高等学校教材

高等数学（上册）

东华大学应用数学系　编

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学（上册）

东华大学应用数学系　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是参照"工科类本科数学基础课程教学基本要求"，根据培养应用型创新人才的需要，并结合近年来教学改革实际和教学实践经验，经过大量的教学研究和探索后编写而成的。全书的体系结构和内容安排充分考虑了教学需要，降低了入门门槛，对微积分的基本概念和方法的介绍，力求做到结构合理、浅显易懂、易教易学，同时确保在数学上的正确性。书中着力突出微积分的应用，以帮助学生理解微积分与现实世界的紧密联系。习题的配备既考虑了对数学基本能力的训练，又适当满足部分学生能力提高和知识拓展的需要。为了方便学生学习和使用本书，书中配备了高等数学学习辅导视频供学生根据需要观看，每章还提供了客观自测题，以帮助学生自行检测学习情况。

本书分上、下两册出版。上册内容包括预备知识、一元微积分学的基本理论、方法及其应用和微分方程；下册内容包括无穷级数、空间解析几何和多元微积分学的基本理论、方法及其应用。

本书可作为工科和其他非数学类专业的高等数学（微积分）教材或教学参考书，也可供科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/东华大学应用数学系编.--北京：高等教育出版社，2019.9

ISBN 978-7-04-052451-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①东… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 161806 号

策划编辑 张彦云　责任编辑 张彦云　封面设计 姜　磊　版式设计 马　云
插图绘制 于　博　责任校对 张　薇　责任印制 赵义民

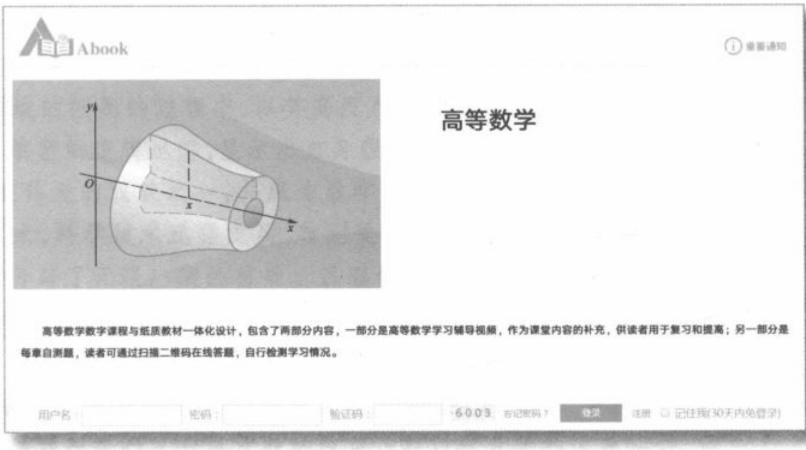
出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	三河市春园印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×960mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	22.5		
字　数	400千字	版　次	2019年9月第1版
购书热线	010-58581118	印　次	2019年9月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	44.60元

物 料 号　52451-00

高等数学

东华大学应用数学系

1. 计算机访问http://abook.hep.com.cn/1252942，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2. 注册并登录，进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

http://abook.hep.com.cn/1252942

前　言

微积分学是微分学(differential calculus)和积分学(integral calculus)的统称，英文简称 calculus，其意为计算，因为早期的微积分学主要用于解决天文、力学、几何中的计算问题。

微积分是有关运动和变化的数学分支，自诞生后的三个多世纪以来，在描述、阐明和解决来自数学、物理学、化学、工程科学、生物科学以及管理科学、经济学、社会学等诸多领域的问题的过程中，以其高度严密的理论体系、科学而优美的数学语言、灵活而缜密的逻辑思想，显示出自身强大的威力。微积分已成为举世公认的人类智慧最伟大的成就之一，并成为数学的重要组成部分之一。尤其自 20 世纪后半叶以来，科学技术迅猛发展，特别是信息技术取得了超乎想象的进展，为数学的应用开辟了无限广阔的前景。正因如此，微积分也成为现代社会中各类人才的必备知识。在全球范围内，高等数学(微积分)已经成为理工科类大学生的必修课程，同时也是其他专业大学生重要的必修或选修课程。

为了适应着力培养应用型创新人才办学目标的需要，从 2013 年秋季学期起，东华大学对数学类课程进行了分层次教学改革。经过这几年的改革实践，取得了显著成效。为了进一步巩固前期教学改革的成果，提升教学质量，适应不同专业、不同层次和不同水平的学生的学习需要，满足不同专业的培养需要以及学生今后发展所必须达到的基本要求，东华大学理学院组织编写了这套教材。本书具有以下特点：

第一，编写目标明确。数学教学的根本目的是培养和提高学生运用数学理论分析和解决实际问题的能力，必须以学生为中心，这是我们编写本书的宗旨，并为此付出了最大的努力。而高等数学(微积分)教学的根本目的是帮助学生为今后进入科学、工程及其他领域做好准备。因此，贯穿全书，我们把加强技能训练作为重点，鼓励学生直观地、形象地、解析地进行思考，以求深刻理解数学和现实世界的紧密联系。

第二，力求博采众长，形成自身的特点。学习高等数学(微积分)的方法和途径是多种多样的，各种版本的教材可谓琳琅满目，各有千秋。在编写过程中，

我们十分注意吸取国内外优秀教材的优点和长处，在保持微积分知识体系完整的前提下，对微积分基本概念、方法和应用的介绍尽量做到浅显易懂，并不过分强调严密的逻辑推理，但是仍确保在数学上是正确的。

第三，注重把数学建模的思想和方法融入课程。数学建模是一切应用科学的基础，用数学解决实际问题都是通过数学建模的过程来进行的。我们注意到，数学建模往往与各领域的实际问题以及具体的数学方法（常常可能是高深的数学方法）紧密联系。因此，我们尽量选取只涉及较为初等的数学知识同时又能体现数学建模思想和精神的案例，引导和训练学生把实际问题用数学语言明确表述，然后根据求解数学问题得到的结论和成果去解释和解决实际问题，这样可以使得学生获得运用数学建模的思想和方法去解决问题的初步能力，提高学生学习高等数学（微积分）以及更多数学知识的兴趣和积极性，提升学生的自学能力，使学生在后续专业课程的学习中更为主动。

第四，降低了课程的入门要求。考虑到选修高等数学（微积分）课程学生情况的多样性，其基础参差不齐，对微积分重要性的理解各有差异，并且不同专业的要求也不尽相同。因此，我们通过降低门槛，学生入门后再进行逐步引导的方式，来帮助学生了解和掌握本课程。

第五，习题的配备力求符合教学要求，以帮助学生加深对相关知识的理解和掌握，训练学生分析和解决问题的能力；同时适度配备了一些有一定难度的拓展性习题，以波浪线加以分隔，供学生选择性练习之用。

第六，在数字课程网站配套了高等数学学习辅导视频，为学生突破时空限制灵活安排学习提供了极大方便，且每章配备了客观自测题，以方便学生对自己的学习情况进行自主测评。

本书分上、下两册。上册介绍了预备知识、一元微积分学的基本理论、方法及其应用和微分方程；下册介绍了无穷级数、空间解析几何和多元微积分学的基本理论、方法及其应用。书中的教学内容自 2015 年秋季起在东华大学的数学类课程分层次教学改革实践中广泛试用，并在教学实践中不断修改和完善，受到了学生和教师的欢迎。

全书的编写工作由寇春海主持进行。第 0.1 节和第二、九章由李晋秀编写；第 0.2 节和第六、十章由谢峰编写；第 0.3 节和第一、七章由尤苏蓉编写；第 0.4 节和第四章由朱忠华编写；第 0.5 节和第五、八章由陈敏编写；第三、十一章由寇春海编写。初稿完成后，编者进行了反复的集体讨论，经修改后定稿。上海理工大学张卫国教授认真审阅了全书，并提出了宝贵的修改意见。在编写过程中，高等教育出版社的领导和编辑对本书的出版给予了积极帮助，东华大学教务处和理学院也给予了大力支持，在此一并致谢。

由于编者水平有限,加之编写时间仓促,错谬之处在所难免。希望各位读者在使用过程中提出宝贵的意见。我们将在今后对本书进行不断的修改,使之日臻完善。

编　者

2019 年 5 月

目 录

第〇章　预备知识 >>>

— 0.1　函数和图形 —

函数是用数学术语来描述现实世界的重要工具，它是微积分研究的主要对象.

映射与函数

一个变量的值常常取决于另一个变量的值，如：

- 圆的面积 A 取决于圆的半径 R；
- 物体做自由落体运动时产生的位移 S 取决于运动时间 t.

在上述情形中，面积 A 和位移 S 分别取决于半径 R 和运动时间 t，我们称 A 和 S 为因变量，因为它们的值是由它们所依赖的值决定的，而称 R 和 t 为自变量.

定义 1　映射

设 X 和 Y 是两个非空集合，如果存在一个对应法则 T，使得 X 中的每个元素 x 按对应法则 T 在 Y 中有唯一的元素 y 与之对应，那么称 T 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$T: X \to Y.$$

元素 y 称为元素 x 在映射 T 下的像，记作 $y=T(x)$.

元素 x 称为元素 y 在映射 T 下的原像，集合 X 称为映射 T 的定义域，Y 的子集 $T(X)=\{T(x) \mid x \in X\}$ 称为 T 的值域.

注　(1) 映射的三要素：定义域、对应法则、值域；

(2) 元素 x 的像 y 是唯一的，但 y 的原像不一定唯一.

函数

根据集合 X 和 Y 的不同情况，在不同的数学分支中，术语“映射”有着不同

的惯用名称，例如“函数”“泛函”“变换”“算子”等. 如果 X 是非空数集，Y 是一个数集（实数集 $\mathbf{R}$ 或复数集 $\mathbf{C}$），那么从 X 到 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数.

一元函数

设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则把从 D 到 $\mathbf{R}$ 的任一映射 f 称为定义在 D 上的一元函数，通常把这个函数简记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

x 称为函数的自变量，y 称为函数的因变量，习惯上也称 y 为 x 的函数.

例如，一个班级的学生按学号对应身高就构成一个一元函数.

例 1 若设计一个体积为 V 的无盖圆柱形铁桶，求该铁桶表面积 S 和底面半径 R 之间的函数关系.

解 设铁桶的高为 H，则其表面积为

$$S=\pi R^2+2\pi RH.$$

又由体积 $V=\pi R^2H$ 可得 $H=\dfrac{V}{\pi R^2}$，代入上式得

$$S=\pi R^2+2\pi R\cdot\frac{V}{\pi R^2}=\pi R^2+\frac{2V}{R}.$$

函数的定义域是由问题的背景限定的.例如上例中的自变量 R 是半径，故定义域是 $\{R\mid R>0\}$.

当我们用算式定义函数但没有明显给出定义域时，约定把使得算式有意义的一切实数组成的集合称为函数的自然定义域.

例 2 试确定函数 $y=\ln(1+x)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ 的定义域.

解 要使 $y=\ln(1+x)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ 有意义，必须满足

$$\begin{cases}1+x>0,\\ x^2-4>0.\end{cases}$$

由 $1+x>0$ 得到 $x>-1$，而由 $x^2-4>0$ 得到 $x>2$ 或 $x<-2$. 所以其定义域是 $(2,+\infty)$.

对于定义域，除了考虑数学表达式本身的意义外，还应考虑函数的实际意义，例如一天中的气温 T（单位：℃）是时间 t 的函数 $T=T(t)$，定义域是 $[0,24)$.

图形

平面上的点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的图形（或

图像).

注 按照函数的定义,对定义域中的每个 x,总有唯一的函数值与之对应,这就是说,作为函数的对应法则,必须满足单值性的要求,但往往会遇到这样的对应法则,在此法则下,对定义域中的每个 x 有多于一个的值与之对应,尽管这样的对应法则不符合函数的定义,但为应用方便,习惯上仍称这种法则确定了一个多值函数(广义上的函数). 如果添加适当限制条件,使原来的对应法则满足了单值性的要求,就确定了一个函数,称这样得到的函数为多值函数的单值分支. 例如:对于方程 $y^2-x=0$ 给出的对应法则,如果添加 $y\geqslant 0$ 的条件,就可得到一个单值分支 $y=\sqrt{x}$;如果添加 $y\leqslant 0$ 的条件,则得到另一个单值分支 $y=-\sqrt{x}$.

增函数与减函数

从直观来看,当自变量从左向右变化时,如果函数的图形是往上爬或升高的,则该函数是增函数;如果函数的图形是向下走或降低的,则该函数是减函数.

定义 2 增函数、减函数

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D,区间 $I\subset D$. 若对任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增的,或称为增函数. 若对任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递减的,或称为减函数.

增函数、减函数统称为单调函数.

偶函数与奇函数

偶函数和奇函数的图形具有对称性的表征.

定义 3 偶函数、奇函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对任意的 $x\in D$,总有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是偶函数;若对任意的 $x\in D$,总有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是奇函数.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的;奇函数的图形是关于原点对称的.

例 3 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解 对任意实数 x,

$$f(-x)=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

因此 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

分段定义的函数

有些函数在定义域的不同部分用不同的式子来表示,称这种函数为分段函数.

例 4 画出函数 $y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$ 的图形.

解 函数的图形如图 0-1 所示.

例 5(绝对值函数) 函数 $y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$,值域是 $[0,+\infty)$,图形如图 0-2 所示.

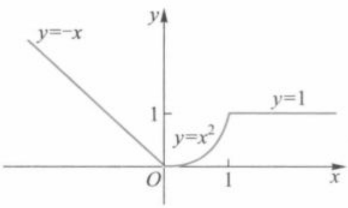


图 0-1

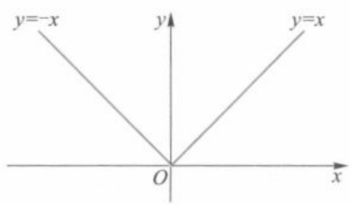


图 0-2

例 6(取整函数) 对任意的 $x\in\mathbf{R}$,用记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,从而得到定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数

$$y=[x].$$

例如,$[2.5]=2$,$[-2.5]=-3$,$[\pi]=3$.$y=[x]$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$,值域是整数集 $\mathbf{Z}$. 图形如图 0-3 所示.

例 7 某市出租车按如下规定收费:当行驶里程不超过 3 km 时,一律收起步费 14 元;当行驶里程超过 3 km 时,除起步费外,对超过 3 km 且不超过 10 km 的部分按每千米 2.4 元计费;对超过 10 km 的部分按每千米 3 元计费,试写出车费 y 与行驶里程 s 之间的函数关系.

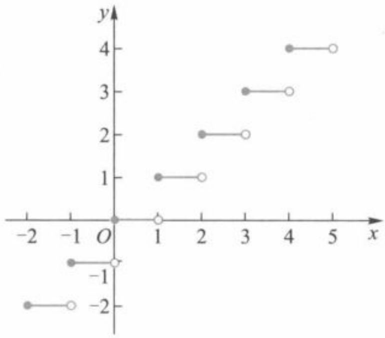


图 0-3

解 以 $y=y(s)$ 表示这个函数,其中 s 的单位是 km,y 的单位是元.

当 $0<s\leqslant 3$ 时,$y=14$;

当 $3<s\leqslant 10$ 时,$y=14+2.4(s-3)=2.4s+6.8$;

当 $s>10$ 时,$y=14+2.4(10-3)+3(s-10)=3s+0.8$.

所以

$$y(s)=\begin{cases}14, & 0<s\leqslant 3,\\ 2.4s+6.8, & 3<s\leqslant 10,\\ 3s+0.8, & s>10.\end{cases}$$

复合函数

在很多情况下,变量之间的关系不那么直接,一个变量与另一个变量的关系要通过第三个变量(中间变量)来得到. 如在物体的自由落体过程中,动能 E 与时间 t 之间的关系就要通过速度 v 获得:设物体的质量是 m,动能与瞬时速度的函数关系是 $E=\frac{1}{2}mv^2$,瞬时速度又是时间的函数 $v=gt$,所以动能 E 就可写成时间 t 的函数 $E=\frac{1}{2}mg^2t^2$.

定义 4 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_1,函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_2,且 $g(D_2)\subset D_1$,则由

$$y=f[g(x)],\quad x\in D_2$$

定义的函数称为由函数 $u=g(x)$、$y=f(u)$ 构成的复合函数. 变量 u 称为中间变量,用 $f\circ g$ 来记这个复合函数.

例如,函数 $y=\sqrt{u}$,$u\in[0,+\infty)$ 与 $u=1+2x^2$,$x\in(-\infty,+\infty)$ 构成的复合函数是

$$y=\sqrt{1+2x^2}, \quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 8 设函数 $g(x)=x^2, f(x)=x-7$，求 $f[g(x)]$，并求 $f[g(2)]$.

解 用 $g(x)$ 的表达式代替 $f(x)=x-7$ 中的 x，得到

$$f[g(x)]=g(x)-7=x^2-7,$$
$$f[g(2)]=g(2)-7=2^2-7=-3.$$

习题 0.1

1. 试把正方形的边长 L 表示为该正方形对角线长度 d 的函数，并把该正方形的面积 S 表示为对角线长度 d 的函数.

2. 求下列函数的定义域和值域：

(1) $f(x)=1-\sqrt{x}$； (2) $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$； (3) $f(x)=\sqrt[3]{x-3}$.

3. 画出 $|y|=x$ 的图形，并解释它为什么不是 x 的函数.

4. 指出下列函数是偶函数还是奇函数.

(1) $f(x)=x^2+x$； (2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$； (3) $f(x)=\sqrt[3]{x-3}$.

5. 若函数 $f(x)=x-1, g(x)=\dfrac{1}{x+1}$，求 $f\left[g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]$ 和 $g\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]$.

— 0.2 指数函数 —

在中学里我们已经初步了解到，指数函数在生产实际和科学研究中有着重要的应用. 例如，$y=2^x$ 可以描述细胞分裂时细胞的个数 y 与分裂次数 x 的关系，放射性物质的衰减过程也可以用指数函数来刻画. 在本节我们将回顾指数函数的定义和基本性质，并通过一些具体模型来理解指数增长和指数衰减这两种与日常生活密切相关的现象.

定义与基本性质

定义 指数函数

设 $a>0$，且 $a\neq1$，我们称函数 $f(x)=a^x$ 是底数为 a 的指数函数.

指数函数 $f(x)=a^x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$.

注 需要指出的是，在中学教材中，尽管我们已经知道如上指数函数的定义，但事实上，仅证明了当 x 为有理数时指数函数的诸多性质，而对于 x 为任意实数的情形并未严格论证. 因为在中学，我们首先遇到的是正整数指数幂，然后其被推广到零指数幂和负整数指数幂，最后拓展到有理数指数幂. 当然，这里我们也不准备给出无理数指数幂相关性质的严格证明，因为这需要用到函数极限的理论. 我们直接指出：当指数从有理数推广到实数后，指数的运算法则仍然成立.

运算法则

设 $a>0,b>0(a,b\neq 1)$，则对任何实数 x 和 y，以下运算法则成立：

(1) $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$；

(2) $(a^x)^y=a^{xy}$；

(3) $a^x\cdot b^x=(ab)^x$.

基本性质

(1) 指数函数 $f(x)=a^x$ 的图像经过点 $(0,1)$；

(2) 当 $a>1$ 时，$f(x)=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是增函数；当 $0<a<1$ 时，$f(x)=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是减函数. 如图 0-4 所示.

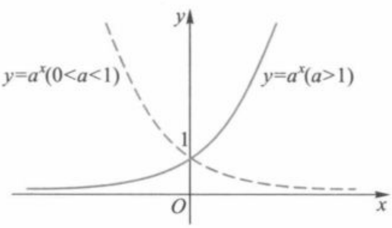


图 0-4

我们经常用到一类特殊的指数函数 e^x，即以无理数 e 为底的指数函数. 无理数 e 是数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 当 n 趋于无穷大时的极限，精确到小数点后 9 位时是 2.718 281 828. 根据对数的定义，

$$a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}. \tag{1}$$

因此，任何指数函数 $f(x)=a^x$ 都可以转化为 e^{kx} 的形式，这里 $k=\ln a$ 是常数. 在后面学习微分学和积分学时，我们将看到用 e 作为底数时很多计算公式会显得更简洁.