清华附中同步辅导与测试丛书

高二数学

邵光砚 王锡祥 刘 芳
董 蓓 林 威

华大学出版社

高二
数学

清华附中同步辅导与测试丛书

高 二 数 学

邵光砚　王锡祥·　刘　芳
董　蓓　林　威

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 摘 要

本书内容与普通高中高二数学同步，并按照全套丛书的指导思想，体例和格式编写。

全书分成两部分。第一部分代数，包括反三角函数和简单三角方程、不等式、数列与数学归纳法、复数等 4 章；第二部分解析几何，包括直线、圆锥曲线、参数方程与极坐标等 3 章。每章内又分为若干单元。

各单元末有单元测试，每章后还设计了练习题，单元测试和练习题的参考答案及解题指导附在书末。

图书在版编目(CIP)数据

高二数学/邵光砚等编. —北京：清华大学出版社，1996
(清华附中同步辅导与测试丛书)
ISBN 7-302-02369-7

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 邵…　Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 22986 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)
印刷者：北京市清华园胶印厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：787×1092 1/16　印张：15　字数：353 千字
版　次：1997 年 2 月第 1 版　1997 年 2 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-02369-7/G・121
印　数：0001—5000
定　价：15.80 元

序

我校在清华大学出版社的协助下，编写了这套《清华附中同步辅导与测试丛书》，以便在今后供我校高中年级使用。

这套书包括数学、语文、物理、化学、英语 5 个学科（共 15 分册），是我校教师在长期教学实践中积累起来的丰富的教学经验的结晶，体现了清华附中"为学、健体、做人"的办学思想及"少、精、严、活"的教学原则。

每本书的顺序与教科书同步，各单元一般由知识概要、典型题解、练习题等部分组成。书末附参考答案及解题指南。

在知识概要部分对有关概念进行归纳、对比，以简明的形式——如图表等将其联系，便于学生加强对重点、难点的理解，并引导学生掌握好知识的基本规律。

典型题解是精选或编写的典型例题，重在给出解题思路和解题技巧，突出解法。

书中给出的练习题是本校教师多年教学中积累、精选、保留的练习题，题目不多，但颇具典型性和代表性，有些题目难度较大，较灵活，重在培养学生重要的、较高层次的思维能力。

我们希望这套书的出版，不仅适合我校学生各年段学习的需要，而且能获得广大高中生的欢迎。由于编写时间仓促，难免有疏漏之处，恳切期望读者批评指正。

清华大学附中

1995 年 7 月

目　　录

第一部分　代　　数

第二部分　解 析 几 何

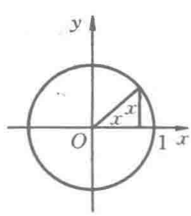
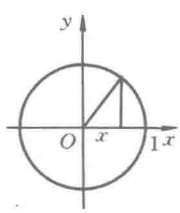
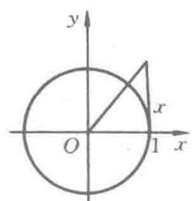
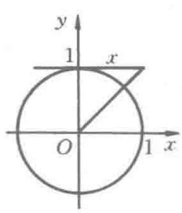
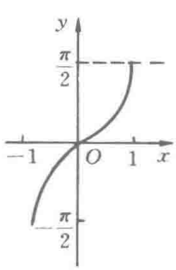
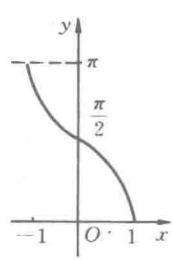
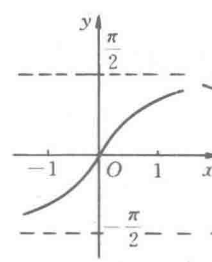
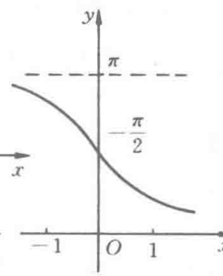
第一部分 代　　数

第一章　反三角函数和简单三角方程

第一单元　反三角函数

知识概述

表 1-1-1　反三角函数的主要内容

函数 项目	反正弦函数	反余弦函数	反正切函数	反余切函数
主　值 定义域	$y=\arcsin x$ $-1\leqslant x\leqslant 1$	$y=\arccos x$ $-1\leqslant x\leqslant 1$	$y=\mathrm{arctg}x$ $-\infty<x<\infty$	$y=\mathrm{arcctg}x$ $-\infty<x<\infty$
值　域	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ $\sin(\arcsin x)=x$	$0\leqslant y\leqslant\pi$ $\cos(\arccos x)=x$	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)=x$	$\theta<y<\pi$ $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x)=x$
几何意义				
图象				
基本性质	① 增函数 ② 奇函数 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$	① 减函数 ② 不奇不偶函数 $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$	① 增函数 ② 奇函数 $\mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}x$	① 减函数 ② 不奇不偶函数 $\mathrm{arcctg}(-x)=\pi-\mathrm{arcctg}x$
同一自变量反三角函数的关系	$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$		$\mathrm{arctg}x+\mathrm{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$	

典型题解

例 1 求下列函数的定义域与值域:

(1) $y=\sqrt{\arcsin(\log_2 x+1)}$;

(2) $y=\sqrt{\arccos(x^2-6x+6)}$;

(3) $y=\sqrt{\arccos(x^2-3x+2)}$.

解:(1) 要使函数有意义,不仅需要考虑反正弦函数的定义域与值域,而且要考虑对数函数的定义域与值域.

$$\begin{cases}\arcsin(\log_2 x+1)\geqslant 0,\\ -1\leqslant \log_2 x+1\leqslant 1,\\ x>0.\end{cases}$$

得
$$-1\leqslant \log_2 x\leqslant 0,$$

即
$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.$$

函数的定义域是 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,

又
$$0\leqslant \arcsin(\log_2 x+1)\leqslant \frac{\pi}{2},$$

于是
$$0\leqslant \sqrt{\arcsin(\log_2 x+1)}\leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

即
$$0\leqslant y\leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

函数的值域是 $y\in\left[0,\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right]$.

(2) 要使函数有意义,需要

$$\arccos(x^2-6x+6)\geqslant 0,$$

即
$$-1\leqslant x^2-6x+6\leqslant 1.$$

于是
$$\begin{cases}x^2-6x+5\leqslant 0, & (1\text{-}1\text{-}1)\\ x^2-6x+7\geqslant 0, & (1\text{-}1\text{-}2)\end{cases}$$

由(1-1-1)式得
$$1\leqslant x\leqslant 5;$$

由(1-1-2)式得
$$x\geqslant 3+\sqrt{2}\ \text{或}\ x\leqslant 3-\sqrt{2}.$$

所以函数的定义域是 $x\in[1,3-\sqrt{2}]\cup[3+\sqrt{2},5]$;

又
$$0\leqslant \arccos(x^2-6x+6)\leqslant \pi,$$

得
$$0\leqslant y\leqslant \sqrt{\pi}.$$

故函数的值域是 $y\in[0,\sqrt{\pi}]$.

(3) 要使函数有意义,只需要

$$-1 \leqslant x^2 - 3x + 2 \leqslant 1,$$

即
$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leqslant 1, \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant -1, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 \leqslant 0, & (1\text{-}1\text{-}3) \\ x^2 - 3x + 3 \geqslant 0. & (1\text{-}1\text{-}4) \end{cases}$$

由(1-1-3)式有 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$,

由(1-1-4)式有 $x \in R$.

由于 $x^2 - 3x + 2 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$,所以当 $x \in \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$时,$-\dfrac{1}{4} \leqslant x^2 - 3x + 2 \leqslant 1$. 又反余弦函数是减函数,因此 $\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) \geqslant \arccos(x^2 - 3x + 2) \geqslant \arccos 1 = 0$. 函数的值域是:$y \in \left[0, \sqrt{\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)}\right]$.

说明:求反三角函数与其他初等函数复合的函数定义域与值域时,要照顾复合的各函数,然后利用方程(组)或不等式(组)的知识求解. 在解题过程中要特别注意隐条件,如本题中的(2)、(3)两个小题,题目十分相像,但解的过程却有不小的区别. 因为(2)题中,当 $x \in [1, 3-\sqrt{2}] \cup [3+\sqrt{2}, 5]$时,$-1 \leqslant x^2 - 6x + 6 \leqslant 1$ 的两边等号均可成立,而题(3)中当 $x \in \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$时,$-1 \leqslant x^2 - 3x + 2 \leqslant 1$ 中左边的等号不成立。因此必须研究 $x^2 - 3x + 2$ 在区间$\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$上的最小值,这里就是运用了二次函数在闭区间内有最值的隐条件.

例2 求下列各式的值:

(1) $\arccos\left[\sin\left(-\dfrac{27\pi}{10}\right)\right]$;

(2) $\arcsin(\cos 4)$;

(3) $\arccos(\sin 5)$.

解:在求解时要注意反三角函数的主值区间.

(1) 原式 $= \arccos\left[\sin\left(-2\pi - \dfrac{7\pi}{10}\right)\right] = \arccos\left(-\sin\dfrac{7\pi}{10}\right)$

$$= \arccos\left[-\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right)\right] = \arccos\left(-\cos\frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \pi - \arccos\left(\cos\frac{\pi}{5}\right) = \frac{4\pi}{5}.$$

(2) 原式 $= \arcsin\left[-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 4\right)\right] = -\arcsin\left[\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 4\right)\right]$

$$= -\left(\frac{3\pi}{2} - 4\right) = 4 - \frac{3\pi}{2}.$$

(3) 原式 $= \arccos\left[-\cos\left(5 - \dfrac{3\pi}{2}\right)\right] = \pi - \arccos\left[\cos\left(5 - \dfrac{3\pi}{2}\right)\right]$

$$= \pi - \left(5 - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{2} - 5.$$

说明：对三角函数施行反三角运算时，通常采取 ①将三角函数化至与反三角运算同名 ②将角化至该反三角函数的定义区间.

例 3 用反正弦表示 $2\operatorname{arctg}2+\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

解：设 $\operatorname{arctg}2=\alpha \quad \left(\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $\operatorname{tg}\alpha=2$， 而 $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$，

$$\therefore \quad \cos^2\alpha=\frac{1}{5},\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

从而 $$\sin^2 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}.$$

$$\cos 2\alpha=-\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=-\frac{3}{5}.$$

设 $$\arccos\frac{4}{5}=\beta,\text{则 } 0<\beta<\frac{\pi}{2},\cos\beta=\frac{4}{5},\sin\beta=\frac{3}{5}.$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \sin\left[2\operatorname{arctg}2+\arccos\frac{4}{5}\right]&=\sin(2\alpha+\beta)\\&=\sin 2\alpha\cdot\cos\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin\beta\\&=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{3}{5}\\&=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}\end{aligned}$$

$$\because \quad \frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2},\text{则}\frac{\pi}{2}<2\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2},$$

$$\therefore \quad 2\operatorname{arctg}2+\arccos\frac{4}{5}=\pi-\arcsin\frac{7}{25}.$$

说明：要用反三角函数表示角，必须先确定角的范围，才能写出正确的结果.

例 4 求证：$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

分析：要证等式成立，只要证

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{7}-\operatorname{arctg}\frac{1}{8}.$$

证明：第一步：左边取正切，有

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}}=\frac{\frac{8}{15}}{1-\frac{1}{15}}=\frac{4}{7}.$$

右边取正切，有

$$\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4}-\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right)\right]=\frac{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right)}$$

$$=\frac{1-\dfrac{\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}}{1-\dfrac{1}{7}\times\dfrac{1}{8}}}{1+\dfrac{\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}}{1-\dfrac{1}{7}\times\dfrac{1}{8}}}=\frac{1-\dfrac{3}{11}}{1+\dfrac{3}{11}}=\frac{4}{7}.$$

所以左边与右边的角正切值相等.

第二步:

$\because$ $\quad 0<\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}<\dfrac{\pi}{4},\quad 0<\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}<\dfrac{\pi}{4}.$

$\therefore$ $\quad 0<\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}<\dfrac{\pi}{2};$

又 $\quad 0<\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}<\dfrac{\pi}{12}\quad\left(\because \operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}\right),$

并且 $\quad 0<\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}<\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{\pi}{4}-\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi}{12},$

$$0<\frac{\pi}{4}-\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right)<\frac{\pi}{2}.$$

所以在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$之间,正切值相等的角是唯一的,左边=右边,即原式成立.

说明:证明此类问题一定要分两步证,第一步两边同时取反三角函数的同名反函数,证明两边的三角函数值相等,第二步要讨论左右两边表示的角在同一单调区间内,值相等则角是唯一的,则证明毕,这两步缺一不可.

例 5 求函数 $f(u)=\arcsin(\sin n)$ 当 $n=1,3,4,5,7$ 时的值.

分析:注意 n 值弧度数所在区间,要变成反正弦函数的主值区间内,从而求出值来.

解:(1) 当 $n=1$ 时,$\because\ 1\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\therefore\ f(1)=\arcsin(\sin 1)=1.$

(2) 当 $n=3$ 时,$3\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right).$

而 $\sin 3=\sin(\pi-3)$,$\pi-3\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore\ f(3)=\arcsin(\sin 3)=\arcsin[\sin(\pi-3)]=\pi-3.$

(3) 当 $n=4$ 时,$4\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$,

而 $\sin 4=\sin(\pi-4)$,$\pi-4\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$,

$\therefore\ f(4)=\arcsin(\sin 4)=\arcsin[\sin(\pi-4)]=\pi-4.$

(4) 当 $n=5$ 时,$5\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$,

而 $\sin 5=\sin(5-2\pi)$,$5-2\pi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$,

$\therefore\ f(5)=\arcsin(\sin 5)=\arcsin[\sin(5-2\pi)]=5-2\pi.$

(5) 当 $n=7$ 时，$7\in\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$，

而 $\sin7=\sin(7-2\pi)$，$7-2\pi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore f(7)=\arcsin(\sin7)=\arcsin[\sin(7-2\pi)]=7-2\pi.$

说明：当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$\arcsin(\sin x)=x$. 当 $x\notin\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$时，要先用诱导公式将 $\sin x$ 转化为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的三角函数，化为上面情况，方法是

当 $x\in\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$\arcsin(\sin x)=x-2k\pi$；

当 $x\in\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right]$时，$\arcsin(\sin x)=2k\pi+\pi-x\qquad(k\in z)$.

例 6 解不等式$\dfrac{\arccos x-2}{\arcsin x}<-1$.

解：原不等式化为

$$\frac{\arccos x+\arcsin x-2}{\arcsin x}<0.$$

当 $x\in[-1,0)\cup(0,1]$时，$\arccos x+\arcsin x=\dfrac{\pi}{2}$，

因此 $\arccos x+\arcsin x-2=\dfrac{\pi}{2}-2<0$，原不等式化为 $\arcsin x>0$. $\therefore$ 原不等式的解是 $x\in(0,1]$.

说明：此例中用到了反三角函数的重要性质：$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$，　$x\in[-1,1]$. 相应地，还有另一个性质：$\mathrm{arctg}x+\mathrm{arcctg}x=\dfrac{\pi}{2}$，$x\in R$.

例 7 用两种方法求使 $\arccos(-x)<\arccos x$ 成立的 x 的取值范围.

解法一：由于反余弦函数是减函数，要使原不等式成立，只需

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ -x>x.\end{cases}$$

解得　　$x\in[-1,0)$

满足原不等式的 x 的取值范围是 $x\in[-1,0)$.

解法二：分别画出 $y=\arccos x$ 和 $y=\arccos(-x)$的图象(图 1-1-1). 其中实线表示 $y=\arccos x$，虚线表示 $y=\arccos(-x)$. 从图中观察，得不等式的解为 $x\in[-1,0)$

说明：利用图象比较大小是很方便的，因此要熟练掌握画函数草图的方法. 在观察图象时，要特别留心区间端点处的情况.

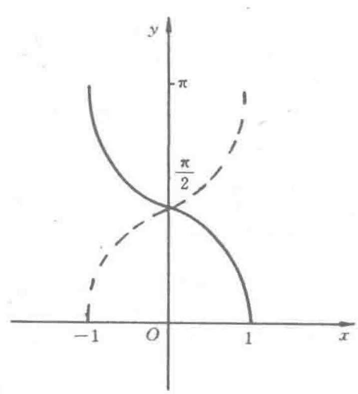


图　1-1-1

例 8 比较$\dfrac{\pi}{4}$和 $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$的

大小.

解：设 $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\alpha$，则 $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 且 α 是锐角，于是 $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

设 $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\beta$，则 $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，且 β 是锐角，于是 $\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

∵ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{15}},$$

又 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$

∴ $\alpha+\beta\doteq\arccos\dfrac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{15}}$，又 $\dfrac{\pi}{4}=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，而 $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{15}}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，反余弦函数是减函数，

∴ $\dfrac{\pi}{4}<\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

单元测试 1-1-1

一、选择题

1. $2\cdot\arcsin\left(-\dfrac{9}{10}\right)$ 所表示的角在 （ ）

(A) 第一象限； (B) 第二象限；

(C) 第三象限； (D) 第四象限.

2. 若 $\arccos x>\arccos x^2$，则 $x\in$ （ ）

(A) $[-1,1]$； (B) $(-1,1)$；

(C) $[-1,0)$； (D) $(-1,0)$.

3. 函数 $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{2}\right)$ 的定义域 （ ）

(A) $\left[\dfrac{1}{2},20\right]$； (B) $\left[-\dfrac{1}{5},20\right]$；

(C) $[1,20)$； (D) $\left[\dfrac{1}{5},20\right]$.

4. $\arcsin\left[\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]+\arccos\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]$ 的值是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$； (B) 0； (C) π； (D) $\dfrac{3\pi}{2}$.

5. 若 $\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}(x-1)=\dfrac{\pi}{4}$，则 $\arcsin\dfrac{1}{x^2}$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$； (B) $\dfrac{\pi}{4}$； (C) $\dfrac{\pi}{3}$； (D) $\dfrac{4\pi}{3}$.

二、填空题

6. 函数 $y=\frac{1}{3}|\arcsin(3x+5)|$的定义域是________,值域是________.

7. $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)=$________;

8. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\cdot\arcsin\frac{1}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\cdot\arccos 0\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(2\cdot\operatorname{arctg}1-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$________.

9. 函数 $y=\arccos\left(\frac{\sqrt{3+2x-x^2}-1}{2}\right)$的定义域为________;值域为________.

三、解答题

10. 已知 $\theta=\operatorname{arcctg}\sqrt{\cos x}-\operatorname{arctg}\sqrt{\cos x}$,求证 $\sin\theta=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$.

11. 已知 $x\in[0,1]$,求证 $\cos(\arcsin x)<\arcsin(\cos x)$.

12. 解反三角方程:$\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{x-1}=\operatorname{arctg}3x-\operatorname{arctg}x$

13. 选作题

设 $0<x<1$,求证 $2\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}+\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pi$.

第二单元　简单三角方程

知识概述

一、最简三角方程的解

表 1-1-2　最简三角方程解集

方　程	a 的值	方程的解
$\sin x=a$ $\lvert a\rvert\leqslant 1$ 有解	$\lvert a\rvert<1$	$\{x\mid x=n\pi+(-1)^n\arcsin a,\ n\in z\}$
	$a=0$	$\{x\mid x=k\pi,\ k\in z\}$
	$a=1$	$\{x\mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in z\}$
	$a=-1$	$\{x\mid x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\in z\}$
	$\lvert a\rvert>1$	无解.
$\cos x=a$ $\lvert a\rvert\leqslant 1$ 有解	$\lvert a\rvert<1$	$\{x\mid x=2k\pi\pm\arccos x,\ k\in z\}$
	$a=0$	$\{x\mid x=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in z\}$
	$a=1$	$\{x\mid x=2k\pi,\ k\in z\}$
	$a=-1$	$\{x\mid x=(2k+1)\pi,\ k\in z\}$
	$\lvert a\rvert>1$	无解.
$\operatorname{tg}x=a$	$x\in R$	$\{x\mid x=k\pi+\operatorname{arctg}x,\ k\in z\}$
$\operatorname{ctg}x=a$	$x\in R$	$\{x\mid x=k\pi+\operatorname{arcctg}x,\ k\in z\}$.

二、一般三角方程求解方法

1. 可以化成含有同一未知数的同一个函数的三角方程,可以经过三角函数的运算或者经过代数方法,将方程变成一个或几个最简三角方程,然后求出解或判断无解.

2. 可以用同一个三角函数值的两个角间关系来解的三角方程,可直接用以下定理求解:

① 若 $\sin\alpha=\sin\beta$,则 $\alpha=(-1)^k\beta+k\pi$, $(k\in z)$.

② 若 $\cos\alpha=\cos\beta$,则 $\alpha=2k\pi\pm\beta$, $(k\in z)$.

③ 若 $\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\beta$,则 $\alpha=k\pi+\beta$, $(k\in z)$.

④ 若 $\mathrm{ctg}\alpha=\mathrm{ctg}\beta$,则 $\alpha=k\pi+\beta$, $(k\in z)$.

3. 可化成一边为零而另一边是若干个因式的积的三角方程,一般是利用代数方法将一边化成是若干因式的积,而另一边是零,从而求出解来.

4. 关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的齐次方程的解法,

① 一次齐次方程的标准式

$$a\sin x+b\cos x=0,\qquad (a,b\text{ 均不为零})$$

用 $\cos x$ 去除各项,则有 $\mathrm{tg}x=-\dfrac{b}{a}$,按最简方程写出解来.

② 二次齐次方程的标准式

$$a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x=0,\qquad (a,b,c\text{ 均不为零})$$

用 $\cos^2x$ 去除方程各项,则有 $a\mathrm{tg}^2x+b\mathrm{tg}x+c=0$. 按关于 $\mathrm{tg}x$ 的一元二次方程去求解.

5. 形如 $a\sin x+b\cos x=c$(其中 a,b,c 均不为零),用引入辅助角的方法求解.

$\because$ $a^2+b^2\neq 0$,把原式变为

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)=c.$$

令
$$\cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

则原式为 $\sin(x+\phi)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

当 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant|c|$ 时,原方程的解为

$$x=n\pi+(-1)^n\arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\qquad n\in z.$$

当 $\sqrt{a^2+b^2}<|c|$ 时,原方程无解.

无论什么方法解三角方程,求出解后均要验根,以防丢根和增根.

典型题解

例 1 解三角方程 $\cos2x-3\cos x-1=0$.

解: 此方程三角函数相同,但未知数不同,一个是 $2x$,另一个是 x,要用倍角公式化成