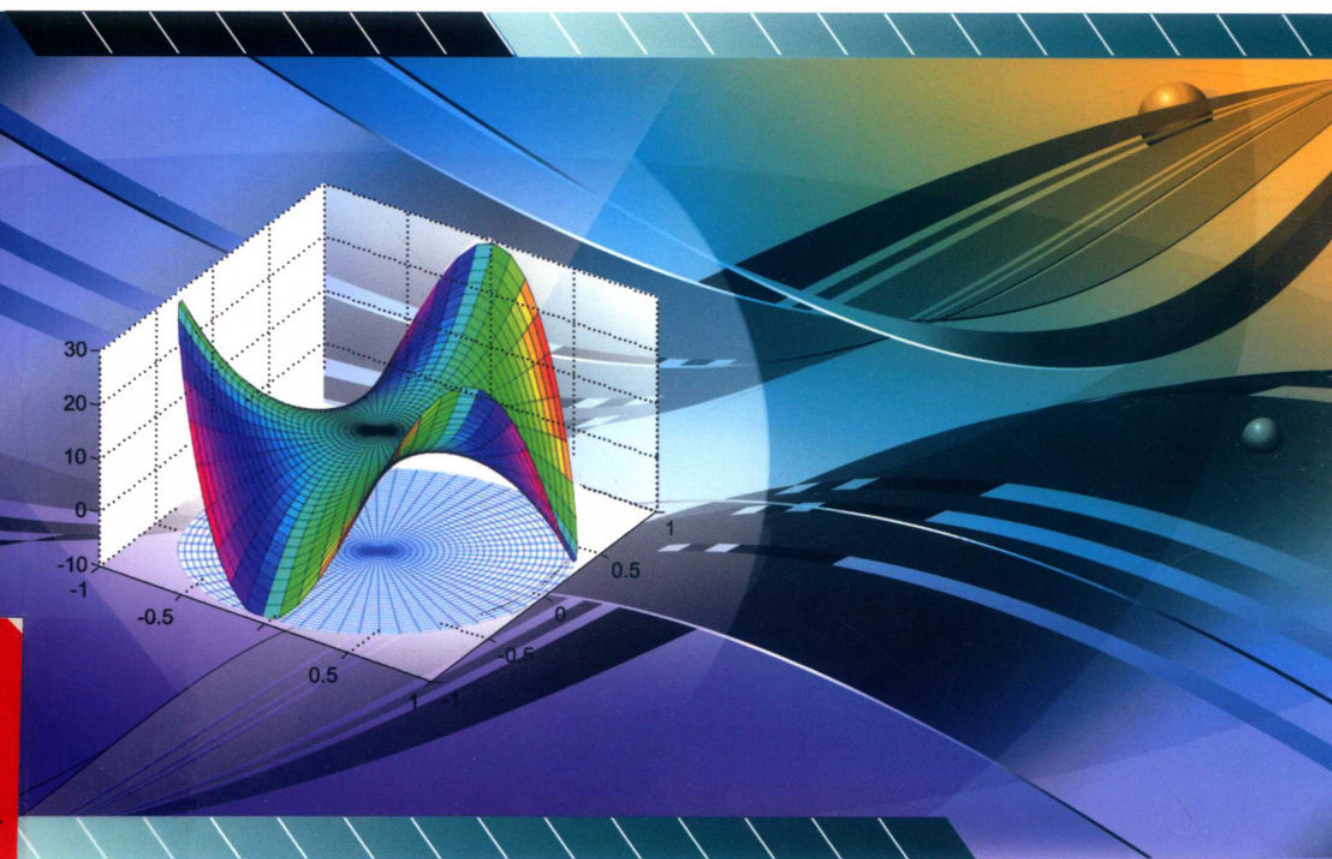


四川省“十二五”普通高等教育本科规划教材

数学物理方法与仿真

Simulation Practice for
Methods of Mathematical Physics, Third Edition
(第3版)

• 杨华军 江 萍 编著



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

四川省“十二五”普通高等教育本科规划教材

数学物理方法与仿真

(第3版)

杨华军 江 萍 编著

贵州师范学院内部使用

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书系统地阐述了复变函数论、数学物理方程的各种解法、特殊函数以及计算机仿真编程实践等内容,对培养思维能力和实践编程能力具有指导意义。本书在取材的深度和广度上充分考虑到前沿学科领域知识内容,形成了具有前沿学科特点的数学物理方法与计算机仿真相结合的系统化理论体系。

本书结构层次清晰,理论具有系统性和完整性,重点立足于对思维能力的培养,加强计算机仿真能力的训练,分别介绍了复变函数、数学物理方程和特殊函数的计算机仿真求解及其解的仿真图形显示。习题解答和仿真程序等可以通过网络下载。

本书可作为物理学、地球物理学、电子信息科学、光通信技术、空间科学、天文学、地质学、海洋科学、材料科学等学科领域的理工科大学本科教材,也可供相关专业的研究生、科技工作者作为参考资料并进行计算机仿真训练。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法与仿真/杨华军,江萍编著. —3版. —北京:电子工业出版社,2020.3

ISBN 978-7-121-29534-8

I. ①数… II. ①杨… ②江… III. ①数学物理方法-高等学校-教材 ②计算机仿真-高等学校-教材 IV. ①O411.1 ②TP391.9

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第290020号

责任编辑:章海涛

印 刷:北京盛通商印快线网络科技有限公司

装 订:北京盛通商印快线网络科技有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编:100036

开 本:787×1092 1/16 印张:26.5 字数:678千字

版 次:2005年5月第1版

2020年3月第3版

印 次:2020年3月第1次印刷

定 价:62.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888,88258888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式:192910558(QQ群)。

序

将数学思想方法应用于现代高新技术专业领域,并构建成典型的数学物理模型和解决问题的方法,从而形成了科学研究中实用性很强的数学物理方法。数学物理方法既利用了精妙的数学思想,又联系了具体的研究任务和研究目标。建立数学物理模型并给出解决方法,尤其是计算机仿真解法,是思维和研究任务、数学和物理模型有机结合的方法,是统一数学思想和物理模型的系统化理论。脱离了数学思维,具体研究任务就失去了理论指导方法;脱离了所研究的对象(物理模型),数学思维就难以发挥其解决实际问题的巨大潜能。既非数学思想也非物理模型本身能达到尽善尽美,只有两者的有机结合才能形成推动人类科学技术赖以发展的动力之源。

在这里,不妨引用柯朗在《数学物理方法》一书(德文版)序言中的一段话加以描述,“从17世纪以来,物理的直观,对于数学问题和方法是富有生命力的根源,然而近年来的趋向和时尚,已将数学与物理间的联系减弱了,数学家离开了数学的直观根源,而集中推理精致和着重于数学的公设方面,甚至有时忽视数学与物理学以及其他科学领域的整体性。而且在许多情况下,物理学家也不再体会数学家的观点,这种分裂无疑对于整个科学界是一个严重的威胁。科学发展的洪流可能逐渐分裂成为细小而又细小的溪渠,以至于干涸,因此有必要引导我们的努力转向于将许多有特点的和各式各样的科学事实的共同点,将其相互关联加以阐明,以重新统一这种分离的趋向”(译文引自该书中译本)。或许我们今天所应做的正是柯朗所指出的。数学物理方法也正是将这种分裂进行重新统一并实现有机结合的具体体现。

本书系统阐述了复变函数论、数学物理方程、特殊函数以及计算机仿真与实践4篇内容,精妙的数学思想与深刻的物理内涵在浅显的文字和系统的逻辑思维下,显得易于理解并颇具趣味性。本书既加强了数学理论和物理模型的联系,又加强了数学物理问题中典型实例的计算机仿真方法。计算机仿真编程篇中详细给出了计算机仿真编程思想和实践方法,这对于加强计算机仿真求解数学物理典型问题具有积极的理论意义和实际意义。使用计算机仿真软件解决专业技术问题(建立物理模型)是科学工作者进行科学研究最为重要的辅助设计方法。这无论对于培养大学本科生、研究生的理论知识水平和思维能力以及实践编程能力都具有积极的意义。

数学物理方法在高等数学和大学物理(包括力学、热学、声学、光学和电磁学)的基础上,既拓深了高等数学的内容,又给出了各个专业技术领域里具有普遍意义的典型物理模型的数学解法,同时为四大力学(理论力学、电动力学、统计力学和量子力学)和其他专业课程有关的数学物理问题做了准备,起到了承上启下的作用。本书既是数学理论的延续,又是物理模型的解决方法,是数学理论方法在专业理论中典型应用的系统性的产物,是数学和物理学系统理论的结晶。

本书不仅可以使读者学习到系统的基础理论,而且能引导读者通过对具体物理过程的分析,抓住主要因素,对物理现象建立系统的数学模型(即用数学理论来分析、模拟物理现象),并对数学模型(如微分方程)进行分析、求解(包括计算机仿真求解和动态演示),以达到对物

理现象的深入了解。本书将引导读者从纯数学的学习转入将数学和物理紧密结合,将抽象的数学理论应用于实际物理问题的具体方法的学习,有利于培养读者分析问题和解决问题的能力。

读者在学习本书中所获得的数理知识的提高以及思维能力的训练,将使他们终身受益。

刘盛纲
中国科学院院士
2020 年 1 月

前 言

为适应 21 世纪“数学物理方法”课程教学改革发展的需要,并加强理、工科专业本科生(研究生)的计算机编程实践能力的培养,作者本着将系统的数学物理方法理论知识与计算机仿真编程实践相结合的愿望编写了本书。全书包括复变函数、数学物理方程、特殊函数、计算机仿真与实践共 4 篇,系统而全面地阐述了数学物理方法的内容,加强了典型实例分析和理论总结。

复变函数篇系统阐述了复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数定理、保角变换,利用复变函数系统理论中的各种基本定理或公式求解一个典型的环路积分,从而将各章节的内容联系起来,使复变函数理论成为一个系统的有机整体。本篇加强了对发散思维的培养、创新思维的启发和计算机仿真编程实践能力的训练。

数学物理方程篇讨论了线性和非线性数学物理问题,主要对满足线性叠加原理的数学物理方程进行了详细讨论,包括数学模型的建立、数学物理方程的分类(双曲型、抛物型和椭圆型方程)和标准化,并详细讨论了线性方程的求解方法。求解方法具体包括:① 行波法(又称达朗贝尔解法);② 分离变量法(数学物理方程的主要解法);③ 幂级数解法;④ 格林函数法;⑤ 积分变换法;⑥ 保角变换法;⑦ 变分法;⑧ 计算机仿真解法(利用 Matlab 中的偏微分方程工具箱 PDEtool 求解)。该篇最后对数学物理方程的解法进行了综述,对典型的非线性 KdV 方程给出了孤立波解,对典型的非线性 Burgers 方程给出了冲击波解。

特殊函数篇通过对勒让德方程、连带勒让德方程以及球谐函数方程解的讨论,分别引出了勒让德多项式、连带勒让德函数以及球函数,介绍了其基本性质及本征值问题,讨论了在定解问题中的应用;对贝塞尔方程解的讨论引出了第一、第二、第三类贝塞尔函数,介绍了贝塞尔函数的基本性质、本征值问题及其在定解问题中的应用;初步讨论了虚宗量贝塞尔方程、球贝塞尔方程的解及其对应的特殊函数性质。

计算机仿真与实践篇主要介绍利用数学工具软件和常用计算机语言实现对复变函数、数学物理方程以及特殊函数的计算或求解进行计算机仿真。计算机仿真方法可以广泛应用于科学研究中,并能对研究结果进行直观的显示(对随时间变化的波动方程和热传导方程能动态演示解的图形分布)。

本书还有配套的丰富的网络资源,主要包括:① 数学物理基础篇(包括矢量基础和矢量场论部分);② 全书习题答案,难题的详细解答,计算机仿真程序;③ 几类特殊函数(如埃尔米特多项式、拉盖尔多项式等)的引入及其基本理论介绍;④ 典型的数学问题、物理问题、数学物理问题的讨论与计算机仿真,以及数学定理的仿真实验,从而加强创新思维的启发以及计算机仿真能力的训练;⑤ 电子课件。读者可从 <http://www.hxedu.com.cn> (华信教育资源网)或<http://www.uestc.edu.cn> 电子科技大学精品课程“数学物理方法”中下载。

本书中的部分理论、典型实例和计算机仿真源于作者在美国加州大学(圣巴巴拉分校)研究访问期间所查询的大量外国原版书籍内容,同时也参阅了大量国内同行专家们的文献资料,谨此对他们的辛勤劳动表示由衷的谢意!作者衷心感谢刘盛纲院士在百忙之中阅读了本书并提出了宝贵意见和建议。作者向本书的责任编辑和电子工业出版社的热情支持表示由衷的谢意!作者也向为本书的编写付出过劳动的博士生、硕士生们表示感谢!他们是伍振海、何修军、刘长久、蔡杨伟男、赵晓云等。

在本书落笔时,作者油然感悟到对浩瀚宇宙中科学知识的渴望和自身认知科学的肤浅。在荏苒的时光中,作者所想表达的愿望和读者的期望未必能达到和谐一致。限于作者水平,未能尽意的文字只能起到抛砖引玉的作用,谨此诚挚地希望广大读者提出宝贵意见和建议 (E-mail:yanghj@ uestc.edu.cn),疏漏之处恳请专家和读者不吝指正。

作 者

目 录

第一篇 复变函数

第1章 复数与复变函数	3	2.1.2 复变函数的微分概念	30
1.1 复数概念及其运算	3	2.1.3 可导的必要条件	30
1.1.1 复数概念	3	2.1.4 可导的充分必要条件	32
1.1.2 复数的基本代数运算	4	2.1.5 求导法则	33
1.2 复数的表示	4	2.1.6 复变函数导数的几何意义	34
1.2.1 复数的几何表示	4	2.2 解析函数	35
1.2.2 复数的三角表示	6	2.2.1 解析函数的概念	35
1.2.3 复数的指数表示	6	2.2.2 解析函数的法则	36
1.2.4 共轭复数	7	2.2.3 函数解析的充分必要条件	37
1.2.5 复球面、无穷远点	7	2.2.4 解析函数的几何意义(映射的 保角性)	39
1.3 复数的乘幂与方根	8	2.3 初等解析函数	40
1.3.1 复数的乘幂	8	2.3.1 指数函数(单值函数)	40
1.3.2 复数的方根	9	2.3.2 对数函数——指数函数的 反函数(多值函数)	41
1.3.3 实践编程:正十七边形的几何 作图法	10	2.3.3 三角函数(单值函数)	43
1.4 区域	11	2.3.4 反三角函数(多值函数)	45
1.4.1 基本概念	11	2.3.5 双曲函数(单值函数)	46
1.4.2 区域的判断方法及实例分析	14	2.3.6 反双曲函数(多值函数)	47
1.5 复变函数	14	2.3.7 整幂函数 z^n (单值函数)	47
1.5.1 复变函数概念	14	2.3.8 一般幂函数与根式函数 $w=\sqrt[n]{z}$ (多值函数)	48
1.5.2 复变函数的几何意义——映射	15	2.3.9 多值函数的基本概念	49
1.6 复变函数的极限	16	2.4 解析函数与调和函数的关系	51
1.6.1 复变函数极限概念	16	2.4.1 调和函数与共轭调和函数的 概念	51
1.6.2 复变函数极限的基本定理	17	2.4.2 解析函数与调和函数之间的 关系	51
1.7 复变函数的连续	18	2.4.3 解析函数的构建方法	52
1.7.1 复变函数连续的概念	18	2.5 解析函数的物理意义——平面 矢量场	53
1.7.2 复变函数连续的基本定理	18	2.5.1 用解析函数表述平面矢量场	53
1.8 典型综合实例	19	2.5.2 静电场的复势	54
小结	23	2.6 典型综合实例	56
习题1	25		
计算机仿真编程实践	26		
第2章 解析函数	28		
2.1 复变函数导数与微分	28		
2.1.1 复变函数的导数	28		

小结	58	4.1.2 复数项级数的判断准则和定理	89
习题 2	59	4.2 复变函数项级数	91
计算机仿真编程实践	60	4.3 幂级数	93
第 3 章 复变函数的积分	61	4.3.1 幂级数概念	93
3.1 复变函数积分及性质	61	4.3.2 收敛圆与收敛半径	94
3.1.1 复变函数积分的概念	61	4.3.3 收敛半径的求法	95
3.1.2 复积分存在的条件及计算方法	62	4.4 解析函数的泰勒级数展开式	98
3.1.3 复积分的基本性质	62	4.4.1 泰勒级数	98
3.1.4 复积分的计算典型实例	63	4.4.2 将函数展开成泰勒级数的方法	99
3.1.5 复变函数环路积分的物理意义	64	4.5 罗朗级数及展开方法	100
3.2 柯西积分定理及其应用	65	4.5.1 罗朗级数	100
3.2.1 柯西积分定理	65	4.5.2 罗朗级数展开方法实例	103
3.2.2 不定积分	66	4.5.3 用级数展开法计算闭合环路积分	105
3.2.3 典型应用实例	68	4.6 典型综合实例	105
3.2.4 柯西积分定理(柯西-古萨定理)的物理意义	68	小结	108
3.3 基本定理的推广——复合闭路定理	69	习题 4	110
3.4 柯西积分公式	72	计算机仿真编程实践	112
3.4.1 有界区域的单连通柯西积分公式	72	第 5 章 留数定理	113
3.4.2 有界区域的复连通柯西积分公式	73	5.1 解析函数的孤立奇点	113
3.4.3 无界区域的柯西积分公式	74	5.1.1 孤立奇点概念	113
3.5 柯西积分公式的几个重要推论	76	5.1.2 孤立奇点的分类及其判断定理	113
3.5.1 解析函数的无限次可微性(高阶导数公式)	76	5.2 解析函数在无穷远点的性质	117
3.5.2 解析函数的平均值公式	78	5.3 留数概念	118
3.5.3 柯西不等式	78	5.4 留数定理与留数和定理	120
3.5.4 刘维尔定理	79	5.5 留数的计算方法	121
3.5.5 莫勒纳定理	79	5.5.1 有限远点留数的计算方法	121
3.5.6 最大模原理	79	5.5.2 无穷远点的留数计算方法	123
3.5.7 代数基本定理	80	5.6 用留数定理计算实积分	125
3.6 典型综合实例	80	5.6.1 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ 型积分	125
小结	85	5.6.2 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ 型积分	127
习题 3	86	5.6.3 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx (a > 0)$ 型积分	128
计算机仿真编程实践	88	5.6.4 其他类型(积分路径上有奇点)的积分计算举例	130
第 4 章 解析函数的幂级数表示	89	5.7 典型综合实例	132
4.1 复数项级数的基本概念	89	小结	136
4.1.1 复数项级数概念	89	习题 5	137

计算机仿真编程实践	139	6.3.1 幂函数映射	150
第6章 保角映射	140	6.3.2 指数函数 $w=e^z$ 映射	151
6.1 保角映射的概念	140	* 6.3.3 儒可夫斯基函数映射	152
6.2 分式线性映射	141	6.4 典型综合实例	153
6.2.1 分式线性映射的概念	141	小结	156
6.2.2 两种基本映射	142	习题6	157
6.2.3 分式线性映射的性质	143	计算机仿真编程实践	158
6.2.4 分式线性映射的确定及应用	145	第一篇复变函数论全篇总结框图	158
6.2.5 三类典型的分式线性映射	148	第一篇综合测试题	159
6.3 几个初等函数所构成的映射	150		

第二篇 数学物理方程

第7章 数学建模——数学物理定解问题	162	8.2 数学物理方程的分类	184
7.1 数学建模——波动方程类型的建立	163	8.3 二阶线性偏微分方程标准化	187
7.1.1 波动方程的建立	163	8.4 线性偏微分方程解的特征	190
7.1.2 波动方程的定解条件	169	8.5 典型综合实例	191
7.2 数学建模——热传导方程类型的建立	171	小结	192
7.2.1 数学物理方程——热传导类型方程的建立	171	习题8	193
7.2.2 热传导(或扩散)方程的定解条件	174	计算机仿真编程实践	193
7.3 数学建模——稳定场方程类型的建立	175	第9章 行波法与达朗贝尔公式	194
7.3.1 稳定场方程类型的建立	175	9.1 二阶线性偏微分方程的通解	194
7.3.2 泊松方程和拉普拉斯方程的定解条件	176	9.2 二阶线性偏微分方程的行波解	195
7.4 数学物理定解理论	177	9.3 达朗贝尔公式	196
7.4.1 定解条件和定解问题的提法	177	9.3.1 一维波动方程的达朗贝尔公式	196
7.4.2 数学物理定解问题的适定性	178	9.3.2 达朗贝尔公式的物理意义	197
7.4.3 数学物理定解问题的求解方法	178	9.4 达朗贝尔公式的应用	197
7.5 典型综合实例	178	9.4.1 齐次偏微分方程求解	197
小结	181	9.4.2 非齐次偏微分方程的求解	200
习题7	181	9.5 定解问题的适定性验证	201
计算机仿真编程实践	182	9.6 典型综合实例	202
第8章 二阶线性偏微分方程的分类	183	小结	205
8.1 基本概念	183	习题9	206
		计算机仿真编程实践	206
		第10章 分离变量法	207
		10.1 分离变量理论	207
		10.1.1 偏微分方程变量分离及条件	207
		10.1.2 边界条件可实施变量分离的条件	208

10.2 直角坐标系下的分离变量法	208	11.2.1 施图姆-刘维尔本征值问题	246
10.2.1 分离变量法介绍	208	11.2.2 施图姆-刘维尔本征值问题的性质	247
10.2.2 解的物理意义	211	11.2.3 广义傅里叶级数	249
10.2.3 三维形式的直角坐标分离变量	212	11.2.4 复数的本征函数族	249
10.2.4 直角坐标系分离变量例题分析	213	11.2.5 希尔伯特空间矢量分解	250
10.3 二维极坐标系下拉普拉斯方程的分离变量法	217	11.3 综合实例	250
10.4 球坐标系下的分离变量法	219	小结	251
10.4.1 拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 的分离变量(与时间无关)	219	习题 11	252
10.4.2 与时间有关的方程的分离变量	221	计算机仿真编程实践	252
10.4.3 亥姆霍兹方程的分离变量	222	第 12 章 格林函数法	253
10.5 柱坐标系下的分离变量	223	12.1 格林公式	253
10.5.1 与时间无关的拉普拉斯方程分离变量	223	12.2 解泊松方程的格林函数法	253
10.5.2 与时间相关的方程的分离变量	225	12.3 无界空间的格林函数基本解	256
10.6 非齐次二阶线性偏微分方程的解法	225	12.3.1 三维球对称情形	257
10.6.1 泊松方程非齐次方程的特解法	225	12.3.2 二维轴对称情形	257
10.6.2 非齐次偏微分方程的傅里叶级数解法	227	12.4 用电像法确定格林函数	258
10.7 非齐次边界条件的处理	229	12.4.1 上半平面区域第一边值问题的格林函数构建方法	259
10.8 典型综合实例	231	12.4.2 上半空间内求解拉普拉斯方程的第一边值问题	260
小结	235	12.4.3 圆形区域第一边值问题的格林函数构建	261
习题 10	237	12.4.4 球形区域第一边值问题的格林函数构建	262
计算机仿真编程实践	239	12.5 典型综合实例	264
第 11 章 幂级数解法——本征值问题	240	小结	265
11.1 二阶常微分方程的幂级数解法	240	习题 12	266
11.1.1 幂级数解法理论概述	240	计算机仿真编程实践	267
11.1.2 常点邻域上的幂级数解法(勒让德方程的求解)	241	第 13 章 积分变换法求解定解问题	268
11.1.3 奇点邻域的级数解法(贝塞尔方程的求解)	243	13.1 傅里叶变换及性质	268
11.2 施图姆-刘维尔本征值	246	13.1.1 傅里叶变换	268
		13.1.2 广义傅里叶变换	269
		13.1.3 傅里叶变换的基本性质	271
		13.2 拉普拉斯变换及性质	276
		13.2.1 拉普拉斯变换	276
		13.2.2 拉普拉斯变换的性质	278
		13.2.3 拉普拉斯变换的反演	281
		13.3 傅里叶变换法解数学物理定解问题	283

13.3.1 弦振动问题	284	14.2 保角变换法求解定解问题典型 实例	295
13.3.2 热传导问题	285	习题 14	299
13.3.3 稳定场问题	286	计算机仿真编程实践	299
13.4 拉普拉斯变换解数学物理 定解问题	288	第 15 章 数学物理方程综述	300
13.4.1 无界区域的问题	288	15.1 线性偏微分方程解法综述	300
13.4.2 半无界区域的问题	288	15.2 非线性偏微分方程	301
小结	290	15.2.1 孤立波	302
习题 13	292	15.2.2 冲击波	303
第 14 章 保角变换法求解定解问题 ...	294	小结	304
14.1 保角变换与拉普拉斯方程边值 问题的关系	294	第二篇综合测试题	305

第三篇 特殊函数

第 16 章 勒让德多项式——球函数 ...	308	16.5.3 球面上函数的广义 傅里叶级数	323
16.1 勒让德方程及其解的表示	308	16.5.4 拉普拉斯方程的非轴对称定解 问题	324
16.1.1 勒让德方程、勒让德多项式	308	16.6 典型综合实例	325
16.1.2 勒让德多项式的表示	308	小结	328
16.2 勒让德多项式的性质及其 应用	311	习题 16	331
16.2.1 勒让德多项式的性质	311	计算机仿真编程实践	331
16.2.2 勒让德多项式的应用(广义 傅里叶级数展开)	313	第 17 章 贝塞尔函数	332
16.3 勒让德多项式的生成函数 (母函数)	315	17.1 贝塞尔方程及其解	332
16.3.1 勒让德多项式的生成函数的 定义	315	17.1.1 贝塞尔方程	332
16.3.2 勒让德多项式的递推公式	316	17.1.2 贝塞尔方程的解	333
16.4 连带勒让德函数	318	17.2 三类贝塞尔函数的表示式及 性质	333
16.4.1 连带勒让德函数的定义	318	17.2.1 第一类贝塞尔函数	333
16.4.2 连带勒让德函数的微分表示 ...	319	17.2.2 第二类贝塞尔函数	335
16.4.3 连带勒让德函数的积分表示 ...	320	17.2.3 第三类贝塞尔函数	335
16.4.4 连带勒让德函数的正交关系与 模的公式	320	17.3 贝塞尔函数的基本性质	336
16.4.5 连带勒让德函数——广义傅里叶 级数	320	17.3.1 贝塞尔函数的递推公式	336
16.4.6 连带勒让德函数的递推公式 ...	321	17.3.2 贝塞尔函数与本征值问题	338
16.5 球函数	321	17.3.3 贝塞尔函数的正交性和模	340
16.5.1 球函数的方程及其解	321	17.3.4 广义傅里叶-贝塞尔级数	341
16.5.2 球函数的正交关系和 模的公式	322	17.3.5 贝塞尔函数的母函数(生成 函数)	342
		17.4 虚宗量贝塞尔方程及其解	343
		17.4.1 虚宗量贝塞尔方程的解	343
		17.4.2 第一类虚宗量贝塞尔函数的	

性质	344	表示式	346
17.4.3 第二类虚宗量贝塞尔函数的		17.5.6 球形区域内的球贝塞尔	
性质	345	方程的本征值问题	347
17.5 球贝塞尔方程及其解	345	17.6 典型综合实例	348
17.5.1 球贝塞尔方程	345	小结	350
17.5.2 球贝塞尔方程的解	345	习题 17	352
17.5.3 球贝塞尔函数的级数表示	346	计算机仿真编程实践	353
17.5.4 球贝塞尔函数的递推公式	346	第三篇综合测试题	353
17.5.5 球贝塞尔函数的初等函数			
第四篇 计算机仿真与实践			
第 18 章 计算机仿真在复变函数中的			
应用	355		
18.1 复数运算和复变函数的图形 ...	355	19.1.1 用 GUI 解 PDE 问题	371
18.1.1 复数的基本运算	355	19.1.2 计算结果的可视化	372
18.1.2 复数的运算	355	19.2 计算机仿真编程求解偏微分	
18.1.3 复变函数的图形	357	方程	374
18.2 复变函数的极限与导数、解析		19.2.1 双曲型:波动方程的求解	374
函数	360	19.2.2 抛物型:热传导方程的求解	377
18.2.1 复变函数的极限	360	19.2.3 椭圆型:稳定场方程的求解	379
18.2.2 复变函数的导数	361	19.2.4 点源泊松方程的适应解	381
18.2.3 解析函数	361	19.2.5 亥姆霍兹方程的求解	382
18.3 复变函数的积分与留数定理 ...	362	19.3 定解问题的计算机仿真显示 ...	383
18.3.1 非闭合路径的积分计算	362	19.3.1 波动方程解的动态演示	384
18.3.2 闭合路径的积分计算	362	19.3.2 热传导方程解的分布	385
18.4 复变函数级数	364	19.3.3 泊松方程解的分布	386
18.4.1 复变函数级数的收敛及其		19.3.4 格林函数解的分布	387
收敛半径	364	19.3.5 本征值问题中本征函数的	
18.4.2 单变量函数的泰勒级数展开 ...	365	分布	388
18.4.3 多变量函数的泰勒级数展开 ...	366	计算机仿真编程实践	389
18.5 傅里叶变换及其逆变换	367	第 20 章 特殊函数的计算机仿真	
18.5.1 傅里叶积分变换	367	应用	390
18.5.2 傅里叶逆变换	368	20.1 连带勒让德函数、勒让德多项式、	
18.6 拉普拉斯变换及其逆变换	368	球函数	390
18.6.1 拉普拉斯变换	368	20.1.1 连带勒让德函数	390
18.6.2 拉普拉斯逆变换	369	20.1.2 勒让德多项式	390
计算机仿真编程实践	370	20.1.3 球函数	391
第 19 章 数学物理方程的计算机仿真		20.1.4 勒让德多项式的母函数图形 ...	391
求解	371	20.2 贝塞尔函数(柱函数)	
19.1 用偏微分方程工具箱求解		及其性质	392
偏微分方程	371	20.2.1 贝塞尔函数及仿真	392
		20.2.2 虚宗量贝塞尔函数	394
		20.2.3 球贝塞尔函数的图形	394

20.2.4 平面波用柱面波形式展开	395	21.2.1 基模高斯光束的传输特性 仿真	400
20.2.5 定解问题的图形显示	396	21.2.2 光子晶体中本征值问题的 仿真	403
20.3 其他特殊函数	397	21.3 特殊函数应用仿真实践—— 布拉格光纤光传输特性仿真 ...	405
计算机仿真编程实践	397	参考文献	410
第 21 章 数学物理方法仿真实践	398		
21.1 复变函数仿真实践	398		
21.2 数学物理方程仿真实践	400		

第一篇 复变函数

主要内容:复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数定理、保角变换。

重点:解析函数、复变函数的积分与留数定理。

特色:通过一典型环路积分,将各章节有机联系起来,使复变函数理论成为一个系统的有机整体,并加强了各部分内容之间的相互联系,注重培养学生创新思维、计算机仿真和解决实际问题的能力。

数学发展的历史告诉我们:虚数是在代数运算过程中开始出现的。早在16世纪,对一元二次、一元三次代数方程求解时就引入了虚数的基本思想。1545年,卡丹诺(Girolamo Cardano, 1501—1576年,意大利数学家)在他的 *Ars Magna* 一书中给出了虚数的符号和运算法则,但同时也对这种运算的合法性表示怀疑。卡丹诺对虚数引入的基本思想:

一元三次方程 $x^3+px+q=0$ (其中 p, q 为实数) 的求根公式,通常也叫做卡丹诺(Cardano)公式:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

因为在复数域中立方根一般是3个,因而简记为:

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \text{ 和 } \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

式中, α, β 分别给出三个值 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 。在应用卡丹诺公式中,对于某一个确定的 α_i , 需要满足条件 $\alpha_i \beta_j = -p/3$ 的 β_j 组合构成其解,以实现解的限制,限制后的解 $x = \alpha_i + \beta_j$ 为3个。读者可参考库洛什著《高等代数教程》。

需特别指出:可以证明,当 $x^3+px+q=0$ 有3个不同的实根时,若要用公式法来求解,则不可能不经过负数开方(范德瓦尔登著《代数学》,丁石孙译,科学出版社,1963年)。至此,我们明白了这样的事实,此方程根的求得必须引入虚数概念。

卡丹诺公式出现于17世纪,那时虚数的地位就已初步确定下来,但对虚数的本质还缺乏认识。“虚数”这个名词是由17世纪的法国数学家笛卡儿(Descartes)正式取定的。“虚数”代表的意思是“虚假的数”、“实际不存在的数”,后来还有人“论证”虚数应该被排除在数的世界之外。由此给虚数披上了一层神秘的外衣。

18世纪,瑞士数学家欧拉(Leonhard · Euler, 1707—1783年)试图进一步解释虚数到底是什么数,他把虚数称为“幻想中的数”或“不可能的数”。他在《对代数的完整性介绍》(1768—1769年在俄国出版,1770年在德国出版)一书中说:因为所有可以想象的数或者比零大,或者比零小,或者等于零,即为有序数。所以很清楚,负数的平方根不能包括在可能的有序数中,就其概念而言,它应该是一种新的数,而就其本性来说它是不可能的数。因为它们只存在于想象之中,所以通常叫做虚数或幻想中的数。于是,欧拉首先引入符号 i 作为虚数单位。

18 世纪末至 19 世纪初,挪威测量学家威塞尔(Wessel)、瑞士的工程师阿尔甘(Argand)以及德国的数学家高斯(Gauss)等都对“虚数”(也称为“复数”)给出了几何解释,并使复数得到了实际应用。

特别是在 19 世纪,有三位代表性人物,即柯西(Cauchy, 1789—1857 年)、维尔斯特拉斯(Weierstrass, 1815—1897 年)、黎曼(Rieman, 1826—1866 年)。柯西和维尔斯特拉斯分别应用积分和级数研究复变函数,黎曼研究复变函数的映射性质,经过他们的不懈努力,终于建立了系统的复变函数论。至此,披在虚数身上的神秘外衣才算真正被揭开,复变函数论才在数学科学的丛林之中昂然挺立,独树一帜。从柯西算起,复变函数论已有 170 多年的历史,复变函数论以其完美的理论与精湛的技巧成为数学的一个重要组成部分。

自从有了复变函数论,实数领域中的禁区或不能解释的问题,如负数不能开偶数次方、负数没有对数、指数函数无周期性、正弦函数、余弦函数的绝对值不能超过 1 等,已经迎刃而解。

根据数学理论,在系统的函数论中所涉及的函数有:实变实值,实变复值,复变实值,复变复值。复变函数论主要讨论复变复值函数。需要指出的是,系统的复变函数论主要包括单值解析复变函数论、多值复变函数论(黎曼曲面理论)、几何函数论、留数理论、广义解析函数等方面的内容。限于篇幅,本篇主要讨论单值解析复变函数论,具体讨论复数与复变函数、解析函数及复变函数的积分、级数展开、留数等系统理论,并介绍保角变换、傅里叶变换和拉普拉斯变换。

当人们澄清了复数的概念并建立了系统的复变函数论后,新的问题是:能否在保持复数的基本性质条件下对复数系进行新的扩张呢?答案是否定的。当哈密顿(Hamilton)试图寻找三维空间复数的类似物时,他发现自己被迫要作两个让步:第一,他的新数要包含 4 个分量;第二,他必须牺牲乘法的交换律。这两个特点都是对传统数系的革命。他称这种新的数为“四元数”。“四元数”的出现昭示着传统观念下数系扩张的结束,否则必须抛弃数系传统的基本性质——交换律。

“四元数”说明:将复变函数再进一步推广就是以 $1, i, j, k$ 为基的四元数: $q = t + xi + yj + zk$, 其中 t, x, y, z 是实数, i, j, k 是基单元。注意四元数全体不能构成域,因为它不满足乘法的交换律。读者可参考相关文献资料。

数学的思想一旦冲破传统模式的藩篱,便会产生无可估量的创造力。哈密顿的四元数的发明,使数学家们认识到如果可以抛弃实数和复数的交换性(即抛弃复数的基本性质)去构造一个有意义、有作用的新“数系”,那么就可以较为自由地考虑甚至偏离实数和复数的通常性质的代数构造,从而使得另一个通向抽象代数的大门被打开。我们相信,随着科学技术的不断发展,数学系统理论将不断地完善和自洽。

第 1 章 复数与复变函数

本章概述性地描述复数的基本知识和复变函数区域的基本概念及其单连通、多连通的判断,以及复变函数连续和极限的概念。区域概念及其区域判断、复变函数的极限和连续是本章的重点。同时,本章涉及计算机编程实践,以培养读者的计算机仿真能力。读者可以利用 Matlab, Mathcad, Mathematic 等数学工具软件直接进行复数及复变函数的基本运算,详细请参考第四篇。

1.1 复数概念及其运算

1.1.1 复数概念

1. 数域的拓展——复数域

在解方程时,有时会遇到负数开方的问题,但在实数范围内负数是不能开平方的。前面已经叙述,早在 18 世纪数学家欧拉就引入一个新符号 i 称为虚数单位,并规定 $i = \sqrt{-1}$ 。这样,在实数域内无解的方程 $x^2 + 1 = 0$ 在数域拓展后也有两个根: i 和 $-i$ 。这样就实现了由实数域拓展为新的数域:复数域。

2. 复数的概念

定义 1.1.1 复数 形如 $x+iy$ 的数称为复数(Complex number),记为

$$z = x + iy \quad (1.1.1)$$

或 $z = (x, y)$ 。其中, x 称为复数 z 的实部(Real Part), y 称为复数 z 的虚部(Imaginary Part),记为

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z) \quad (1.1.2)$$

或 $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$ 。

特别地,当 $x=0$,且 $y \neq 0$ 时, $z=iy$ 称为纯虚数;当 $y=0$ 时, $z=x$ 是实数。

3. 复数的集合表示

定义 1.1.2 复数集 全体复数组成的集合称为复数集,记为 C ,即

$$C = \{x+iy \mid x, y \in R\} \quad (1.1.3)$$

此处 R 为实数(Real number)集。

4. 复数相等

对于两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$,当且仅当实部 $x_1 = x_2$ 且虚部 $y_1 = y_2$ 时,才称 z_1 和 z_2 两个复数相等,记为 $z_1 = z_2$ 。

5. 复数的无序性

实数可以比较大小,是有序的,但复数不能比较大小,即复数是无序的。尽管复数的实部