中国数论名家著作选系列

"十三五"国家重点图书

Valuation Theory

赋值论

戴执中 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

中国数论名家著作选系列

"十三五"国家重点图书

赋值论

Valuation Theory

戴执中 著

由黑龍江省精品圖書出版工程專項資金資助出版

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

赋值论是域论的一个分支,是研究"代数数论"和"交换代数"的一个工具.本书主要介绍赋值论的成果,共6章,包括:域的绝对值与一阶赋值、赋值与赋值环、赋值域的代数扩张、Hensel赋值域、极大赋值域与完全赋值域、环的赋值及附录等内容.

本书适合数学及相关专业师生和爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

赋值论/戴执中著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2019.7

ISBN 978-7-5603-8191-6

Ⅰ.①赋… Ⅱ.①戴… Ⅲ.①赋值 Ⅳ.①O153.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第090773号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江艺德印刷有限责任公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张14.5　字数260千字
版　　次　2019年7月第1版　2019年7月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-8191-6
定　　价　98.00元

前言

作者曾于2008年出版《赋值论基础》一书,今值赋值理论面世已逾百年,借此机会对原书进行了增改,并增加一个附录,对该理论产生的背景及始创期的主要工作进行介绍.自20世纪中叶始,赋值理论已延伸到域以外的其他代数分支.今于本书最后一章对环的赋值做一简介.挂一漏万,自所不免.失误处希阅者见教为感.

作者

2018年3月

本书部分常用符号

$\mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{Z}$	整数集;整数加群
$\mathbf{Q}$	有理数集;有理数域
$\mathbf{R}^+$	实数加群;正实数集
$\mathbf{Q}_p$	p — 进数域
(K,v)	赋值域
$(A,\mathfrak{M})$	v 的赋值对
Γ	序加群,v 的值群
$\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{\infty\}$	增广序群
$D(\Gamma)$	群 Γ 的可除闭包
$\overline{K}$ 或 $\overline{K}_v$	赋值域(K,v) 的剩余域
$I_K(R)$	子环 R 在域 K 内的整闭包
$e(w/v)$ 或 $e(L/K)$	v 在 L 上拓展 w 关于 v 的分歧指数
$f(w/v)$ 或 $f(L/K)$	v 在 L 上拓展 w 关于 v 的剩余次数
$G_z(w \mid K)$ 或 $G_z(B \mid K)$	w(或 B) 关于 K 上的分解群
$K_z(w \mid K)$ 或 $K_z(B \mid K)$	w(或 B) 在 K 上的分解域
$G_T(w \mid K)$ 或 $G_T(B \mid K)$	w(或 B) 关于 K 的惯性群
$K_T(w \mid K)$ 或 $K_T(B \mid K)$	w(或 B) 在 K 上的惯性域
$G_V(w \mid K)$ 或 $G_V(B \mid K)$	w(或 B) 关于 K 的分歧群
$K_V(w \mid K)$ 或 $K_V(B \mid K)$	w(或 B) 在 K 上的分歧域

目录

第1章 域的绝对值与一阶赋值

1.1 域的绝对值

实数与复数的绝对值是我们熟知的概念，今以它的特征来给任意域定义一个类似的概念，使得数域上的绝对值成为其特款，并借此导出有关域的一系列重要理论.

定义 1.1 设 K 为任一域，$|\ |$ 表示从 K 到非负实数集 $\mathbf{R}^+$ 内的一个映射，满足下列条件：

① 对任一 $a \in K$ 均有 $|a| \geqslant 0$，且 $|a|=0$ 当且仅当 $a=0$；

② $|ab|=|a|\cdot|b|$； (1)

③ $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

其中，a,b 可取 K 中任何元，今称映射 $|\ |$ 为 K 的一个绝对值.

今暂以 e_1 记作 K 的乘法单位元，从定义即知有 $|e_1|=1$ 以及 $|a|=|-a|$. 记 $K^*=K\backslash\{0\}$，$|K|=\{r \in \mathbf{R}^+$ 且 $r \neq 0 \mid \exists a \in K^*, |a|=r\}$. 显然，$|K|$ 是乘法群 $\mathbf{R}^+\backslash\{0\}$ 的一个子群，称为 $|\ |$ 的值群. 另外，K^* 的子集 $\{a \in K \mid |a|=1\}$ 是 K^* 的一个乘法子群，它的元称为关于 $|\ |$ 的单位. 若 K^* 中所有的元都是关于 $|\ |$ 的单位，即 $|K|=\{1\}$，则称 $|\ |$ 是 K 的一个浅显绝对值，或称 $|\ |$ 是浅显的. 若 $|K| \neq \{1\}$，则称 $|\ |$ 是非浅显的.

若将定义 1.1 中的条件 ③ 更换为较强的条件

$$|a+b| \leqslant \max\{|a|,|b|\} \quad (\text{记为条件 ③}')$$

则称这种 $|\ |$ 为非阿基米德型的，或者称 $|\ |$ 为一非阿基米德绝对值，而将满足原有条件的绝对值称作阿基米德绝对值. 称满足定义 1.1 中 ①②③$'$ 的 $|\ |$ 为非阿基米德型，其依据在于由条件 ③$'$ 可得出

$$|me_1| = |\underbrace{e_1 + \cdots + e_1}_{m\text{个}}| \leqslant |e_1| = 1$$

即 K 中单位元 e_1 的任何整数倍在映射 $|\ |$ 下的取值均小于或等于 1. 这是绝对值 $|\ |$ 成为非阿基米德型的一个特征. 今有下面的定理.

定理 1.2 设 $|\ |$ 是域 K 的一个非浅显绝对值. $|\ |$ 成为非阿基米德型的，当且仅当对任何 $n \in \mathbf{Z}$，均有 $|ne_1| \leqslant 1$.

证明 只须证其充分性. 设 $a,b \in K$，n 为任一正整数，于是有

$$\begin{aligned} |a+b|^n = |(a+b)^n| &= \left| a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \cdots + b^n \right| \\ &\leqslant |a|^n + |a|^{n-1} \cdot |b| + \cdots + |b|^n \\ &\leqslant (n+1)\max\{|a|^n, |b|^n\} \end{aligned}$$

从而有

$$|a+b| \leqslant (n+1)^{\frac{1}{n}} \max\{|a|,|b|\}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$，即得

$$|a+b| \leqslant \max\{|a|,|b|\}$$

故条件 ③$'$ 成立. 这就证明了 $|\ |$ 是非阿基米德绝对值.

推论 对于特征数为 $p \neq 0$ 的域，其绝对值必然是非阿基米德型的.

非阿基米德绝对值[①]还有一个显著不同于阿基米德绝对值的特征. 由条件 ③$'$ 知，在域 K 中所有满足 $|a| \leqslant 1$ 的元组成 K 的一个子环，今记作 A. 在非浅显的前提下，A 中必有使 $0 < |a| < 1$ 成立的元 a，所有满足此要求的元，再添入 0，组成 A 中一个唯一的极大素理想，今记作 $\mathfrak{M}$. 从而由 A 关于 $\mathfrak{M}$ 的剩余类组成一个域，称为 K 关于 $|\ |$ 的剩余域，记为 $\overline{K} = A/\mathfrak{M}$. 由于非阿基米德绝对值能对所在域给出这些有意义的代数结构，这就使得它较阿基米德绝对值更具有探讨的价值. 经过形式的转化，它将成为今后讨论的“赋值”这一概念的特款，并以“一阶赋值”来称呼它.

① 所论绝对值，若无声明，均指非浅显的而言.

今先对绝对值作些初步讨论. 设 $|\ |_1$, $|\ |_2$ 是域 K 的两绝对值,如果从 $|a|_1<1$ 可得 $|a|_2<1$,就记作 $|\ |_1\sim|\ |_2$. 此关系"$\sim$"具有自反性是显然的. 它又有传递性,因由 $|\ |_1\sim|\ |_2$ 及 $|\ |_2\sim|\ |_3$ 显然可得 $|\ |_1\sim|\ |_3$. 今往证它尚有对称性.

引理 1.3 设 $|\ |_1\sim|\ |_2$,于是有 $|\ |_2\sim|\ |_1$.

证明 设 $|a|_2<1$. 若 $|a|_1>1$,则有 $\left|\frac{1}{a}\right|_1<1$,从而 $\left|\frac{1}{a}\right|_2<1$ 以及 $|a|_2>1$,矛盾! 又若 $|a|_1=1$,可取 $b\in K$ 使有 $|b|_1>1$,从而 $|b|_2>1$. 令 $c=a^nb$. 于是有 $|c|_1=|a^n|_1\cdot|b|_1>1$,以及 $|c|_2=|a^n|_2\cdot|b|_2>1$. 但 $|a^n|_2<1$,因此可取适当大的正整数 n,使得 $|a^nb|_2<1$. 由此又有 $|c|_1=|a^nb|_1<1$, 矛盾! 因此由 $|a|_2<1$ 只能有 $|a|_1<1$,即 $|\ |_2\sim|\ |_1$. 证毕.

由以上所示即知"$\sim$"为一等价关系.

命题 1.4 设 $|\ |_1$, $|\ |_2$ 为域 K 的两绝对值,"$\sim$"的规定如上,于是下列诸论断是等价的:

① $|\ |_1\sim|\ |_2$;

② $|a|_1<1$ 当且仅当 $|a|_2<1$; (2)

③ 存在某一实数 $r>0$,使得 $|\ |_2=|\ |_1^r$,即对任何 $a\in K$ 皆有 $|a|_2=|a|_1^r$.

证明 由于"$\sim$"为一等价关系,故论断 ① 与 ② 等价,③ → ① 显然成立. 今往证 ② → ③. 取 $c\in K$ 使有 $|c|_1>1$,从而 $|c|_2>1$,令 $|a|_1=|c|_1^s$,s 是正实数. 若有理数 $\frac{m}{n}>s$,则 $|a|_1<|c|_1^{\frac{m}{n}}$,从而 $\left|\frac{a^n}{c^m}\right|_1<1$,于是 $\left|\frac{a^n}{c^m}\right|_2<1$. 由此又有 $|a|_2<|c|_2^{\frac{m}{2}}$. 又若 $\frac{m}{n}<s$,则有 $|a|_2>|c|_2^{\frac{m}{2}}$,从而得知 $|a|_2=|c|_2^s$. 又由 $s=\frac{\lg|a|_1}{\lg|c|_1}$,故有

$$|a|_2=|c|_2^{\frac{\lg|a|_1}{\lg|c|_1}}=|a|_1^{\frac{\lg|a|_2}{\lg|c|_2}}$$

因此 $\frac{\lg|c|_2}{\lg|c|_1}=\frac{\lg|a|_2}{\lg|a|_1}$ 是一个与 c 的选择无关的数,于是,只要令 $r=\frac{\lg|a|_2}{\lg|a|_1}$ 就可对任何 $a\in K$ 均有 $|a|_2=|a|_1^r$,即论断 ③ 成立.

③ → ① 是显然的,命题即告证明. □

当 $|\ |$ 为 K 的阿基米德绝对值时,必有 K 的单位元 e_1 的某个整倍元 me_1 使得 $|me_1|>1$. 今对有理数域 $\mathbf{Q}$ 考查它具有的阿基米德绝对值.

为了记法上的方便,今以 $|\ |_0$ 记通常的实数绝对值,对于 $\mathbf{Q}$ 的单位元仍以 1 记之. 今有下面的命题.

命题 1.5 有理数域 $\mathbf{Q}$ 的任何阿基米德绝对值 $|\ |$ 均与通常的绝对值 $|\ |_0$

等价.

证明(Artin) 只须对 **Q** 中的整数环 **Z** 进行论证. 设 m,n 均为大于 1 的整数,又令

$$n = a_0 + a_1 m + \cdots + a_t m^t \quad (a_t \neq 0, 0 \leqslant a_i < m)$$

由于 $|\ |_0$ 是通常的绝对值,故对正的 m,n,a_i 不妨以 m,n,a_i 代替 $|m|_0$, $|n|_0$, $|a_i|_0$. 由

$$|n| \leqslant |a_0| + |a_1||m| + \cdots + |a_t||m|^t$$

以及 $0 \leqslant a_i < m$,故有

$$|n| < m(1 + |m| + \cdots + |m|^t) < m(t+1)\max\{1, |m|^t\}$$

据所设 $n \geqslant m^t$,故 $t \leqslant \dfrac{\lg n}{\lg m}$. 代入上式得

$$|n| < m\left(\frac{\lg n}{\lg m} + 1\right)\max\{1, |m|\}^{\frac{\lg n}{\lg m}}$$

今以 n^s 代替 n,则有

$$|n^s| < m\left(\frac{s\lg n}{\lg m} + 1\right)\max\{1, |m|\}^{\frac{s\lg n}{\lg m}}$$

从而 $|n| < \left(m\dfrac{s\lg n}{\lg m} + m\right)^{\frac{1}{s}}\max\{1, |m|^{\frac{\lg n}{\lg m}}\}$. 再令 $s \to \infty$,即得

$$|n| < \max\{1, |m|^{\frac{\lg n}{\lg m}}\} \tag{3}$$

由 $|\ |$ 是阿基米德绝对值,故有正整数 $m,n \neq 1$,使得 $|n| > 1$, $|m| > 1$,并可以从式(3) 得到

$$|n|^{\frac{1}{\lg n}} \leqslant |m|^{\frac{1}{\lg m}} \tag{4}$$

由于 n,m 在论证中是可以互换的,故式(4) 中应有等号成立,即

$$\frac{\lg |n|}{\lg n} = \frac{\lg |m|}{\lg m} = r$$

于是,对每个整数 n 皆有 $|n| = |n|_0^r$ 成立,据命题 1.4,即得 $|\ | \sim |\ |_0$,命题即告证明.

在讨论 **Q** 的非阿基米德绝对值之前,先给出一条并不局限于 **Q** 的引理:

引理 1.6 设 $|\ |$ 是域 K 的一个非阿基米德绝对值. 若对于 $a,b \in K$ 有 $|a| \neq |b|$,则有

$$|a+b| = \max\{|a|, |b|\} \tag{5}$$

证明 不妨设 $|a| > |b|$,由 $a = (a+b) - b$,可得

$$|a| \leqslant \max\{|a+b|, |b|\} = |a+b|$$

因此 $|a| \leqslant |a+b| \leqslant |a|$,即式(5) 成立,证毕.

现在来考虑 $\mathbf{Q}$ 上的非阿基米德绝对值. 设 $|\ |$ 为任一非浅显的非阿基米德绝对值,据前面指出,$\mathbf{Q}$ 中所有满足 $|a|\leqslant 1$ 的有理数集构成一个子环 A,并且其中凡满足 $|a|<1$ 的元组成 A 中唯一不等于(0) 的素理想 $\mathfrak{M}$,即 A 的唯一极大理想,今在 $\mathfrak{M}$ 中取一最小正整数 $p\neq 0$ 使 $|p|$ 有最小值,这种整数是必然存在的. 因若 $r=\dfrac{m}{n}$ 有最小值 $|r|$,则由 $|m|=|r|\cdot|n|\leqslant|r|$ 知 $|m|=|r|$. 今设正整数 p 有最小值 $|p|$,不难验知 p 是素数. 因若 $p=ab$,其中 a,b 都是大于 1 且小于 p 的整数,故 $|a|=|b|=1$,从而 $|p|=|a||b|=1$,矛盾! 现在来证明 $\mathfrak{M}$ 是由 p 生成的主理想. 设 $\dfrac{m}{n}\in\mathfrak{M}$. 若 m,n 都与 p 互素,例如 $m=ap+b,b\neq 0$,则由所设有 $|b|=1$. 据 $|m|\leqslant\max\{|ap|,|b|\}$,其中 $|ap|<1$,由引理 1.6 知 $|m|=|b|=1$,因此$\dfrac{m}{n}=p^k\dfrac{m'}{n'}$,其中 m',n' 与 p 互素. 若 $k>0$,则$\left|\dfrac{m}{n}\right|<1$,从而$\dfrac{m}{n}\in\mathfrak{M}$;若 $k<0$,则$\left|\dfrac{m}{n}\right|>1$,此时$\dfrac{m}{n}\in\mathbf{Q}\backslash A$. 这表明了 $\mathfrak{M}=pA$,即 $\mathfrak{M}$ 是 A 中由 p 生成的主理想. 今设 $|p|=c,0<c<1$. 对于任一有理数 t 皆可写作 $t=p^l\dfrac{m}{n}$,其中,m,n 均与 p 互素,$l=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$. 对此,可令 $|t|_p=c^l$,以及 $|0|_p=0$. 映射 $|\ |_p:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}^+\cup\{0\}$ 显然满足定义 1.1 中的条件 ① 和 ②.

现在来证明条件 ③. 设 t 如前,令 $s=p^k\dfrac{a}{b}$,其中,$a,b\in\mathbf{Z}$,均与 p 互素. 于是$|s|_p=c^k$. 若 $l>k$,则有

$$s+t=p^k\left(p^{l-k}\frac{m}{n}+\frac{a}{b}\right)=p^k\left(\frac{p^{l-k}bm+an}{bn}\right)$$

其中 $p^{l-k}bm+an$ 显然与 p 互素. 因此 $|s+t|_p=c^k=|s|_p>|t|_p$,即 $|s+t|_p=\max\{|s|_p,|t|_p\}$. 若 $l=k$,则 $s+t=p^l\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{m}{n}\right)=p^l\left(\dfrac{an+bm}{bn}\right)$. 由于 $an+bm$ 可能有 p 的因子,因此 $|s+t|_p\leqslant\max\{|s|_p,|t|_p\}$,即 $|\ |_p$ 满足条件 ③. 这证明了 $|\ |_p$ 是非阿基米德绝对值.

现在再给 $|\ |_p$ 另一个表达形式. 取 $c=\dfrac{1}{p}$,记 $l=v_p(t)$.

于是 $|t|_p=p^{-v_p(t)}$, $|s|_p=p^{-v_p(s)}$. 不难验知这个 v_p 具有以下的性质:

$v_p(0)=\infty$,∞ 是大于任何实数的符号.

$v_p(st)=v_p(s)+v_p(t)$.

$v_p(s+t) \geqslant \min\{v_p(s), v_p(t)\}$.

这个 v_p 是 2.2 节中所定义的赋值的一个特款. 因此,我们又称 $||_p$ 是 $\mathbf{Q}$ 的 p — 进赋值.

据命题1.4知 $||_p$ 与原先所给的 $||$ 是等价的,结合命题1.5可得定理如下:

定理1.7(Ostrowski)[①] 有理数域 $\mathbf{Q}$ 的绝对值若是阿基米德型的,则与通常实数的绝对值等价;若是非阿基米德型的,则等价于 p — 进赋值,$p \neq 1$,可取正整数中任一素数. □

依照上述证明中出现的 v_p,可以对任一域 K 的非阿基米德绝对值 $||$ 做类似的处理,即令

$$|a| = e^{-v(a)} \quad (a \in K) \tag{6}$$

e 是自然对数的底,v 作为映射 $K \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ 满足以下的条件:

①$v(a) \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$,$v(a) = \infty$,当且仅当 $a = 0$;

②$v(ab) = v(a) + v(b)$; (7)

③$v(a+b) \geqslant \min\{v(a), v(b)\}$.

其中,∞ 与任一实数 r 的运算为 $r + \infty = \infty + \infty = \infty$,以及 $r < \infty$. 这样定义的映射 v 称为域 K 的一个一阶赋值. 至于前面出现的 v_p,由于它取值于 $\mathbf{Z} \cup \{\infty\}$,故称为 $\mathbf{Q}$ 的一阶离散赋值. 在下一章我们再对此予以一般化,即令映射 v 所取的值并不局限于实数范围.

在讨论了等价的绝对值后,今对不等价的情形做一简约讨论. 域的两个绝对值若无等价关系,就称它们是独立的,现在先给出如下的引理:

引理1.8 设 $||_1, ||_2, \cdots, ||_n (n \geqslant 2)$ 是域 K 的 n 个绝对值,其中任意两个均是互为独立的,于是有 $a \in K$,满足以下条件

$$|a|_1 > 1, \ |a|_i < 1 \quad (i = 2, \cdots, n)$$

证明 当 $n=2$ 时,有 $c \in K$ 使得 $|c|_1 > 1$, $|c|_2 \leqslant 1$,以及 $b \in K$ 使得 $|b|_1 \leqslant 1$, $|b|_2 > 1$. 于是取 $a = cb^{-1}$,即得 $|a|_1 > 1$ 及 $|a|_2 < 1$,故结论对 $n=2$ 成立. 今对 n 使用归纳法,设有 $c \in K$ 满足

$$|c|_1 > 1, \ |c|_i < 1 \quad (i = 3, \cdots, n)$$

又有 $b \in K$ 使得 $|b|_1 > 1$, $|b|_2 < 1$. 对于 $|c|_2$ 则有两种可能: $|c|_1$ 或 $|c|_2 > 1$. 就第一种可能而论,可取 $a = c^r b$,r 是适当大的正整数,于是

$$|a|_1 > 1, \ |a|_2 < 1, \cdots, \ |a|_n < 1$$

---

① 见本章参考文献[11].

若 $|c|_2>1$,可取 $a=\dfrac{c^r b}{1+c^r}$. 当 $r\to\infty$ 时,有 $|a|_1\to|b|_1>1$, $|a|_2\to|b|_2<1$ 以及 $|a|_i\to 0<1, i=3,\cdots,n$. 因此,引理成立.[①]

定理 1.9(逼近定理,Artin-Whaples)[②] 设 $|\ |_1,\cdots,|\ |_n(n\geqslant 2)$ 是域 K 的 n 个绝对值,其中任意两个均为独立;又设 $a_1,\cdots,a_n\in K$ 为任意取定的元;$\varepsilon>0$ 为任一给定的实数. 于是,有 $a\in K$ 满足

$$|a-a_i|_i<\varepsilon\quad(i=1,\cdots,n)$$

证明 据上述引理,对每个 $|\ |_i$ 都可取一个 $b_i\in K$,使得 $|b|_i>1$, $|b_i|_j<1, j\neq i, i,j=1,\cdots,n$. 令 r 是正整数,当 $r\to\infty$ 时,有

$$\left|\frac{b_i^r}{1+b_i^r}\right|_i\to 1,\left|\frac{b_i^r}{1+b_i^r}\right|_j\to 0\quad(j\neq i)$$

因此又有

$$\left|\frac{a_i b_i^r}{1+b_i^r}\right|_i\to a_i,\left|\frac{a_i b_i^r}{1+b_i^r}\right|_j\to 0\quad(j\neq i)$$

于是当 $r\to\infty$ 时,有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i b_i^r}{1+b_i^r}\right|_j\to a_j$$

只要令 $a=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i b_i^r}{1+b_i^r}$,取充分大的 r 就有

$$|a-a_i|_i<\varepsilon\quad(i=1,\cdots,n)$$

定理即告成立.

此定理还可以进一步导出以下的推论.

推论 设 $|\ |_i$ 及 a_i 如定理所设,$i=1,\cdots,n$;又以 $r_1,\cdots,r_n$ 分别表示 $|\ |_1,\cdots,|\ |_n$ 的值群中任意取定的实数,于是有 $a\in K$ 满足

$$|a-a_i|_i=r_i\quad(i=1,\cdots,n)$$

证明 取实数 $\varepsilon<\min\{r_1,\cdots,r_n\}$,对每个 r_i 在 K 中取元 x_i,使有 $|x_i|_i=r_i$,由定理知存在元 $x\in K$,使得

$$|x-x_i|_i<\varepsilon<r_i$$

对每个 $i=1,\cdots,n$ 成立. 从 $x=x-x_i+x_i$ 知

$$|x|_i=|x-x_i+x_i|_i=\max\{|x-x_i|_i,|x_i|_i\}=r_i$$

又由定理知有 $y\in K$ 满足

---

① 在引理中自然也可以选某个 $a\in K$,使得 $|a|_i>1$, $|a|_j<1, j\neq i, i,j=1,\cdots,n$.

② 见本章参考文献[2][3][6];对于一般的情况见 2.8 节.

$$|y-a_i|_i < \varepsilon \quad (i=1,\cdots,n)$$

令 $a=x+y$,于是有

$$|a-a_i|_i = |y-a_i+x|_i = \max\{|y-a_i|_i, |x|_i\} = |x|_i = r_i$$

对每个 $i=1,\cdots,n$ 成立. 推论即告证明.

从定理的证明尚可得知,实际上可以有无限多个 a 满足定理及推论的要求.

1.2　域关于绝对值的完全化

设域 K 带有一个绝对值 $|\ |$,今记以 $(K,|\ |)$. 令 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是 K 中一序列,若对于任一 $\varepsilon>0$(ε 是实数),恒有某个正整数 n_0,使得当 $n>n_0, m>n_0$ 时有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$ 成立,则称 $\{a_n\}_n$ 为一 $|\ |$— 收敛序列. 又若 K 中有元 a,使得对任一 $\varepsilon>0$,总有 n_0,当 $n>n_0$ 时就有 $|a-a_n|<\varepsilon$ 成立,则称 a 为序列 $\{a_n\}_n$ 的 $|\ |$— 极限,记以 $|\ |-\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$,此时又可称 $\{a_n\}_n$ $|\ |$— 收敛于 a. 从绝对值的条件 ③ 不难得知,当 $\{a_n\}_n$ 是 $|\ |$ 收敛序列时,$\{|a_n|\}_n$ 是通常意义下的收敛序列. 有 $|\ |$— 极限的序列必为 $|\ |$— 收敛序列. 若 $\{a_n\}_n$ 的 $|\ |$— 极限为 0,则称 $\{a_n\}_n$ 为 $|\ |$— 零序列. 当 $(K,|\ |)$ 中每个 $|\ |$— 收敛序列都在 K 中有 $|\ |$— 极限时,就称 $(K,|\ |)$ 为完全域,或称 K 关于 $|\ |$ 是完全的. 对于一个不是完全域的 $(K,|\ |)$,如何做出一个包含它的完全域 $(\widetilde{K},|\ |^{\sim})$,使得 $K\subsetneq\widetilde{K}$,$|\ |^{\sim}$ 又是 $|\ |$ 的拓展,这将是本节所要讨论的课题. 首先引进有关的称谓:设 $(K_1,|\ |_1)$ 与 $(K_2,|\ |_2)$ 是两个带有绝对值的域,若 $K_1\subsetneq K_2$,并且对任何 $a\in K_1$ 皆有 $|a|_2=|a|_1$,则称 $|\ |_2$ 是 $|\ |_1$ 在 K_2 上的拓展;又称 $|\ |_1$ 是 $|\ |_2$ 在子域 K_1 上的限定,记以 $|\ |_1=|\ |_{2|K_1}$. 此时,可称 $(K_2,|\ |_2)$ 为 $(K_1,|\ |_1)$ 的带绝对值的域扩张,记以 $(K_1,|\ |_1)\subsetneq(K_2,|\ |_2)$. 至于所涉及的绝对值 $|\ |$,不论是阿基米德型,或非阿基米德型的均可. 至于浅显的特款,那就是单纯的域扩张.

以下我们恒设 $(K,|\ |)$ 是任一带有绝对值 $|\ |$ 的域.

定义 1.10　设 $(K,|\ |)$,$(\widetilde{K},|\ |^{\sim})$ 为两个带有绝对值的域,若满足下列条件:

①$(K,|\ |)\subsetneq(\widetilde{K},|\ |^{\sim})$;

②$(\widetilde{K},|\ |^{\sim})$ 是一个完全域;　　　　(8)

③K 在 $\widetilde{K}$ 中稠密,即 $\widetilde{K}$ 的每个元都是 K 中某个 $|\ |$— 收敛序列的 $|\ |^{\sim}$ 极限,

则称 $\widetilde{K}$ 是 K 关于 $|\ |$ 的一个完全化,或称$(\widetilde{K}, |\ |^{\sim})$ 是$(K, |\ |)$ 的一个完全化.

例如,有理数域 $\mathbf{Q}$ 关于通常的绝对值 $|\ |_0$ 不是完全的,它的完全化就是带有通常绝对值的实数域 $\mathbf{R}$.

为了对给定的$(K, |\ |)$ 构作它的完全化,应先给 K 的序列$\{a_n\}_n$,$\{b_n\}_n$ 规定加与乘的运算如下

$$\{a_n\}_n + \{b_n\}_n = \{a_n + b_n\}_n$$

$$\{a_n\}_n \cdot \{b_n\}_n = \{a_n b_n\}_n \tag{9}$$

今以 $\widetilde{A}$ 记$(K, |\ |)$ 中所有$|\ |$— 收敛序列所成的集,现在证明 $\widetilde{A}$ 关于以上所定义的加与乘都是封闭的. $\widetilde{A}$ 关于加法的封闭性是易知的,为证明 $\widetilde{A}$ 关于乘法也封闭,先来证明一个事实,即由$|\ |$— 收敛序列$\{a_n\}_n$ 所得到的实数序列$\{|a_n|\}_n$ 均有界. 设$\{a_n\}_n$ 是$|\ |$— 收敛序列,取任一实数 $\varepsilon > 0$. 于是有 $n_0 \in \mathbf{N}$,使得当标号 $s \geqslant n_0, t \geqslant n_0$ 时,有 $|a_s - a_t| < \varepsilon$ 成立. 由

$$|a_s| = |a_s - a_{n_0} + a_{n_0}| \leqslant |a_s - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < \varepsilon + |a_{n_0}|$$

取实数 $\gamma > \max\{|a_1|, \cdots, |a_{n_0}|\}$,于是有

$$|a_s| < \gamma + \varepsilon = \lambda_1$$

对所有的 a_n 皆成立,故$\{|a_n|\}_n$ 是有界的. 对于$|\ |$— 收敛序列$\{b_n\}_n$ 也同样可得到一个实数 λ_2,使得对每个 b_n 皆有 $|b_n| < \lambda_2$. 做了如上的选取后,对任一 $\varepsilon > 0$,总可选取某个 $m_0 \in \mathbf{N}$,使得当标号 $s \geqslant m_0, t \geqslant m_0$ 时有

$$|a_s - a_t| < \frac{\varepsilon}{2\lambda_2} \text{ 与 } |b_s - b_t| < \frac{\varepsilon}{2\lambda_1}$$

成立,于是可得

$$\begin{aligned}|a_s b_s - a_t b_t| &= |a_s(b_s - b_t) + (a_s - a_t)b_t| \\ &\leqslant |a_s||b_s - b_t| + |a_s - a_t||b_t| \\ &< \lambda_1 |b_s - b_t| + \lambda_2 |a_s - a_t| \\ &< \lambda_1 \frac{\varepsilon}{2\lambda_1} + \lambda_2 \frac{\varepsilon}{2\lambda_2} = \varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了由式(9) 所规定的乘法使得$|\ |$— 收敛序列的积仍然是$|\ |$— 收敛序列,从而按式(9) 的规定 $\widetilde{A}$ 是交换环.

今以 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 记作 $\widetilde{A}$ 中所有$|\ |$— 零序列所组成的集,$\widetilde{\mathfrak{M}}$ 关于加法显然是封闭的,又由于$|\ |$— 收敛序列的值所组成的实数序列有界,故$|\ |$— 零序列与$|\ |$— 收敛序列的乘积是$|\ |$— 零序列,这表明了 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 是 $\widetilde{A}$ 的一个理想. 为证明 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 是 $\widetilde{A}$ 的极大理想,今有下面的引理.

引理 1.11 设$\{a_n\}_n$ 是$|\ |$— 收敛序列,但不是$|\ |$— 零序列,于是有某个正实