理与创新思维的 10 种模式等，为我们自己开辟了一个新的研究方向。

虽然我们的研究工作是初步的，但是我们感觉到胡国定先生的新的信息论思想是丰富而深远的，对于思维科学的研究与发展是极其重要的。在胡国定先生的鼓励和支持下，我写了这本小册子来介绍胡先生的有关思想和工作，以便为更多研究思维科学与智能计算机的同志提供方便。在此我要特别说明的是，本书中引用了胡国定先生一系列尚未公开发表的文章，如《信息论与或然逻辑》、《信息是知识的内涵》、《论信息与或然推理》等。因此也借此机会表示衷心致谢。

我期望这本小册子能推进智能计算机的研究与发展。

张文修

1991.6.23

目　　录

第一章　信息与信息量

§1.1　思维过程是信息的流动过程

思维是人的重要特征。正是人类的思维活动，使人能够不断地认识世界和改造世界。

思维是个极其复杂的过程。人类在有效的思维活动中，不断地发现着规律，并将这些规律正确地应用于自己的生活。但是对思维本身的规律却不够清楚。

这并不是因为人们不重视思维规律的研究。实际上，从人类思维开始，就思维着思维的规律。思维规律和人类的思维活动同时在发展着。

在古代中国、古希腊、古印度，都有自己的思维规律研究的历史。中国古代思想家已经研究了形式逻辑中名的分类和确定名实之间的关系逻辑，研究了从一些命题推出另外一些命题的方法。但是，第一次最完备、最广泛地考察和阐述了形式逻辑的各项内容的是亚里士多德。他把形式逻辑看成是证明和论证真理的工具。17 世纪，由于科学实验技术的发展，培根详细地探讨了归纳逻辑的各种问题。与此同时，笛卡儿确立了任何科学研究都必须遵循的四条基本原则。即：不要承认任何事物是真的，除非它在思想上清楚到毫无疑问的程度；要把困难分成一些小的难点；要由简到繁，依次进行；最后，要列举并审查推理的步骤，要做得彻底，毫无遗漏的可能。

形式逻辑的思维基本上是真伪逻辑推理。要么命题是真的，要么命题是假的。推理的过程也表现为恒真命题的演算。而事实上，在人们思维过程中大量存在着不完全确定的推理方式。像归纳推理、类比推理、统计推理，像灵感、顿悟和机遇等，都是不完全确定的思维方式。这些不确定的思维方式在人们的思维活动中起着更重要的作用。

著名的数学家波利亚（G.Polya），在《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》这些堪称姊妹篇的著作中，通过大量数学实例，对数学解题研究方法进行了精彩的描述，特别是对或然推理提出了许多模式。这些富有启发性的思想，展示了不确定思维过程研究的前景。

南开大学胡国定教授多年来从事信息论与方法论的研究。信息概念的普遍性与方法论的普遍性，使他注意到思维过程中信息流动的实质。他在《信息论与或然推理》、《信息是知识的内涵》等论文中，把信息看作知识的内涵，并给出了信息的定义与数学描述，详细阐明了思维过程中信息获取、信息变换、信息提取、信息再生、信息组织的信息流动的实质和方法，用信息论的观点统一解释波利亚提出的或然推理的各种模式，并尝试推广到科学方法论的其他领域中去。

对于“信息”，有各种各样的理解。维纳（Wiener）称：“信息就是信息，既不是物质也不是能量”，“信息是有序性的度量”，“信息是系统组织的度量”。香农（Shannon）称：“信息是用以消除随机不定性的东西”。胡国定教授把信息与人的思维细胞——“概念”联系起来，认为信息就是概念的内涵，这就使信息科学从技术领域深入到人的认识领域。

概念是人类思维的细胞，没有概念就没有思维。思维过程即是概念的限定、扩张、转换、再生、组织过程。

概念往往给出一个名称，但它绝不仅仅是名称，而是压缩于一个思想中的、关于事物已经达到的大量知识的结晶。我们能够借助于概念中的思想识别被思考的事物，也能够借助于概念中的思想识别与其相似的事物的区别。这种思想即是概念的属性。概念是思维的出发点，同时它又是思维的结晶。由概念形成判断和推理，是因为概念已经是大量判断和推理的概括。概念中反映出来的思想就是信息。它既不是物质，也不是能量，但是它能够传递、变换、重新组织和再生。在思维过程中反映出来的概念的变化和运动，实质上是概念中的思想所反映的信息的变化和运动。因此，将概念的内涵看作是信息是恰当的，反映了思维过程中信息变化的实质。

事实上，人们进行思维首先离不开经验的积累和知识的积累，这就是信息的积累。没有信息的积累，就不可能提出问题，也不可能激发思维过程的进行，也不可能形成新的概念。概念是信息的集中与压缩。只有信息积累到一定阶段，才可能重新组织信息、变换信息，把积累的信息通过组织与变换集中压缩到概念中。因此，概念中的信息是集中并浓缩了的信息。这样就可以在概念中不断提取信息，通过不同的概念再生信息。这种信息提取、变换、再生、组织的过程即是人的思维过程。把概念的内涵作为信息，正是把思维过程中的实质提炼出来，为思维过程的量化研究开辟了一条新路。它是打开高深莫测的思维科学大门的一把真正的钥匙。

§1.2　信息是知识的内涵

信息是知识的内涵，是对信息概念更深层次的理解。同时，又是信息科学深入到认识领域的最有力的工具。那么，应

该怎样确定信息的量度呢？

首先让我们举两个例子。

例 1.1 假定某校有 100 名学生，健康者 90 人，生病者 10 人，其中有 1 人是重病。

用 Ω 表示某校学生 ω 的全体，A_1 表示学校中健康学生 ω 的全体，A_2 表示学校中生病学生 ω 的全体，A_3 表示学校中重病学生 ω 的全体。

考虑下面 4 个命题：

(1) 某生是某校学生，即 $\omega\in\Omega$；

(2) 某生是某校健康学生，即 $\omega\in A_1$；

(3) 某生是某校生病学生，即 $\omega\in A_2$；

(4) 某生是某校重病学生，即 $\omega\in A_3$。

显然通过"$\omega\in A_3$"，很容易确定是哪个学生，通过"$\omega\in A_2$"也比较容易确定是哪个学生，通过"$\omega\in A_1$"就很难确定是哪个学生，通过"$\omega\in\Omega$"就根本无法确定是哪个学生。这样命题"$\omega\in A_3$"提供的信息最多，"$\omega\in A_2$"提供的信息次之，"$\omega\in A_1$"提供的信息更少，"$\omega\in\Omega$"未提供任何信息。可以看出，A_i 中元素的个数与"$\omega\in A_i$"（$i\leqslant 3$）的信息量之间有着某种相反的关系，即

	人数	命题	信息量
Ω	100	$\omega\in\Omega$,	$100-100=0$
A_1	90	$\omega\in A_1$	$100-90=10$
A_2	10	$\omega\in A_2$	$100-10=90$
A_3	1	$\omega\in A_3$	$100-1=99$

例 1.2 假定某校有 100 名学生，考试成绩及格者 88 人，良好者 30 人，优秀者 5 人。

用 Ω 表示某校学生 ω 的全体，用 B_1 表示考试成绩及格的学生 ω 的全体，用 B_2 表示考试成绩良好的学生 ω 的全体，用 B_3 表示考试成绩优秀学生 ω 的全体。

考虑下面4个命题：

(1) 某生是某校学生，即 $\omega\in\Omega$；

(2) 某生是某校成绩及格的学生，即 $\omega\in B_1$；

(3) 某生是某校成绩良好的学生，即 $\omega\in B_2$；

(4) 某生是某校成绩优秀的学生，即 $\omega\in B_3$。

成绩良好的学生肯定是成绩及格的学生，成绩优秀的学生肯定是成绩良好的学生。通过"$\omega\in B_3$"比"$\omega\in B_2$"更容易识别 ω，通过"$\omega\in B_2$"比"$\omega\in B_1$"更容易识别 ω。因此，"$\omega\in B_3$"有最大的信息，"$\omega\in B_2$"次之，"$\omega\in B_1$"信息更少，"$\omega\in\Omega$"不提供任何信息。可以看出，B_i 中人数的数目与"$\omega\in B_i$"（$i\leqslant 3$）的信息量之间有某种相反的关系，即

	人数	命题	信息量
Ω	100	$\omega\in\Omega$	$100-100=0$
B_1	88	$\omega\in B_1$	$100-88=12$
B_2	30	$\omega\in B_2$	$100-30=70$
B_3	5	$\omega\in B_3$	$100-5=95$

从例 1.1 与例 1.2 可知，命题的信息量与概念的外延有着某种相反的关系。概念的外延是那些靠概念可被思考的对象的全体。外延越大，可被思考的对象就越多，提供的信息就越少。

确定概念的另外一个特征是概念的内涵，即概念所思考

对象的本质属性。比如在例 1.1 中健康由某些体格指标来确定，生病由另外的体格指标来确定，重病由重病的体格指标来确定。在例 1.2 中，及格是由业务成绩 3、4、5 分来确定的，良好是由业务成绩 4、5 分来确定的，优秀是由业务成绩 5 分来确定的。由于概念的外延与概念的内涵的关系是相反的，即外延越大的概念内涵越少，外延越小的概念内涵越大。很自然地可用概念的内涵作为概念的信息。

将例 1.1 与例 1.2 概括起来可以得到下面的一般表示方式：

Ω：空间 $\equiv$ 有穷集合

A：Ω 的子集

A 可以表示为

$$A=\{\omega\in\Omega;\ \omega \text{ 具有属性 } A(\cdot)\}$$

概念的外延可以表示为

$\omega[A]$：A 中元素 ω 的统称

概念的内涵可以表示为

$\omega[A(\cdot)]$：Ω 中具有属性 $A(\cdot)$ 的元素 ω 的统称

显然，上述两种概念表示相同，即

$$\omega[A]=\omega[A(\cdot)]$$

$\omega[A]$ 是概念的构造性（显）定义，$\omega[A(\cdot)]$ 是概念的抽象性（隐）定义。

如果 $\omega[A_1]$ 与 $\omega[A_2]$ 是基本集合 Ω 上的两个概念，称“$\omega[A_1]$ 不弱于 $\omega[A_2]$”，如果 ω 具有属性 $A_1(\cdot)$ 时必使 ω 具有属性 $A_2(\cdot)$，并记作 $A_1(\cdot)\geqq A_2(\cdot)$。显然有

$$A_1\subset A_2\Leftrightarrow A_1(\cdot)\geqq A_2(\cdot)$$

因此可以将知识的内涵 $A(\cdot)$ 看作信息。

§ 1.3 概念信息的表示方法

为了描述概念的信息，给出信息的度量，必须对概念的内涵与外延的关系进行更深入研究。

设 Ω 是一个有限集合，ω 表示 Ω 中的基本元素，A 是 Ω 中的某一子集。Ω 是研究的对象总体，ω 是研究对象中的个体，A 是研究对象的一部分。由 A 确定了一个概念 $\omega[A]$ 或 $\omega[A(\cdot)]$。$\omega[A]$ 是概念的外延表示，即概念的外延集为 A。$\omega[A(\cdot)]$ 是概念的内涵表示，即概念具有属性 $A(\cdot)$。如果用 $M(A)$ 表示 A 中所属对象的个数，称 $M(A)$ 为 A 的外延量。A 的补集 $\overline{A}=\Omega\backslash A=\{\omega\in\Omega;\ \omega\notin A\}$ 称为 $\omega[A]$ 的外延补集，$M(\overline{A})$ 是 $\omega[A]$ 的外延补集量。

为了对概念的内涵给以定量表示，研究概念内涵与外延的关系。首先有性质

(1) $A_1\subset A_2\Leftrightarrow A_1(\cdot)\geqq A_2(\cdot)\Leftrightarrow \overline{A}_1\supset \overline{A}_2$

(2) $M(A_1)\leqq M(A_2)\Leftrightarrow M(\overline{A}_1)\geqq M(\overline{A}_2)$

(3) $A_1(\cdot)\geqq A_2(\cdot)\Rightarrow M(\overline{A}_1)\geqq M(\overline{A}_2)$

若 $A'(\cdot)\leqq A(\cdot)$，称 $A'(\cdot)$是 $\omega[A]=\omega[A(\cdot)]$ 的必要属性。对于 $\omega[A(\cdot)]$ 的任意必要属性 $A''(\cdot)$，均有 $A'(\cdot)\geqq A''(\cdot)$时，称 $A'(\cdot)$ 是 $\omega[A(\cdot)]$ 的最强必要属性。

若 $A'(\cdot)\geqq A(\cdot)$，称 $A'(\cdot)$是 $\omega[A]=\omega[A(\cdot)]$ 的充分属性。对于 $\omega[A(\cdot)]$ 的任意充分属性 $A''(\cdot)$，均有 $A''\geqq A'(\cdot)$ 时，称 $A'(\cdot)$是 $\omega[A(\cdot)]$ 的最弱充分属性。

对于必要属性与充分属性有以下性质:

(4) $A'(\cdot)$ 是 $\omega[A]=\omega[A(\cdot)]$ 的必要属性

$$\Leftrightarrow A'(\cdot) \leqq A(\cdot)$$
$$\Leftrightarrow A' \supset A$$
$$\Leftrightarrow \overline{A'} \subset \overline{A}$$

(5) $A'(\cdot)$ 是 $\omega[A] = \omega[A(\cdot)]$ 的充分属性

$$\Leftrightarrow A'(\cdot) \geqq A(\cdot)$$
$$\Leftrightarrow A' \subset A$$
$$\Leftrightarrow \overline{A'} \supset \overline{A}$$

(6) $A'(\cdot)$ 是 $\omega[A] = \omega[A(\cdot)]$ 的充分必要属性

$\Leftrightarrow A'(\cdot) = A(\cdot)$

$\Leftrightarrow A'(\cdot)$ 是 $\omega[A(\cdot)]$ 的最强的必要属性

$\Leftrightarrow A'(\cdot)$ 是 $\omega[A(\cdot)]$ 的最弱的充分属性

$\Leftrightarrow A'(\cdot)$ 是 $\omega[A(\cdot)]$ 的内涵

$\Leftrightarrow A'(\cdot)$ 是 $\omega[A(\cdot)]$ 的信息

在例 1.1 中，由于 $A_3 \subset A_2$，$\overline{A}_3 \supset \overline{A}_2$，$A_3(\cdot) \geqq A_2(\cdot)$，生病 $\omega[A_2]$ 是重病 $\omega[A_3]$ 的必要属性，重病 $\omega[A_3]$ 是生病 $\omega[A_2]$ 的充分属性。在例 1.2 中，由于 $B_3 \subset B_2$，$\overline{B}_3 \supset \overline{B}_2$，$B_3(\cdot) \geqq B_2(\cdot)$，成绩良好 $\omega[B_2]$ 是成绩优秀 $\omega[B_3]$ 的必要属性，成绩优秀 $\omega[B_3]$ 是成绩良好 $\omega[B_2]$ 的充分属性。

从以上的讨论可以看到，作为知识信息的概念内涵与外延补集 $\overline{A}$ 有着极为密切的关系。可以用外延补集 $\overline{A}$ 表示 $\omega[A(\cdot)]$ 的信息，用外延补集量 $M(\overline{A})$ 表示 $\omega[A(\cdot)]$ 的信息量。

进一步将上面的论述普遍化。

设 Ω 是基本集合，它具有有限个元素。用 A，B，C 表

示 Ω 中的子集。$A\bigcup B$ 表示 A 与 B 的并集，$A\bigcap B$ 表示 A 与 B 的交集，$\overline{A}$ 表示 A 的补集。并记 $A\bigcap\overline{B}=A\diagdown B$。用 ϕ 表示空集。$A\bigcap B=\phi$，称 A 与 B 是不相容的。

对于任意 $A\subset\Omega$，对应于一个非负的有限实数 $M(A)$，且 $M(\cdot)$ 具有可加性，即对于任意 A，$B\subset\Omega$，$A\bigcap B=\phi$，有

$$M(A\bigcup B)=M(A)+M(B)$$

称 M 为 Ω 上的测度。（Ω，M）称为测度空间。

测度 M 具有以下性质

(1) $A\subset B$ 时 $M(A)\leqq M(B)$，且

$$M(B)=M(A)+M(B\diagdown A)$$

(2) 对于 Ω 中任意子集 A，B 有

$$M(A\bigcup B)=M(A)+M(B)-M(A\bigcap B)$$

(3) $M(\overline{A})=M(\Omega)-M(A)$

(4) $M(A\diagdown B)=M(A)-M(A\bigcap B)$

对于 Ω 中任意子集 A，$\omega[A]=\omega[A(\cdot)]$ 表示一个概念。$\overline{A}$ 是 $\omega[A(\cdot)]$ 的信息，$M(\overline{A})$ 即是 $\omega[A(\cdot)]$ 的信息量。特别对于 $\omega\in\Omega$，$\overline{\omega}=\Omega\backslash\{\omega\}$ 表示 $\omega[\omega]$ 的信息，$M(\overline{\omega})$ 表示 $\omega[\omega]$ 的信息量。显然有

$$M(\overline{A})=\sum_{\omega'\notin A}M(\omega')$$

$$M(\overline{\omega})=\sum_{\omega'\neq\omega}M(\omega')$$

根据测度 $M(A)$ 的性质，容易得到信息量的性质：

(1) $A(\cdot)\leqq B(\cdot)\Leftrightarrow\overline{A}\subset\overline{B}\Rightarrow M(\overline{A})\leqq M(\overline{B})$

(2) $M(\overline{A}\bigcup\overline{B})=M(\overline{A})+M(\overline{B})-M(\overline{A}\bigcap\overline{B})$

(3) $M(\overline{A}) = M(\Omega) - M(A)$

(4) $M(\overline{A} \setminus \overline{B}) = M(\overline{A}) - M(\overline{A} \cap \overline{B})$

从例 1.1 与例 1.2 看出，概念$\omega[A(\cdot)]$的信息量依赖于空间 Ω 的选取。若把某校学生限制为某班学生，相应的概念的信息与信息量都要发生变化。

设将空间 Ω 限制为新的空间C，$C \subset \Omega$。对照原来空间 Ω 中概念的信息与信息量，可以定义空间C中相应的概念的信息与信息量。

空间Ω	$\longleftrightarrow$	条件空间C
外延A	$\longleftrightarrow$	条件外延$A \cap C$
外延量$M(A)$	$\longleftrightarrow$	条件外延量$M(A \cap C)$
信息$\overline{A}$	$\longleftrightarrow$	条件信息$\overline{A} \cap C$
信息量$M(\overline{A})$	$\longleftrightarrow$	条件信息量$M(\overline{A} \cap C)$

例 1.3 (续例 1.2) 设某班有 40 个学生，在例 1.2 中成绩及格学生属于某班的有 20 人，良好学生属于某班的有 10 人，优秀学生属于某班的有 1 人。于是有：

	人数	命题	信息量
C	40	$\omega \in C$	$40-40=0$
$B_1 \cap C$	20	$\omega \in B_1 \cap C$	$40-20=20$
$B_2 \cap C$	10	$\omega \in B_2 \cap C$	$40-10=30$
$B_3 \cap C$	1	$\omega \in B_3 \cap C$	$40-1=39$

由于概念 $\omega[A(\cdot)]$ 与空间 Ω 的选取有关，在讨论具体概念时必须注意 Ω 的限定。在讨论同一个问题时，Ω 不能变化，这样 $\omega[A(\cdot)]$ 内涵与信息才能保持不变。