全国高等学校计算机教育研究会教材建设立项项目

高等学校计算机基础教育教材精选

离散数学

杨文国　高　华　主　编
石　莹　吕佳萍　沈晓婧　副主编

清华大学出版社

高等学校计算机基础教育教材精选

离散数学

杨文国　高　华　主　编

石　莹　吕佳萍　沈晓婧　副主编

清华大学出版社

北　京

内 容 简 介

本书主要介绍了离散数学的基本内容和一些简单应用。全书共分 5 章，分别介绍命题逻辑、谓词逻辑、集合论、二元关系和图论。本书整体结构清晰，概念清楚，重点突出。为了方便学生理解掌握所学知识，本书配有大量习题，分别以判断题、单项选择题、不定项选择题、解答题等形式呈现，题目通俗易懂，做题灵活，方便学生随堂测试。本书是江苏省教育科学“十三五”规划研究课题的专项成果。

本书可以作为本科院校计算机科学与技术、软件工程、医学信息学以及其他理工科专业的教材，也可供喜爱数学的有关人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/杨文国，高华主编. —北京：清华大学出版社，2019
(高等学校计算机基础教育教材精选)
ISBN 978-7-302-53274-3

Ⅰ. ①离…　Ⅱ. ①杨…　②高…　Ⅲ. ①离散数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 138280 号

责任编辑：谢　琛
封面设计：何凤霞
责任校对：李建庄
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：6.5　　**字　　数**：152 千字
版　　次：2019 年 9 月第 1 版　　**印　　次**：2019 年 9 月第 1 次印刷
定　　价：29.00 元

产品编号：083952-01

前言

离散数学是数学中一门有着实际应用的理论应用数学，正是由于它的发展才推动了数字计算机和图论的发展。现实生活中电子电路的设计、列车线路的调度、城市结点间的最优主干路径的设计、地图着色等问题都是离散数学着力解决的内容。

为了适应高校教学的不断改革，强化应用，体现特色，我们结合中医药大学专业特点编写了本书，力图让学生看懂、学明白，抛开了大量专业的晦涩难懂的描述，结合实际应用和教学实践，用通俗化的语言进行描述。我们对本书的章节进行了精心安排，理论结合实际应用，将全书分为 5 章：命题逻辑、谓词逻辑、集合论、二元关系和图论，删除了晦涩难懂的数论部分。每章后配有大量习题。

本书第 1、5 章由高华编写，第 2～4 章由杨文国编写，书后习题由石莹、吕佳萍、沈晓婧编写，全书由蔡云、张倩、胡婷婷校对，由黄鑫海、袁建军、石仁祥完成统稿。

本书适合 3 学分的离散数学教学计划使用，也可供有兴趣的科技工作者自学或参考。

全书图形由 Inkscape 作图，公式由 LaTeX 编写，图形执行 SVG1.1 标准，LaTeX 执行 v3.0 标准。

本书是江苏省教育科学“十三五”规划 2018 年度课题：基于任务驱动下分块化的大学数学教学改革，项目编号：D/2018/01/76。本书也是全国高等院校计算机基础教育研究会计算机基础教育教学研究项目，项目编号：2019-AFCEC-221。同时，本书还是教育部产学合作协同育人项目，项目编号：201802271035。

最后感谢南京中医药大学信息技术学院领导和数学教研室同仁的大力支持。感谢南京林业大学高华博士的技术支持。

限于作者水平，书中难免有错误，希望读者不吝赐教。

杨文国　高华

2019 年 7 月

目录

第1章 命题逻辑

1.1 命题与表示

生活中常常需要逻辑(logic),这个词常出现在悬疑小说或影视剧中,通常对它的理解就是:一段陈述能否支持或者反推另外一段陈述,强调语句之间的关系,但数理逻辑中的逻辑却与日常语言的逻辑推理有着一定差别,这主要是由于日常语言通常具有二义性或者多义性。

例如:一个女孩对男孩说:“随便点什么菜,我都爱吃”,在数理逻辑上来说,男孩认为只要是自己点的菜这个女孩都爱吃,但是实际含义可能这个女孩是说:作为男朋友你应该知道我爱吃什么,又或者这个女孩只是生气地随口说说。

为了避免在数理逻辑中出现这样具有二义性的陈述或者表达,数学中引入了目标语言,而目标语言的**目标**就是判断真假,因而目标语言可以理解为**一种表达判断真假语言的汇集和组合**。这些表达判断的语句就是陈述句或命题。

一个命题必定是一个判断或一个真值[①],因而结果也必定有真假之分,我们把真假分别记作:

真(true)　T 或 1

假(false)　F 或 0

那么什么样的句子(sentence)才能称之为命题(proposition)呢?它需要满足下面几个条件:

定义 1-1(命题)　一个命题是指一个能判断真假事实的陈述语句,且该陈述语句要么真,要么假。

(1) 作为一个命题,它首先是一个陈述句,疑问句、感叹句、祈使句等都不是命题。

(2) 作为一个命题,它最终表达的意思一定是确定的、唯一的判断值,既真又假或无法判断真假的都不是命题。

(3) 作为一个命题,它通常可以表达成:A 是 B[②]。

---

① 这里真值是指最终结果,并不是真假的真,而是由数理公式推导出的结果,按照不同的赋值公式,该(真)值的结果唯一。有时 **0、1 也被叫作布尔值**(Boolean)。

② 例如:他们都穿校服,可以扩展成:他们都是穿校服的;$A \geqslant B$ 可以扩展成 A 是不小于 B 的。

一个命题可以是一个**简单命题**[①]，也可以是一个**复合命题**。不可再次分割的命题称之为**简单命题**，由多个简单命题通过联结词组合成的命题称为**复合命题**。

【例 1-1】 确定下列句子是否为一个命题。

（1）现在是几点？

（2）小心前面的电线！

（3）$A+1 \geqslant B+C$。

（4）如果明天老师不点名，我就不去上课了。

上述语句中可以快速判断出：

（1）是疑问句显然不是陈述句，因而不是命题。

（2）这是一句祈使句，因而也不是命题。

（3）这是一个数学关系式，可以扩展成 $A+1$ 的和是大于 $B+C$ 的和；它的真假与 A、B、C 的赋值有关，所以无法确定真假，因而不是命题。

（4）这一句是命题，只不过它是一个复合命题，前后两句可以分别扩展成：如果明天老师不点名，那么我是不去上课的。

有时候命题需要用数学符号来表示，因此离散数学中引入了**形式命题变量**，简称**命题变量**[②]。同计算机语言相似，命题变量是一个指代[③]，它可能指代一个简单的命题，也可能指代一个复合命题。通常我们有如下表示方法：

P：这是用字母表示的一个简单命题。

[1]：这是用序号表示的一个简单命题。

∇：这是一个用符号表示的简单命题。

一个命题变量的**形式**表示可以用多种方法，它的目的只是为了**便于数学推演**，只要推演过程中没有重复，那么它就可以被用作唯一的命题变量[④]。

与此同时，命题变量可以用于指代不同的**具体命题**[⑤]，而其真值取决于**具体命题**的内容和具体的环境，例如：

P：海洋是在地球上的。

P：人类不是灵长类。

根据需求一个命题变元可以指代不同具体命题。具体命题真值有时取决于命题环境，例如：海洋是在地球上的，在现今的天文学上是不成立的，因而在这个环境下是假的；但是在我们的地球上这是真的。依据具体条件的命题称之为**限定性条件命题**。

---

① 简单命题又称原子命题。

② 在一些书本上称为命题变元，为了使其便于理解，我们这里选用命题变量一词。

③ 一个命题变量指示一个命题，或者代表一个命题。

④ 这一点相对于计算机语言中对变量名称的严格要求较松，且大小写均可。

⑤ 具体命题又叫特定命题或实体命题，它是相对于形式命题的。

1.2 联 结 词

简单命题组合成复合命题是需要一些辅助的联结词的，这一点和我们日常生活中的用语相似，例如：

(1) 它是一只公猫**或**一只母猫。

(2) **虽然**他很帅，**但是**没什么本事。

(3) **因为**他做了很多好事，**所以**学校奖励了他。

这三个命题都是复合命题，通常理解上的联结词和数理逻辑中的联结词是有一定区别的。举例来说，同样是**"或"**，**现实中**，例(1)中这只猫要么是公的，要么是母的，这是一种**排他性**[①]的**或**，或者称之为**异或**。再如：他在唱歌**或**在看电视，这里的或是一种**兼取或**，也就是这个人可能边看电视边唱歌。离散数学中将这两类或分别用两种不同的符号表示，而不是汉语中的同一个字。有时数理逻辑中的联结词在现实中根本无法用日常用语表达，但是这些联结词却在计算机科学及数字电路设计中是有应用价值的。为了明确一个数理逻辑中的联结词的意义，离散数学中引入了这样几个基本联结词，我们将联结词定义用表格形式做出，如表 1-1 所示，其中 P,Q 是形式命题变量。

表 1-1 基本联结词定义及取值真值表

名称	符号	对应词语	真值判定方法	表达式	P 取值	Q 取值	真值
否定 neg	$\neg$	不、不能、不行、不是、不可……	当 P 为 T，那么 $\neg P$ 为 F； 当 P 为 F，那么 $\neg P$ 为 T	$\neg P$	1	—	0
					0	—	1
合取 and	$\wedge$	和、且、一同、也、一边……一边、不仅……而且、一起……	当且仅当 P,Q 均为 T 时，$P\wedge Q$ 为 T， 其余均为 F	$P\wedge Q$	1	1	1
					1	0	0
					0	1	0
					0	0	0
析取 or	$\vee$	或、既……又	当且仅当 P,Q 均为 F 时，$P\vee Q$ 为 F， 其余均为 T	$P\vee Q$	1	1	1
					1	0	1
					0	1	1
					0	0	0
蕴含 if	$\rightarrow$	如果……那么、因为……所以、由于、只有 Q……才 P……	当且仅当 P 为 T，Q 为 F 时，$P\rightarrow Q$ 为 F， 其余均为 T	$P\rightarrow Q$	1	1	1
					1	0	0
					0	1	1
					0	0	1

① 排他性是指同时只有一种情况存在。

续表

名称	符号	对应词语	真值判定方法	表达式	P 取值	Q 取值	真值
等价 iff	$\rightleftarrows$ $\leftrightarrow$	当且仅当	当且仅当 P,Q 同为 F 或同为 T 时，$P\leftrightarrow Q$ 为 T，其余均为 F	$P\leftrightarrow Q$	1	1	1
					1	0	0
					0	1	0
					0	0	1
异或 xor	$\oplus$	要么……要么、不是……就是……	当且仅当 P,Q 取值不同时，$P\oplus Q$ 为 T，其余均为 F	$P\oplus Q$	1	1	0
					1	0	1
					0	1	1
					0	0	0

【例 1-2】 用适当的命题符号表示下列命题①。

(1) 学习数学不是一件容易的事；

(2) 在学校食堂吃饭不仅需要排队，还需要抢位置；

(3) 她可能在图书馆或者在宿舍；

(4) 如果地球是圆的，那么下的雪是黑色的；

(5) 这台计算机是正常运行的，当且仅当软硬件都没问题；

(6) 那只猫要么是公的，要么是母的。

解：这类题首先设形式命题变量，再进行联结词组合，注意命题变量在不会混淆的情况下可以换不同符号表示。

(1) W：学习数学是一件容易的事。

$\neg W$：学习数学不是一件容易的事

(2) P：在学校食堂吃饭需要排队，X：在学校食堂吃饭需要抢位置。

$P\wedge X$：在学校食堂吃饭不仅需要排队，还需要抢位置。

(3) P：她可能在图书馆，Q：她可能在宿舍。

$P\vee Q$：她可能在图书馆或者在宿舍

(4) P：地球是圆的，Δ：下的雪是黑色的。

$P\rightarrow\Delta$：如果地球是圆的，那么下的雪是黑色的

(5) P：这台计算机是正常运行的，Δ：软硬件都没问题。

$P\leftrightarrow\Delta$：这台计算机是正常运行的，当且仅当软硬件都没问题

(6) P：那只猫是公的，Q：那只猫是母的。

$P\oplus Q$：那只猫要么是公的，要么是母的

除了基本的联结词外，还有一些因为计算机中高电平（>3.75V 电压）占比过多会比

① 需要注意的是，为了严格化，我们并没有判断这些复合命题的真假，因为任何用语句表达的具体命题只有在限定性条件下才能确定真假。例如例 1-2(1)，对于学霸来说这些确实是件容易的事。再如例 1-2(5)，如果软硬件没问题，但是没电呢？因而一个具体的**语句命题**需要一定的语言环境。

较消耗电能，因而专门设计低电平（≈0V 电压）有效的电路的联结词，例如 nif，nor；另外一种用于减少计算机对多组值的过多判断的联结词，例如 nand，这些联结词可以使用表 1-1 的基本联结词构造出来，具体如表 1-2 所示。

表 1-2 计算机与电路设计专有联结词定义及取值真值表

名 称	符 号	真值判定方法	表达式	P 取值	Q 取值	真值
条件否定 nif	$\xrightarrow{C}$	当且仅当 P 为 T，Q 为 F 时，$P \xrightarrow{C} Q$ 为 T，其余均为 F	$P \xrightarrow{C} Q$	1	1	0
				1	0	1
				0	1	0
				0	0	0
与非 nand	$\uparrow$	当且仅当 P，Q 均为 T 时，$P \uparrow Q$ 为 F，其余均为 T	$P \uparrow Q$	1	1	0
				1	0	1
				0	1	1
				0	0	1
或非 nor	$\downarrow$	当且仅当 P，Q 均为 F 时，$P \downarrow Q$ 为 T，其余均为 F	$P \downarrow Q$	1	1	0
				1	0	0
				0	1	0
				0	0	1

需要注意的是，除了 ¬ 联结词外，其余的联结词都是需要两个形式变量参与的，我们称这种联结词只由一个形式命题参与组成的叫**一元联结词**，例如：¬ 就是一元联结词；联结词必须要两个形式命题参与组合的叫**二元联结词**，例如：∨ 就是二元联结词。

1.3 命题公式与真值表示

为了便于标准化的设计，离散数学中引入了标准化的命题公式。对于一个表达式来说，它**如果是一个命题公式**(或者合式公式)，需要满足两个基本条件：

第一，首先它得是一个**形式**命题；

第二，**形式命题**由联结词重新组合也得是一个**形式命题**，或复合形式命题。

因而根据这两个条件可以知道：

(1) 命题公式是由命题变量和联结词组合而成的，且命题变量没有指代任何具体命题。

(2) 命题变量由联结词组合后**必须满足联结词的定义**。

为了标准化刚才所述，我们定义：

定义 1-2(命题演算的合式公式)

(1) 单个命题变量自身就是一个合式公式。

(2) 如果 A，B 均为合式公式，那么满足一元和二元联结词组成的命题也是合式

公式。

(3) 有限次使用(1)(2)条件形成的公式也是合式公式。

满足上述要求的就是合式公式。

【例 1-3】 判断下列哪些是合式公式:

(1) $\neg(P \wedge Q)$ (2)$(P \rightarrow (P \oplus Q))$ (3)$(P \rightarrow (\wedge Q))$ (4)$(\neg P, (P \vee S) \rightarrow W)$

解:(1) 括号中明显是命题公式,因而 $P \wedge Q$ 是一个合式公式。根据第二个条件,再添加一个一元运算还是合式公式。需要注意的是如果把$(P \wedge Q)$当作一个整体 A,那么就会发现这个表达式实际上由两部分合式公式组成:

$\neg(P \wedge Q) = \neg A$,其中 $A = P \wedge Q$

因而很容易看出这是一个合式公式。

(2) 很明显 $P \oplus Q$ 是已知的一种命题公式,那么必然是一个合式公式,我们把 $P \oplus Q$ 当作整体 B,那么原命题可以看作两个合式公式的组合:

$(P \rightarrow (P \oplus Q)) = (P \rightarrow B)$,其中 $B = (P \oplus Q)$

因而很明显,这是一个合式公式。

(3) 表达式中$(\wedge Q)$的 $\wedge$ 是二元联结词,但是**只出现了一个 Q** 因而$(\wedge Q)$不是合式公式,那么显然整体也不是合式公式。

(4) $\neg P$ 和$(P \vee S) \rightarrow W$ 是命题公式,但是在括号内的","号并不是联结词,因而$(\neg P, (P \vee S) \rightarrow W)$并不是合式公式。

当确定是合式公式后,可以研究这些合式公式之间的相互关系,而最常用的方法就是真值表法和公式推演法,这里我们先介绍真值表。

真值表的方法类似于定义联结词的方法,例如需要研究合式公式$(P \vee Q) \rightarrow \neg Q$ 的真值情况,可以按照:**先划分再由内到外的次序编写真值表**。

【例 1-4】 编写$(P \vee Q) \rightarrow \neg Q$ 的真值表。

首先划分基本联结词,那么分别有 $\vee$,$\rightarrow$,$\neg$,在**由内到外**编写真值表如下:

P	Q	$P \vee Q$	$\neg Q$	$(P \vee Q) \rightarrow \neg Q$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	0	0

【例 1-5】 编写 $\neg P \vee Q$ 的真值表。

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \rightarrow Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

我们发现 $\neg P \vee Q$ 与 $P \to Q$ 具有相同的真值表，因而可以认为这两个表达式是**等价**的，或者结果相同的。也就是说可以无差别地互相替换这两个表达式。

定义 1-3（等值） 如果两个命题公式 A,B 具有相同的真值情况，那么称这两个命题等价，记作 $A \Leftrightarrow B$。

等价具有这样的性质：如果 $A \Leftrightarrow B$ 且 $B \Leftrightarrow C$ 那么 $A \Leftrightarrow C$ 这叫等价传递。需要注意的是等价符号 $\Leftrightarrow$ 只用于过程推演，和 $\Leftrightarrow$ 相似意义的 $\leftrightarrow$ 用于表达式内。注意三个符号：$\Leftrightarrow$、$\leftrightarrow$、$=$ 的区别。

通过真值表可以得到如表 1-3 所示的一些等价公式。

表 1-3 基本等价公式

名 称	表 达 式	名 称	表 达 式
双重否定律	$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$	幂等律	$P \vee P \Leftrightarrow P \Leftrightarrow P \wedge P$
交换律	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	吸收率	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
结合律	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	零律	$P \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ $P \vee 1 \Leftrightarrow 1$
分配律	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	同一律	$P \wedge 1 \Leftrightarrow P$ $P \vee 0 \Leftrightarrow P$
摩根律	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	排中律	$P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$
蕴含等值式	$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	矛盾律	$P \wedge \neg P \Leftrightarrow 0$
等价等值式	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$ $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	假言易位	$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
归谬论	$(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$	排斥或	$P \oplus Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$
等价否定等值式	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \leftrightarrow \neg P$	与非	$P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$
或非	$P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$		

注：德摩尔根律的推广：

(1) $\neg(A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) \Leftrightarrow (\neg A_1) \wedge (\neg A_2) \wedge \cdots \wedge (\neg A_n)$

(2) $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \Leftrightarrow (\neg A_1) \vee (\neg A_2) \vee \cdots \vee (\neg A_n)$

有了等价公式，也就等于有了可以直接替换的表达式，我们就可以进行命题公式的推导。

【例 1-6】 证明 $\neg P \to (Q \oplus R) \Leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \to P$。

证：参见表 1-3，证明如下：

过 程	缘 由
$\neg P \to (Q \oplus R)$	原公式
$\Leftrightarrow \neg(\neg P) \vee (Q \oplus R)$	等价代换 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \to Q$
$\Leftrightarrow \neg(\neg P) \vee (\neg(Q \leftrightarrow R))$	等价代换 $Q \oplus R \Leftrightarrow \neg(Q \leftrightarrow R)$
$\Leftrightarrow P \vee \neg(Q \leftrightarrow R)$	对合律 $\neg\neg P \Leftrightarrow P$
$\Leftrightarrow \neg(Q \leftrightarrow R) \vee P$	交换律 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
$\Leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \to P$	等价代换 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \to Q$

证结。上述证明在推导过程时可以只写左边的过程。

【例 1-7】 证明$(P\wedge Q)\rightarrow(P\vee Q)\Leftrightarrow \mathbf{T}$。

证：参见表 1-3，证明如下：

过　程	缘　由
$(P\wedge Q)\rightarrow(P\vee Q)$	原公式
$\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)\vee(P\vee Q)$	等价代换 $\neg P\vee Q\Leftrightarrow P\rightarrow Q$
$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)\vee(P\vee Q)$	摩根律 $\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$
$\Leftrightarrow(\neg P\vee P)\vee(\neg Q\vee Q)$	交换律 $P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$
$\Leftrightarrow \mathrm{T}\vee \mathrm{T}$	否定律 $P\vee\neg P\Leftrightarrow \mathrm{T}$
$\Leftrightarrow \mathrm{T}$	零律 $P\vee \mathrm{T}\Leftrightarrow \mathrm{T}$

证结。

从例 1-7 发现有些表达式的结果与命题变量 P,Q 的具体指代没有任何关系，像这个例子一样结果永远为真，我们称这种命题公式为**永真公式**(**tautology**)或者**重言式**。另外一类结果永远是假的表达式称之为**永假公式**或**矛盾式**(**contradiction**)。这两类均叫作**断言式**，我们给出具体定义：

定义 1-4(断言式)　当一个命题公式的任何命题变量取任意真假值时，命题公式的整体结果始终不变，我们称这种命题公式叫**断言式**。当断言式始终为假时，称该断言式为**永假公式**或**矛盾式**；当断言式始终为真时，称该断言式为**永真公式**或者**重言式**。

定理 1-1　任何两个断言式组合成的命题公式仍然是断言式。

定理 1-2　任何断言式的同一个分量用另外一个命题公式替换，该公式仍然是断言式，且真假不变。

显然对于**定理 1-1**、**1-2** 是由**定义 1-2** 分割出来的结果。对于**定理 1-1**：由于断言式的真假已知，所以它们用联结词的组合也必然真假确定。对于**定理 1-2**：断言式的结果与断言式中同一个分量的取值无关，所以最终结果也是断言式。例如：永真式替换所有的同一个分量后还是永真式。

【例 1-8】 已知 $(P\wedge Q)\rightarrow(P\vee Q)\Leftrightarrow\mathbf{T}$ 那么$((W\oplus\mathbf{T})\wedge Q)\rightarrow((W\oplus\mathbf{T})\vee Q)$的真值为 $\mathbf{T}$。

解：由于$(P\wedge Q)\rightarrow(P\vee Q)\Leftrightarrow\mathbf{T}$ 是断言式中的永真式，那么可以令：

$$P=(W\oplus\mathbf{T})$$

替换后得到$((W\oplus\mathbf{T})\wedge Q)\rightarrow((W\oplus\mathbf{T})\vee Q)$，因而这是断言式的同一分量替换，因而还是断言式，且结果还是 $\mathbf{T}$，所以

$$((W\oplus\mathbf{T})\wedge Q)\rightarrow((W\oplus\mathbf{T})\vee Q)\Leftrightarrow\mathbf{T}$$

1.4　对偶与范式

从上几节，尤其是表 1-3 可以看出，任何命题公式都可以由**基本联结词** $\neg$，$\vee$，$\wedge$ 中任何几个组合而成，而且数字电路的设计确实使用了这些基本的联结词单元。为了把

命题公式便于记忆和实际使用，离散数学中设计了一套标准和方法，即对偶和规范式（或范式）。

例如我们发现表 1-3 中很多表达式只是对换了 $\wedge$ 与 $\vee$，我们把这种操作叫作对偶操作。

定义 1-5（对偶操作） 在给定的命题公式 A 中，将原式中的联结词 $\vee$ 与 $\wedge$ 互换，同时如果有 **T** 和 **F**，则将它们互换。我们称这样的操作叫做对偶化 A，得到的结果为 A^*。**显然 A、A^* 互为对偶式。**

【例 1-9】 写出 $(P\vee \mathbf{T})\wedge(R\uparrow S)$ 的对偶式。

解： 首先表达成只含基本联结词的表达式：$(P\vee \mathbf{T})\wedge\neg(R\wedge S)$

将表达式中的 $\wedge$，$\vee$ 互换得到：$(P\wedge \mathbf{T})\vee\neg(R\vee S)$

将表达式中的 **T**，**F** 互换：$(P\wedge \mathbf{F})\vee\neg(R\vee S)$

这个结果就是原表达式的对偶式。

对偶操作通常是通过摩根律来实现的，因而我们可以得到下列一些性质定理：

定理 1-3（对偶的摩根实现） 设 A 与 A^* 是对偶式，如果 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是组成 A 与 A^* 的原子命题，那么根据摩根律可以有：

$$\neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n)\Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)$$

或者

$$A(P_1,P_2,\cdots,P_n)\Leftrightarrow \neg A^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)$$

其中，表达式 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 是指 A 是由 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 通过**基本联结词** $\neg$，$\vee$，$\wedge$ 组合而成的。

定理 1-4（对偶等价） 若公式 A，B 均是由 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 组成，且 $A\Leftrightarrow B$，那么 $A^*\Leftrightarrow B^*$。

对偶化操作的主要作用是在命题推演和演化时快速得到原表达式的另外一种表达，正是这种方式才实现了对命题公式的规范化。

规范化的表达式有利于数字电路逻辑的简单实现，否则需要设计多个专用的逻辑电路原件，这对于设计成本来说是不利的。规范化有两种途径：第一种是输入端电路全部变为合取式形式，另外一种是全部变为析取式。

有时也发现存在形如 $P\vee Q$ 的表达式无法在具有三个输入变量 P，Q，R 的电路中直接实现，因为电路中 R 端必须有一个输入，要么是 **T**，要么是 **F**。我们可以将 $P\vee Q$ 表示成 $(P\vee Q)\wedge(R\vee\neg R)$，规范化正是起到了这种作用。下面我们来具体介绍范式。

定义 1-6（范式） 一个公式称之为范式，当且仅当可以表示：

$$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n \text{ 或 } A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n,(n>1)$$

其中，前者称为**合取范式**，后者称之为**析取范式**，特别的：

(1) 在**合取范式**中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为**命题变量**或者**其否定所组成的析取式。**

(2) 在**析取范式**中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为**命题变量**或者**其否定所组成的合取式。**

对于范式的求解一般可以归纳为以下三个步骤：

(1) 将命题首先表示成基本联结词的命题。

(2) 利用摩根律将 $\neg$ 放在命题变量的前面。

(3) 利用分配律、结合律实现范式。

当然对于上面的基本步骤，我们还可以用另外一种方式表达：

如果求解合取范式，那么除了用 ∧ 联结外，只要括号内是析取表达式或者单个命题变量。如果求解析取范式，那么除了用 ∨ 联结外，只要括号内是合取表达式或者单个命题变量。

需要注意的是范式最终要得到结果并不是唯一的。

【例 1-10】 求解 $(P \to Q) \to R$ 的析取范式和合取范式。

解：析取范式：

过　程	缘　由
$(P \to Q) \to R$	原公式
$\Leftrightarrow \neg(P \to Q) \vee R$	等价代换 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \to Q$
$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee R$	等价代换 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \to Q$
$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R$	摩根律 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

满足析取范式 $A_1 \vee A_2$ 形式，终止操作。

合取范式：

过　程	缘　由
$(P \to Q) \to R$	原公式
$\Leftrightarrow \neg(P \to Q) \vee R$	等价代换 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \to Q$
$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee R$	等价代换 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \to Q$
$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R$	摩根律 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$	分配律 $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

满足合取范式 $A_1 \wedge A_2$ 形式，终止操作。

对于例 1-10 的析取范式还可以表达成：【由合取范式结论推导】

过　程	缘　由
$(P \to Q) \to R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$	例 1-10 合取范式结果
$\Leftrightarrow [(P \vee R) \wedge \neg Q] \vee [(P \vee R) \wedge R]$	分配律 $P \wedge (Q \vee R)$
$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R) \vee (R \wedge R)$	分配律 $P \wedge (Q \vee R)$

显然这个表达式也是一个析取范式，但是一个命题公式具有一个或者多个范式对于电路设计者来说是噩梦，因而需要一个唯一的规范化的表达。为了得到一个唯一的结果，离散数学专门设计了**主析取范式**和**主合取范式**。首先定义两个概念。

定义 1-7（**大小项**）　对于有 n 个命题变量的表达式 $A_1 \Box A_2 \Box \cdots \Box A_n$ 中，每个变元 A_i 只能选用 a_i 与 $\neg a_i$ 中一个，如果□代表的是 ∧，那么称这个 n 元表达式为**极小项**或者**布尔合取**；如果□代表的是 ∨，那么称这个 n 元合取式为**极大项**或者**布尔析取**。

一般来说对于极大小项，**如果有 n 个命题变量，那么会有 2^n 个极大项或者极小项。**

例如：对于两个命题变量：P, Q 能组成的极小项有：

$P \wedge Q, P \wedge \neg Q, \neg P \wedge Q, \neg P \wedge \neg Q$。

极大项有：

$P \lor Q, P \lor \neg Q, \neg P \lor Q, \neg P \lor \neg Q$。

定义 1-8(主范式) 给定一个命题公式，若有一个仅由**极大项**(**小项**)通过**合取**(**析取**)组成的等价公式，那么这个等价公式就是给定命题的**主范式**。

其中：如果主范式由**命题公式整体取 T 时所指派的**极小项**析取**组成，那么这个主范式叫作**主析取范式**；如果主范式由**命题公式整体取 F 时所指派的**极大项**合取**组成，那么这个主范式叫作**主合取范式**。

下面我们给出两种推导主范式的方法：**指派真值法**和**等价公式推导法**。

定义 1-8 给定了一个判定方法，就是利用命题公式指派真值表的方法，或**指派真值法**。下面我们来具体介绍这种方法：

首先给出二元大小项的真值表，如表 1-4 和表 1-5 所示，这里我们使用布尔值表示。

表 1-4 双命题变量的极小项真值表与对应编码式

P	Q	对 T 应编码式	$P \land Q$	$P \land \neg Q$	$\neg P \land Q$	$\neg P \land \neg Q$
0	0	$m_{00} = \neg P \land \neg Q$	0	0	0	1
0	1	$m_{01} = \neg P \land Q$	0	0	1	0
1	0	$m_{10} = P \land \neg Q$	0	1	0	0
1	1	$m_{11} = P \land Q$	1	0	0	0

表 1-5 双命题变量的极大项真值表与对应编码式

P	Q	对 T 应编码式	$P \lor Q$	$P \lor \neg Q$	$\neg P \lor Q$	$\neg P \lor \neg Q$
0	0	$M_{00} = P \lor Q$	0	1	1	1
0	1	$M_{01} = P \lor \neg Q$	1	0	1	1
1	0	$M_{10} = \neg P \lor Q$	1	1	0	1
1	1	$M_{11} = \neg P \lor \neg Q$	1	1	1	0

其中 m_{ij} 的 i,j 分别指 P,Q 取 0,1 的情况，同理 M_{ij}。如果是三元那么 m_{ijk} 或 M_{ijk} 的 i,j,k 分别指 P,Q,R 取 0,1 的情况，其余以此类推。

从表 1-4、表 1-5 还可以得到一些大小项的性质：

(1) 每个**极小项**(**极大项**)的真值指派与编码式相同时，其真值为 **T**(**F**)时，其余 2^n-1 种情况真值均为 **F**(**T**)。

(2) 任意两个**不同极小项**(**极大项**)的**合取**(**析取**)式**永假**(**真**)。

(3) 全体**极小项**(**极大项**)的**析取**(**合取**)式**永真**(**假**)即：

$$\bigvee_{i=0}^{2n-1} m_i = m_1 \lor m_2 \lor \cdots \lor m_{2n-1} \Leftrightarrow \mathbf{T}$$

$$\bigwedge_{i=0}^{2n-1} M_i = M_1 \land M_2 \land \cdots \land M_{2n-1} \Leftrightarrow \mathbf{F}$$

注：这里的 i 只是表示第几个极大项或者极小项，并不表示真值取值情况。

【例 1-11】 利用表 1-4、表 1-5 表示出命题 $P \rightarrow Q$ 的主析取范式和主合取范式。

由于表达式 $P \rightarrow Q$，只有一种取假的情况，即 $P = \mathbf{T}, Q = \mathbf{F}$，其余均为真。