



“十二五”国家重点图书出版规划项目

A Mathematician's

Apology

丛书主编 李文林

03 数学家思想文库（第一辑）

一个数学家的辩白

【英】哈代 著

李文林 戴宗铎 高嵘 编译



大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press



“十二五”国家重点图书出版规划项目

A Mathematician's Apology

丛书主编 李文林

03 数学家思想文库（第一辑）

一个数学家的辩白

[英]哈代 著

李文林 戴宗铎 高嵘 编译



大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

一个数学家的辩白 / (英) 哈代 (G. H. Hardy) 著 ; 李文林, 戴宗铎, 高嵘编译. -- 大连 : 大连理工大学出版社, 2019. 6

ISBN 978-7-5685-2037-9

I. ①一… II. ①哈… ②李… ③戴… ④高… III. ①数学—文集 IV. ①O1-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 100879 号

YIGE SHUXUEJIA DE BIANBAI

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84708943 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://dutp.dlut.edu.cn

辽宁星海彩色印刷有限公司印刷

大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm

印张:5.5

字数:84 千字

2019 年 6 月第 1 版

2019 年 6 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦 王 伟

责任校对:婕 琳

封面设计:冀贵收

ISBN 978-7-5685-2037-9

定 价:25.00 元

本书如有印装质量问题,请与我社发行部联系更换。

读读大师 走近数学

——“数学家思想文库”总序

数学思想是数学家的灵魂

数学思想是数学家的灵魂。试想：离开公理化思想，何谈欧几里得、希尔伯特？没有数形结合思想，笛卡儿焉在？没有数学结构思想，怎论布尔巴基学派？……

数学家的数学思想当然首先体现在他们的创新性数学研究之中，包括他们提出的新概念、新理论、新方法。牛顿、莱布尼茨的微积分思想，高斯、波约、罗巴切夫斯基的非欧几何思想，伽罗瓦“群”的概念，哥德尔不完全性定理与图灵机，纳什均衡理论，等等，汇成了波澜壮阔的数学思想海洋，构成了人类思想史上不可磨灭的篇章。

数学家们的数学观也属于数学思想的范畴，这包括他们对数学的本质、特点、意义和价值的认识，对数学知识来源及其与人类其他知识领域的关系的看法，以及科学方法论方面的见解，等等。当然，在这些问题上，古往今来数学家们的意见是很不相

同有时甚至是对立的。但正是这些不同的声音，合成了理性思维的交响乐。

正如人们通过绘画或乐曲来认识和鉴赏画家或作曲家一样，数学家的数学思想无疑是人们了解数学家和评价数学家的主要依据，也是数学家贡献于人类和人们要向数学家求知的主要内容。在这个意义上我们可以说：

“数学家思，故数学家在。”

数学思想的社会意义

数学思想是不是只有数学家才需要具备呢？当然不是。数学是自然科学、技术科学与人文社会科学的基础，这一点已越来越成为当今社会的共识。数学的这种基础地位，首先是由于它作为科学的语言和工具而在人类几乎一切知识领域获得日益广泛的应用，但更重要的恐怕还在于数学对于人类社会的文化功能，即培养发展人的思维能力特别是精密思维能力。一个人不管将来从事何种职业，思维能力都可以说是无形的资本，而数学恰恰是锻炼这种思维能力的体操。这正是为什么数学会成为每个受教育的人一生中需要学习时间最长的学科之一。这并不是说我们在学校中学习过的每一个具体的数学知识点都会在日后的生活与工作中派上用处，数学对一个人终身发展的影响主要在于

思维方式。以欧几里得几何为例，我们在学校里学过的大多数几何定理日后大概很少直接有用甚或基本不用，但欧氏几何严格的演绎思想和推理方法却在造就各行各业的精英人才方面有着毋庸置疑的意义。事实上，从牛顿的《自然哲学的数学原理》到爱因斯坦的相对论著作，从法国大革命的《人权宣言》到马克思的《资本论》，乃至现代诺贝尔经济学奖得主们的论著中，我们都不难看到欧几里得的身影。另一方面，数学的定量化思想更是以空前的广度与深度向人类几乎所有的知识领域渗透。数学，从严密的论证到精确的计算，为人类提供了精密思维的典范。

一个戏剧性的例子是在现代计算机设计中扮演关键角色的所谓“程序内存”概念或“程序自动化”思想。我们知道，第一台电子计算机(ENIAC)在制成之初，由于计算速度的提高与人工编制程序的迟缓之间的尖锐矛盾而濒于夭折，在这一关键时刻，恰恰是数学家冯·诺依曼提出的“程序内存”概念拯救了人类这一伟大的技术发明。直到今天，计算机设计的基本原理仍然遵循着冯·诺依曼的主要思想，冯·诺依曼因此被尊为“计算机之父”(虽然现在知道他并不是历史上提出此种想法的唯一数学家)。像“程序内存”这样似乎并非“数学”的概念，却要等待数学家并且是冯·诺依曼这样的大数

学家的头脑来创造,这难道不耐人寻味吗?

因此,我们可以说,数学家的数学思想是全社会的财富。数学的传播与普及,除了具体数学知识的传播与普及,更实质性的是数学思想的传播与普及。在科学技术日益数学化的今天,这已越来越成为一种社会需要了。试设想:如果有越来越多的公民能够或多或少地运用数学的思维方式来思考和处理问题,那将会是怎样一幅社会进步的前景啊!

读读大师 走近数学

数学是数与形的艺术,数学家们的创造性思维是鲜活的,既不会墨守成规,也不可能作为被生搬硬套的教条。学习了解数学家的数学思想当然可以通过不同的途径,而阅读数学家特别是数学大师们的原始著述大概是最直接可靠和富有成效的做法。

数学家们的著述大体有两类。大量的当然是他们论述自己的数学理论与方法的专著。对于致力于真正原创性研究的数学工作者来说,那些数学大师们的原创性著作无疑是最生动的教材。拉普拉斯就常常对年轻人说:“读读欧拉,读读欧拉,他是我们所有人的老师。”拉普拉斯这里所说的“所有人”,恐怕主要还是指专业的数学家和力学家,一般人很难问津。

数学家们另一类著述则面向更为广泛的读者，有的就是直接面向公众。这些著述包括数学家们数学观的论说与阐释(用 G. 哈代的话说就是“关于数学”的论述)，也包括对数学知识和他们自己的数学创造的通俗介绍。这类著述与板起面孔讲数学的专著不同，具有较大的可读性，易于为公众接受，其中不乏脍炙人口的名篇佳作。有意思的是，一些数学大师往往也是语言大师，如果把写作看作语言的艺术，他们的这些作品正体现了数学与艺术的统一。阅读这些名篇佳作，不啻是一种艺术享受，人们在享受之际认识数学，了解数学，接受数学思想的熏陶，感受数学文化的魅力。这正是我们编译出版这套“数学家思想文库”的目的所在。

“数学家思想文库”选择国外近现代数学史上一些著名数学家论述数学的代表性作品，专人专集，陆续编译，分辑出版，以飨读者。第一辑编译的是希尔伯特(D. Hilbert, 1862—1943)、哈代(G. Hardy, 1877—1947)、冯·诺依曼(J. von Neumann, 1903—1957)、布尔巴基(N. Bourbaki, 1935—)、阿蒂亚(M. F. Atiyah, 1929—)等 20 世纪数学大师的文集(其中哈代、布尔巴基与阿蒂亚的文集属再版)。第一辑出版后获得了广大读者的欢迎，多次重印。受此鼓舞，我们续编了“数学家思想文库”第二辑。第二辑选编了克莱因(F. Klein,

1849—1925)、外尔(H. Weyl, 1885—1955)、柯尔莫戈洛夫(A. H. Колмогоров, 1903—1987)、华罗庚(1910—1985)、陈省身(1911—2004)等数学巨匠的著述。这些文集集中的作品大都短小精悍,魅力四射,充满科学的真知灼见,在国内外流传颇广。相对而言,这些作品可以说是数学思想海洋中的珍奇贝壳、数学百花园中的美丽花束。

我们并不奢望这样一些“贝壳”和“花束”能够扭转功利的时潮,但我们相信爱因斯坦在纪念牛顿时所说的话:

“理解力的产品要比喧嚣纷扰的世代经久,它能经历好多个世纪而继续发出光和热。”

我们衷心希望本套丛书所选编的数学大师们“理解力的产品”能够在传播数学思想,弘扬科学文化的现代化事业中放射光和热。

读读大师,走近数学,所有的人都会开卷受益。

李文林

(中科院数学与系统科学研究院)

2018年7月于北京中关村

目 录

- 导言 纯粹数学的旗手——哈代 /1
一个数学家的辩白 /15
数学证明 /80
混合种群的孟德尔比率 /122
印度数学家拉马努金 /125
J-型数学家和 S-型数学家 /160
附录 哈代简历 /163

导 言

纯粹数学的旗手——哈代

在数学史上,“剑桥分析学派”是一个响亮的名字。但剑桥分析学派可分成性质上完全不同的前后两个时期。前期剑桥分析学派从巴贝奇(C. Babbage)等创立“分析学会”(1812)始,至麦克斯韦(C. Maxwell)臻于顶峰,几乎延贯整个 19 世纪,主要是以分析为工具的数学物理学派;而后期剑桥分析学派,以哈代和利特尔伍德(J. E. Littlewood)为代表,活跃于 20 世纪上半叶,则是以分析为“目的”的纯粹数学学派。剑桥数学的这种转变,对 20 世纪上半叶纯粹数学的发展有着不容忽视的影响。作为后期剑桥分析学派领袖的哈代,在数论、调和分析、函数论等众多领域作出了具有经典意义的成果,他创立的一些重要方法已渗透到其他的数学部门。这些结果与方法不仅改变了剑桥分析学派的面貌,而且在某种意义上影响了整个分析的风格。与此同时,哈代对数学的本质、意义与价值所发表的一系列观点与见解,对于从 19 世纪后期开始的数学

纯粹化的趋势起到了推波助澜的作用。换言之,哈代是20世纪纯粹数学卓越的贡献者和不倦的辩护士。要理解20世纪上半叶作为一种文化现象的纯粹数学的发展,乃至20世纪整个数学的历史进程,哈代的著作与论述是不可不读的。

哈代于1877年2月7日生于英国萨里(Surrey)郡克兰利(Cranleigh)的一个教师家庭。自幼受到良好教育。13岁进入当时有数学家摇篮之称的温彻斯特(Winchester)学院。1896年入剑桥大学三一学院,1900年获剑桥大学数学荣誉考试(Mathematical Tripos)^①一等第一名(first wrangler),同年成为三一学院成员(fellow)^②。1901年获史密斯奖(Smith. S Prize)。1906年起任剑桥大学讲师。这期间哈代发表了大量学术论文,建立了一个分析学家的声誉,并于1908年出版了影响广泛的《纯粹数学教程》(*A Course of Pure Mathematics*)。1910年哈代当选为英国皇家学会会员。1911年结识利特尔伍德,两人长期合作,携

① Mathematical Tripos: 剑桥大学数学荣誉考试,始于18世纪上半叶,参试者为各学院毕业生,用以测定他们的数学才能。导师根据平时的了解将学生编成3个班,其中1、2班为 wrangler(一等荣誉获得者)候选人,考试最优者为 first wrangler(一等第一名),以下依次为二等第二名(second wrangler),一等第三名……tripos原意为“三脚凳”,因早期剑桥学士学位获得者中的最优者需坐于一三脚凳上接受他人的提问而得名。 wrangler原意则为“辩论者”。

② fellow: 在英国剑桥、牛津等大学特有的学院(college)体制中,学院成员(fellow)资格只被授予那些已具有相当水平与地位的学者。“fellow”有时也被译作“研究员”“院委”或“校董”。但有人有意无意地将其译作“院士”是不当的。

手创建了蜚声世界数坛的英国分析学派(即后期剑桥分析学派)。1919年,哈代应聘为牛津大学萨维尔(Savile)几何教授,在那里,他又建立了一个生气勃勃的研究集体。1931年,哈代重返剑桥,出任萨德林(Sadleirian)纯粹数学教授,直到1942年退休。在他生命的最后一年,哈代当选为法国科学院外籍院士,并荣获英国皇家学会授予他的最高荣誉科普利(Copley)奖章。1947年12月1日,哈代在剑桥病逝。

哈代一生数学成果累累,其中贡献最为卓越的领域是解析数论。哈代与他的学派通过他们所建立的概念与方法,为这一古典的数学领域注入了新的活力,开创了20世纪数论研究的新局面。1914年,哈代成功地证明了黎曼- ζ 函数(Riemann zeta-function)有无穷多个零点位于直线 $\sigma = \frac{1}{2}$ 上,这是在举世瞩目的数学名题黎曼猜想的研究历史上取得的第一个实质性突破。其后哈代又与利特尔伍德合作证明(1921)了:存在着数 A 使 $N_0(T) > AT$,此处 $N_0(T)$ 表示黎曼- ζ 函数 $\zeta(s)$ 在线段 $\frac{1}{2} + it (0 < t \leq T)$ 上的零点个数。哈代-利特尔伍德定理作为黎曼猜想研究的最好记录保持了二十年之久,影响绵延至今。哈代与拉马努金(Ramanujan)共同引进(1918)并与利特尔伍德系统发

展的“圆法”，使整数分拆、华林(E. Waring)问题、哥德巴赫(C. Goldbach)猜想等一系列著名数论问题的研究取得了大刀阔斧的进展。哈代关于三角级数收敛性、发散级数求和、积分变换、陶伯(A. Tauber)型定理和不等式诸方面的广泛深入的研究结果，大大丰富了调和分析的整个领域。特别是他引入的 H^p 空间(1915)，后以“哈代空间”著称，至今仍是复分析中十分活跃的领域。

除了 350 余篇论文，哈代还给后人留下了 8 部专著。前面已提到的《纯粹数学教程》在 1952 年发行到第 10 版，熏陶了一代英国年轻的数学家，并被译成多国文字。哈代的其余著作，大多是他在某一领域研究的总结。其中如《不等式》(1934)、《数论导引》(1938)、《发散级数》(1949)等也都是脍炙人口的名作。

哈代在其学术生涯的晚年，曾发表了一些他所谓的“关于数学”的论述，其中流传最广的便是在本书中列为首篇的《一个数学家的辩白》(A Mathematician's Apology, 1940, 第一版)。这篇作品其实可称之为“纯粹数学辩护词”，哈代在其中对纯粹数学的对象、本质、研究动机与价值意义等一系列问题坦陈己见，是 20 世纪部分数学家中具有代表性的一篇数学思想文献。

把数学看成一种艺术，可以说是《一个数学家

的辩白》的主调。“数学家跟画家或诗人一样，也是造型家”，区别仅仅在于：画家造型用形与色，诗人用语言，而数学家则是“用概念来塑造”。

既然数学是一种艺术，那么“数学家的造型与画家或诗人的造型一样，必须美。”“美是首要的标准；不美的数学在世界上是找不到永久容身之地的”。这种以美为至上标准的“概念造型”艺术，就是哈代心目中的纯粹数学。除了美，哈代还提出评价数学的另一条标准——严肃，即数学概念与定理必须具有一定的“普遍性”和“深刻性”。哈代根据“美”与“严肃”这两条标准，将数学分成了“真正”的数学和“不足称道”的数学，并且认为“不足称道的数学总的来说是有用的，而真正的数学总的来说是无用的”。当然哈代随即说明这里的“有用”，是指“目前或不久的将来可能有助于改进人类物质生活”。哈代反对用这样的“有用”来衡量数学家的工作，认为“真正职业数学家的一生是不可能靠其工作的‘实用性’来评价的”，“如果检验标准就是这样，那么阿贝尔(Abel)、黎曼和庞加莱(Poincaré)都浪费了他们的生命”。但另一方面，哈代认为“有用的东西主要是技巧，而数学技巧主要是通过纯数学来传播的”，在这样的意义下，哈代指出“纯数学就总体而言显然比应用数学有用”。

对数学本质的讨论，是一个既古老又常新的课

题。把数学看作艺术也不是从哈代开始的。这里提一下比哈代略早的庞加莱的观点也许是有意义的。庞加莱曾说道：“数学家首先会从他们的研究中体会到类似于绘画和音乐那样的乐趣；他们赞赏数和形的美妙的和谐；当一种新的发现揭示出意外的前景，他们会感到欢欣鼓舞……他们所体验的这种欢愉难道没有艺术的特征吗？”庞加莱接着说：“我想大胆提出，它（数学）还有艺术的目的”，并指出“那些没有物理应用的数学理论也同样值得研究”。与哈代不同的是，庞加莱认为数学有“三重目的”，“首先，它为自然的研究提供工具；其次，它具有哲学的目的”；最后则是上述的艺术的目的。哈代却以艺术作为数学的几乎唯一的目的。因此，说哈代是现代数学中“为艺术而艺术”倾向的先锋与旗手，那是毫不夸张的。这种“为艺术而艺术”的倾向，对于排除对数学及数学研究的功利主义和实用主义观点，推动 20 世纪上半叶纯粹数学的独立发展，具有一定的积极意义。

对数学对象的认识，也是数学家数学观中一个重要的组成部分。哈代也表述了自己对这一问题的见解。他认为数学对象（包括概念、定理等）是一种独立的客观实在，“数学实在存在于我们之外，我们的作用是去发现或观察它，我们证明的被夸张地描述成我们的‘造物’的定理，仅仅是我们观察的

记录”。哈代在这里所持的是一种“实在论”的观点,这种观点当然也不是他的发明,而如他自己所说是为柏拉图(Plato)以来许多数学家所主张的。只不过也像在其他许多场合一样,哈代采取的是更为极端的立场。比《一个数学家的辩白》更早,在一篇关于数学基础的讲演(《数学证明》,1928)中,哈代曾解释过他的“数学实在”。作为一条基本的哲学准则,他说道:“当我们知道了一个定理,我们就是知道了某种东西,某种客观的东西;当我们相信了一个定理,我们就是相信了某种东西;至于我们相信的东西正确与否,那是无所谓的。”这种将错误的概念与命题也当作客观实在的、近乎虚玄的数学实在论,哈代却认为正是自己有别于当时所有的三个数学哲学学派的地方。

20世纪初,集合论的悖论引发了关于数学基础的激烈争论,并产生了数学哲学的三大学派——逻辑主义、直觉主义和形式主义。当时有许多数学家都卷入了这场争论,哈代作为一位对哲学问题感兴趣的、“正在工作”的数学家,对此亦未袖手旁观,而是以他素有的好辩投入了这场争论。1928年他应邀从牛津回到剑桥作鲍尔(Rouse Ball)讲演,这就是本书选译的《数学证明》一文。从这篇讲演,我们还可以嗅到当时这场论战的火药味。哈代在其中对数理逻辑三大学派作了综合评述,分析了它们