

高等院校基础教育“十三五”规划教材

线性代数 及应用

蒋诗泉 叶飞 钟志水 主编
谢国根 张齐 丁学平 黄新旭 副主编

LINEAR ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS



中国工信出版集团



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

高等院校基础教育“十三五”规划教材

线性代数 及应用

蒋诗泉 叶飞 钟志水 主编
谢国根 张齐 丁学平 黄新旭 副主编

LINEAR ALGEBRA AND
APPLICATIONS

人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及应用 / 蒋诗泉, 叶飞, 钟志水主编. —
北京: 人民邮电出版社, 2019.8
高等院校基础教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-115-51353-3

I. ①线… II. ①蒋… ②叶… ③钟… III. ①线性代
数—高等学校—教材 IV. ①0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第142386号

内 容 提 要

本书内容充分体现“好用、实用、通用”的原则,在编写过程中以普通高等学校线性代数教学大纲和研究生入学考试大纲为依据,着眼于介绍线性代数的基本概念、基本原理、基本方法,淡化定理的理论证明,突出定理的应用价值。本书在结构、内容等安排上做了精心策划,尽量做到内容清晰、结构合理、层次分明、使用方便。本书共6章,包括行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换、MATLAB在线性代数中的应用。

本书可以作为高等学校非数学类专业“线性代数”课程的教材,也可作为相关领域的技术人员或自学者的参考用书。

◆ 主 编 蒋诗泉 叶 飞 钟志水
副 主 编 谢国根 张 齐 丁学平 黄新旭
责任编辑 刘海漂
责任印制 焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
三河市中晟雅豪印务有限公司印刷

◆ 开本: 787×1092 1/16
印张: 14.25 2019年8月第1版
字数: 338千字 2019年8月河北第1次印刷

定价: 39.80元

读者服务热线: (010)81055256 印装质量热线: (010)81055316

反盗版热线: (010)81055315

广告经营许可证: 京东工商广登字 20170147号

前 言

线性代数是高等院校经管类、理工类等专业的一个重要基础课之一,它是后续课程和现代科学技术的重要基础,在自然科学、经济管理、工程科技领域有着广泛的应用.这门课程对培养学生创新思维和应用意识有着重要的作用.

编者在多年的线性代数教学和大学生数学建模竞赛辅导的基础上编写了本书,旨在为广大读者提供系统的线性代数知识及丰富的应用案例,真正体现线性代数的应用价值.

本书主要内容如下.

第一章为行列式.本章介绍了 n 阶行列式的定义、行列式的基本性质、行列式的常用计算方法和克莱姆法则等内容,并给出了行列式的应用案例.

第二章为矩阵.本章首先通过实例介绍了矩阵的背景,给出矩阵的概念,再介绍矩阵的运算及运算的性质、分块矩阵、逆矩阵、矩阵的初等变换和初等矩阵、矩阵的秩,最后给出矩阵在编制运输计划表和网络图中实际应用的案例.

第三章为线性方程组.本章基于向量组相关理论,讨论一般线性方程组的解法、线性方程组解的存在性及线性方程组解的结构等内容,并给出线性方程组在任务分派和经济系统平衡中应用的案例.

第四章为相似矩阵与二次型.本章首先介绍向量的内积、向量组正交化方法、正交矩阵、方阵的特征值与特征向量、相似矩阵、矩阵的对角化条件及实对称矩阵的对角化,然后介绍二次型化为标准形、正定二次型等问题,最后给出相似矩阵与二次型在约束最优化等实际问题中应用的案例.

第五章为线性空间与线性变换.本章首先给出一般线性空间的概念与性质,然后给出基变换与坐标变换概念并介绍线性空间上的一种重要的对应关系——线性变换和线性变换的矩阵表示,最后给出线性空间与线性变换在密码学和平面图形变换等实际问题中应用的案例.

第六章为 MATLAB 在线性代数中的应用.本章首先对 MATLAB 进行简单介绍,然后重点介绍 MATLAB 的矩阵运算和矩阵函数,最后通过食品配方、交通流量、成本核算等实例介绍 MATLAB 在线性代数中的应用.

本书具有以下主要特色.

第一,突出数学概念背景和实际应用.对于每个概念尽量通过实例引入,使读者了解知识的脉络.每一章专门增加一节应用实例,注重培养学生的数学应用意识,将数学建模

的思想完全融入课程,并配有大量应用性习题.

第二,系统化的学习结构体系.本书在每一章都给出该章的主要内容,在每一节都配有“课前导读”和“学习要求”,使学生快速了解该节的主要内容及该节的学习重点.在每章后面都有该章知识点网络图、该章题型总结与分析、总习题(A)、总习题(B),这些内容设置可帮助学生快速掌握该章的逻辑结构、重点内容、主要方法等.

第三,配有丰富的、多样化的例题和习题.习题严格按照知识点的难易程度进行梯度安排,既有基础知识,也有提高知识.每章的总习题部分专门设置为A组和B组两类.A组强调基础,B组强调提高,且很多习题都选自考研真题.

第四,MATLAB应用于线性代数课程中.为了帮助读者更好地了解书中的重要概念、定理、方法及其应用,本书专门设计了MATLAB在线性代数中的应用.通过介绍MATLAB科学计算,使学生真正感受到数学的应用价值;知道如何应用数学并将数学与计算机进行无缝对接.

本书由蒋诗泉、叶飞、钟志水担任主编,谢国根、张齐、丁学平、黄新旭担任副主编.各章编写分工:第一章由叶飞编写,第二章由丁学平编写,第三章由谢国根编写,第四章由张齐编写,第五章由蒋诗泉编写,第六章由钟志水编写.黄新旭对部分习题进行了校对.全书由蒋诗泉统稿.

本书在编写过程中得到了铜陵学院教务处、数学与计算机学院的各位领导和老师的大力支持,在此表示由衷的感谢!本书编写过程中参考的相关书籍均列于参考文献中,在此也向有关作者表示真诚的感谢!

编 者
2019年5月

目 录

第一章 行列式 1

第一节 行列式概念的引进 1

一、二阶行列式 1

二、三阶行列式 2

习题 1-1 5

第二节 排列 5

一、加法原理和乘法原理 6

二、排列及其逆序数 6

习题 1-2 8

第三节 n 阶行列式 8

一、 n 阶行列式定义 9

二、几类特殊的行列式 10

习题 1-3 11

第四节 行列式的性质 12

习题 1-4 19

第五节 行列式按行(列)展开 20

一、行列式按某一行(列)展开 20

二、范德蒙行列式 24

习题 1-5 27

第六节 克莱姆法则 28

习题 1-6 31

第七节 应用实例 32

一、在求解直线和曲线方程中的

应用 32

二、在数据拟合中的应用 34

三、在多项式因式分解中的应用 36

习题 1-7 37

本章内容小结 38

一、本章知识点网络图 38

二、本章题型总结与分析 38

总习题一(A) 42

总习题一(B) 44

第二章 矩阵 48

第一节 矩阵的概念及运算 48

一、矩阵的定义 48

二、几种特殊矩阵 49

三、矩阵的线性运算 51

四、矩阵的乘法 52

五、矩阵的转置 53

六、方阵的行列式 54

习题 2-1 54

第二节 逆矩阵 55

习题 2-2 57

第三节 分块矩阵 58

一、矩阵的分块 58

二、分块矩阵的运算 58

习题 2-3 60

第四节 矩阵的初等变换和初等矩阵

..... 61

一、矩阵的初等变换 61

二、初等矩阵及其性质 63

三、初等变换求矩阵的逆 64

四、初等变换解矩阵方程 65

习题 2-4 66

第五节 矩阵的秩	67	习题 3-4	106
一、矩阵秩的定义	67	第五节 应用实例	107
二、矩阵秩的求法	68	一、任务分派问题	107
习题 2-5	69	二、经济系统的平衡问题	108
第六节 应用实例	69	习题 3-5	109
一、编制运输计划	69	本章内容小结	110
二、矩阵在网络图中应用	70	一、本章知识点网络图	110
习题 2-6	70	二、本章题型总结与分析	111
本章内容小结	71	总习题三(A)	114
一、本章知识点网络图	71	总习题三(B)	117
二、本章题型总结与分析	72	第四章 相似矩阵与二次型	119
总习题二(A)	73	第一节 正交矩阵	119
总习题二(B)	74	一、向量内积	119
第三章 线性方程组	77	二、 n 维向量的长度与夹角	120
第一节 n 维向量及线性组合	77	三、向量组的正交性	120
一、 n 维向量的概念及其运算	77	四、正交矩阵	122
二、向量组及其线性组合	79	习题 4-1	122
习题 3-1	81	第二节 方阵的特征值与特征向量	123
第二节 向量组的线性相关性	81	一、特征值与特征向量的概念及其求法	123
一、向量组的线性相关与线性无关	81	二、特征值与特征向量的性质	125
二、向量组线性相关性的判定	82	习题 4-2	125
习题 3-2	85	第三节 相似矩阵	126
第三节 向量组的秩	86	一、相似矩阵的概念及性质	126
一、向量组的等价	86	二、矩阵与对角矩阵相似的条件	127
二、极大线性无关组	87	三、实对称矩阵对角化	128
三、矩阵秩与向量组秩的关系	89	习题 4-3	130
习题 3-3	91	第四节 二次型	131
第四节 线性方程组的可解性及解的结构	91	一、二次型及其矩阵表示	131
一、线性方程组有解的判定定理	93	二、化二次型为标准形	133
二、齐次线性方程组解的结构	99	习题 4-4	136
三、非齐次线性方程组解的结构	104		

第五节 正定二次型和正定矩阵	136	一、本章知识点网络图	166
习题 4-5	139	二、本章题型总结与分析	167
第六节 应用实例	139	总习题五(A)	171
习题 4-6	140	总习题五(B)	172
本章内容小结	141		
一、本章知识点网络图	141	第六章 MATLAB 在线性代数中的应用	174
二、本章题型总结与分析	141		
总习题四(A)	145	第一节 MATLAB 基本操作	174
总习题四(B)	146	一、MATLAB 简介	174
第五章 线性空间与线性变换	148	二、MATLAB 主窗口	175
第一节 线性空间	148	三、矩阵创建	176
一、线性空间的概念	148	习题 6-1	176
二、线性空间的性质	150	第二节 矩阵算术运算	177
三、线性空间的子空间	150	一、数乘运算	177
习题 5-1	150	二、加运算	177
第二节 线性空间的基、维数与坐标	151	三、减运算	178
习题 5-2	153	四、乘运算	178
第三节 基变换与坐标变换	154	五、幂运算	178
一、基变换与过渡矩阵	154	六、转置运算	178
二、坐标变换公式	155	七、点运算	179
习题 5-3	157	习题 6-2	179
第四节 线性变换	157	第三节 MATLAB 矩阵函数	179
一、线性变换的概念与性质	158	一、求方阵行列式值函数 $\det()$	180
二、线性变换的性质	159	二、求方阵逆矩阵函数 $\text{inv}()$	180
三、线性变换的矩阵表示	159	三、求方阵特征值与特征向量函数 $\text{eig}()$	180
习题 5-4	163		180
第五节 应用实例	164	四、求上三角矩阵函数 $\text{triu}()$	181
一、密码问题	164	五、求下三角矩阵函数 $\text{tril}()$	181
二、平面图形变换	165	六、求方阵秩函数 $\text{rank}()$	181
习题 5-5	166	七、求方阵迹函数 $\text{trace}()$	181
本章内容小结	166	八、求共轭矩阵函数 $\text{conj}()$	182
		九、求方阵特征多项式函数 $\text{poly}()$	182
		十、求矩阵元素个数函数 $\text{numel}()$	182

十一、求矩阵维数函数 size()	182	二、交通流量问题	187
十二、生成单位方阵函数 eye()	183	三、插值多项式系数问题	188
十三、生成零方阵函数 zeros()	183	四、平板稳态温度问题	189
十四、生成元素全为 1 的方阵函数 ones()	183	五、服装加工问题	190
十五、矩阵旋转函数 rot90()	183	六、成本核算问题	191
十六、生成范德蒙矩阵函数 vander()	184	习题 6-4	192
十七、解方程(组)函数 solve()	184	本章内容小结	193
十八、将二次型化为标准形函数 schur()	185	一、本章知识点网络图	193
习题 6-3	186	二、本章题型总结与分析	194
第四节 应用实例	186	总习题六(A)	194
一、食品配方问题	187	总习题六(B)	195
		参考答案	198
		参考文献	220

第一章 行列式

行列式是数学家莱布尼茨提出的,它源于线性方程组的求解,起初只是作为线性方程组解的一种速记符号.在很长一段时间内,行列式只是作为解线性方程组的一种工具被使用,后来,行列式才单独形成一门理论并得到进一步研究.在对行列式的研究中,数学家麦克劳林、克莱姆、范德蒙、拉普拉斯、柯西和雅克比等都做出了杰出的贡献,持续推动了行列式理论的发展.其中,雅克比的著名论文《论行列式的形成和性质》总结了行列式的发展,标志着行列式系统理论的建立.就线性代数而言,行列式既是线性代数中最基本的内容之一,也是我们用来分析和解决线性代数中其他问题的工具.本章主要介绍了 n 阶行列式的定义、行列式的基本性质、行列式的常用计算方法和克莱姆法则等内容.

第一节 行列式概念的引进

【课前导读】

在求解二元或三元一次线性方程组时,通过高斯消元法,不难发现方程组的解可以用方程组的系数和常数项来表示,但想强行记住这些表达式是很不容易的,特别是对于三元一次线性方程组.为此,行列式作为一种速记符号被引入.通过行列式符号,可使方程组解的表达式更加简洁和规整,更便于使用.

【学习要求】

1. 了解二元和三元线性方程组的解与方程组系数和常数项之间的关系.
2. 理解二阶和三阶行列式的概念和它们所表示的代数和.
3. 掌握二阶和三阶行列式的对角线规则,并能使用对角线规则来计算二阶和三阶行列式.

一、二阶行列式

设有二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1-1)$$

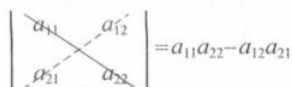
当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,由高斯消元法可得线性方程组(1-1)的唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \quad (1-2)$$

可以看出, 线性方程组的解(1-2)由线性方程组的系数和常数项构成. 若想强行记住这些表达式, 是不容易的. 为了便于记忆, 人们引进符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

来表示代数式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, 并称这个符号为二阶行列式. 通常, 二阶行列式的计算可用图 1-1 表示.



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

图 1-1 二阶行列式对角线规则

基于上述二阶行列式的概念, 代数式 $b_1a_{22}-a_{12}b_2$ 和 $a_{11}b_2-b_1a_{21}$ 可分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

因此, 当行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 线性方程组(1-1)的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad (1-3)$$

其中, D 由方程组的系数构成, 称之为系数行列式. 将 D 的第一列换成方程组的常数项可得 D_1 , 将 D 的第二列换成方程组的常数项可得 D_2 . 显然, 式(1-3)比式(1-2)更便于记忆和使用.

例 1 解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7, \\ 3x_1 + x_2 = 17. \end{cases}$$

解 根据给定的线性方程组, 可知

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 17 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} = -4.$$

因为系数行列式 $D \neq 0$, 所以方程组存在唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 5, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2.$$

二、三阶行列式

设有三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (1-4)$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$ 时, 由高斯消元法可得线性方程组(1-4)的唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - b_1 a_{23} a_{32} - a_{12} b_2 a_{33} - a_{13} a_{22} b_3}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}, \\ x_2 = \frac{a_{11} b_2 a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} b_3 - a_{11} a_{23} b_3 - b_1 a_{21} a_{33} - a_{13} b_2 a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}, \\ x_3 = \frac{a_{11} a_{22} b_3 + a_{12} b_2 a_{31} + b_1 a_{21} a_{32} - a_{11} b_2 a_{32} - a_{12} a_{21} b_3 - b_1 a_{22} a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}. \end{cases} \quad (1-5)$$

可以看出, 线性方程组的解(1-5)也由线性方程组的系数和常数项构成. 相对于二元一次线性方程组, 若想记住这些表达式, 更不容易. 同样地, 为了便于记忆和使用, 人们引进了符号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

来表示代数式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

并称这个符号为三阶行列式. 通常, 三阶行列式的计算可用图 1-2 所示的对角线规则(也称为沙流氏规则)来记忆.

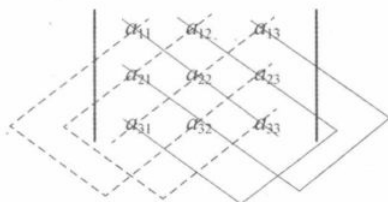


图 1-2 三阶行列式对角线规则

基于上述三阶行列式的概念, 代数式

$$b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - b_1 a_{23} a_{32} - a_{12} b_2 a_{33} - a_{13} a_{22} b_3,$$

$$a_{11} b_2 a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} b_3 - a_{11} a_{23} b_3 - b_1 a_{21} a_{33} - a_{13} b_2 a_{31},$$

$$a_{11} a_{22} b_3 + a_{12} b_2 a_{31} + b_1 a_{21} a_{32} - a_{11} b_2 a_{32} - a_{12} a_{21} b_3 - b_1 a_{22} a_{31}$$

可分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中, D 由方程组的系数构成, 称之为系数行列式. 将 D 的第一列换成方程组的常数项可得 D_1 , 将 D 的第二列换成方程组的常数项可得 D_2 , 将 D 的第三列换成方程组的常数项可得 D_3 .

因此, 当行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 线性方程组(1-4)的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}. \quad (1-6)$$

例2 用对角线规则计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 $D = 1 \times 1 \times 2 + 2 \times 0 \times 2 + 1 \times 3 \times 3 - 1 \times 1 \times 2 - 2 \times 3 \times 2 - 1 \times 0 \times 3 = -3$.

例3 解三元一次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 5, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

解 根据给定的线性方程组, 可知

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -5 \\ 9 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & -5 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

因为系数行列式 $D \neq 0$, 所以方程组存在唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -1, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 0.$$

在上文中, 我们介绍了二阶和三阶行列式, 并使用对角线规则来记忆它们所表示的代数式. 下面我们来介绍一类特殊情形——一阶行列式. 显然, 一阶行列式只有一行一列, 一般记为 a , 不记为 $|a|$, 以免和 a 的绝对值 $|a|$ 混淆.

另外, 需要指出的是, 我们现在所使用的行列式表示法主要归功于柯西和凯莱. 柯西第一个把行列式的元素排成方阵, 并采用双足标记法, 形成有序的行和列, 凯莱第一个对方阵两边加上竖线, 最终形成了现在的行列式表示法.

综上所述, 我们介绍了一阶、二阶和三阶行列式的符号记法以及对角线规则. 自然地, 人们会联想到 n 阶行列式. 为了从理论上系统地介绍 n 阶行列式, 我们先要学习和掌握与排列相关的概念、运算和性质.

习题 1-1

1. 用对角线规则计算下列二阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} \sin x & \sin y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix}; \quad (3) \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} \arcsin x & \arccos x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (-1 \leq x \leq 1);$$

$$(5) \begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 1 & \log_b a \end{vmatrix} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1; b > 0 \text{ 且 } b \neq 1).$$

2. 用对角线规则计算下列三阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

3. 用行列式解线性方程组:

$$(1) \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 11, \\ x_1 + x_2 = 5; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4. \text{ 解方程 } \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0.$$

$$5. \text{ 证明等式 } \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

第二节 排列

【课前导读】

为了从理论上系统地介绍 n 阶行列式的定义, 本节介绍了排列、逆序数、排列的奇偶性和对换等概念, 讨论了对换对排列奇偶性的影响, 并分析了 n 阶排列中奇偶排列的数量关系. 同时, 为了更好地理解排列等概念, 本节还介绍了加法原理和乘法原理.

【学习要求】

1. 了解加法原理与乘法原理.

2. 理解关于排列奇偶性的两个定理及证明.
3. 掌握排列逆序数的计算方法.

一、加法原理和乘法原理

加法原理和乘法原理是在大量观察、实践的基础上, 经过归纳、概括而得出的. 加法原理与分类有关, 乘法原理与分布有关, 它们是分析处理排列组合等问题的基本原理. 下面对它们作一个简单的介绍.

加法原理: 如果完成一件事情共有 n 类方法, 在第一类方法中有 m_1 种不同的方法, 在第二类方法中有 m_2 种不同的方法, $\dots$, 在第 n 类方法中有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事情共有 $m_1+m_2+\dots+m_n$ 种不同的方法.

乘法原理: 如果完成一件事需要分成 n 步, 在第一步中有 m_1 种不同的方法, 在第二步中有 m_2 种不同的方法, $\dots$, 在第 n 步中有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事情共有 $m_1 m_2 \cdots m_n$ 种不同的方法.

例 4 在所有的两位数中, 个位数大于十位数的两位数共有多少个?

解 据题意, 可按个位数分别为 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 将所求的两位数分成 8 类. 在每一类中, 满足条件的两位数分别有 1 个、2 个、3 个、4 个、5 个、6 个、7 个、8 个. 根据加法原理, 满足条件的两位数共有

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36(\text{个}).$$

例 5 将 n 个球随机地放入 $N(N \geq n)$ 个盒子中, 且每个盒子内至多只有一个球, 问共有多少种放法?

解 将 n 个球随机地放入 N 个盒子中, 共需分成 n 步, 先放第一个球, 再放第二个球, $\dots$, 最后放第 n 个球. 由题意知, 第一个球有 N 种放法, 第二个球有 $N-1$ 种放法, $\dots$, 第 n 个球有 $N-n+1$ 种放法. 根据乘法原理共有 $N(N-1)\cdots(N-n+1)$ 种放法.

二、排列及其逆序数

定义 1-1 由 n 个数码 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个 n 元有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 n 阶全排列(简称排列).

在排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中, $i_1, i_2, \dots, i_n$ 可以表示数码 $1, 2, \dots, n$ 中的任意一个, 且两两不相等. 例如, 在五阶排列 53421 中, $i_1=5, i_2=3, i_3=4, i_4=2, i_5=1$.

根据乘法原理, n 个数码 $1, 2, \dots, n$ 共构成 $n!$ 个排列. 其中, 排列 $12\cdots n$ 中的数码由左到右是按从小到大的自然顺序排列的, 我们称这样的排列为标准排列. 显然, 在所有的 n 阶排列中, 只有一个标准排列, 而其余的 n 阶排列都或多或少地破坏了自然顺序. 例如, 在五阶排列 53421 中, 5 和 3, 5 和 4, 5 和 2, 5 和 1, 3 和 2, 3 和 1, 4 和 2, 4 和 1, 2 和 1 的顺序都与自然顺序相反. 下面使用逆序和逆序数来描述和统计这种现象.

定义 1-2 在一个 n 阶排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中, 如果一对数的排列顺序与自然顺序相反, 即排在左边的数比排在右边的数大, 那么就称它们为一个逆序. 一个排列中, 逆序的总数称为排列的逆序数, 记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

通常, 我们使用枚举法来计算排列 $i_1 i_2 i_3 \cdots i_{n-1} i_n$ 的逆序数. 首先分析 i_1 与 $i_2, i_3, \cdots, i_{n-1}, i_n$ 是否构成逆序, 并计数为 m_1 ; 然后分析 i_2 与 $i_3, \cdots, i_{n-1}, i_n$ 是否构成逆序, 并计数为 m_2 ; 依次类推, 最后分析 i_{n-1} 与 i_n 是否构成逆序, 并计数为 m_{n-1} , 从而可得

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1}.$$

例 6 求五阶排列 53421 的逆序数.

解 $\tau(53421) = 4 + 2 + 2 + 1 = 9$.

例 7 求 n 阶排列 $123 \cdots (n-1)n$ 和 $n(n-1) \cdots 321$ 的逆序数.

解 $\tau(123 \cdots (n-1)n) = 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$,

$$\tau(n(n-1) \cdots 321) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 1-3 逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如, 排列 53421 为奇排列, 排列 $123 \cdots (n-1)n$ 为偶排列, 排列 $n(n-1) \cdots 321$ 的奇偶性与 n 有关.

定义 1-4 在一个排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中, 只交换其中数码 i_s 和 i_t 的位置, 其余数码保持不动, 可以得到一个新排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$, 对排列施行的这种运算称为**对换**, 一般使用符号 (i_s, i_t) 表示. 若交换的数码处于相邻位置, 则称该对换为**相邻对换**.

例如, $53421 \xrightarrow{(3,2)} 52431$.

显然, 非相邻对换可以通过若干次相邻对换逐步实现. 另外, 一个 n 阶排列经过对换后还是 n 阶排列, 不会改变排列的阶数, 从这个意义上来说, 对换是封闭的.

定理 1-1 一次对换会改变排列的奇偶性.

证明 (1) 先考虑相邻对换的情形. 假设原排列为 $i_1 \cdots i_s a b j_1 \cdots j_t$, 经过相邻对换 (a, b) 后, 得到一个新排列 $i_1 \cdots i_s b a j_1 \cdots j_t$.

显然, 新排列相对于原排列, 数码相对位置发生变化的只有数码 a 和 b . 这就是说, 在原排列 $i_1 \cdots i_s a b j_1 \cdots j_t$ 中, 若数码 a 和 b 构成逆序, 则在新排列 $i_1 \cdots i_s b a j_1 \cdots j_t$ 中, 数码 b 和 a 不构成逆序. 反之亦然. 从而

$$\tau(i_1 \cdots i_s b a j_1 \cdots j_t) = \tau(i_1 \cdots i_s a b j_1 \cdots j_t) \pm 1,$$

可见, 一次相邻对换会改变排列的奇偶性.

(2) 再考虑非相邻对换的情形. 假设原排列为 $i_1 \cdots i_s a k_1 \cdots k_r b j_1 \cdots j_t$, 经过对换 (a, b) 后, 得到一个新排列 $i_1 \cdots i_s b k_1 \cdots k_r a j_1 \cdots j_t$, 这里 $r \geq 1$. 不难看出, 非相邻对换可以经过 $2r+1$ 次相邻对换实现, 具体路径如下:

$$i_1 \cdots i_s a k_1 \cdots k_r b j_1 \cdots j_t \xrightarrow{r+1 \text{ 次相邻对换}} i_1 \cdots i_s b a k_1 \cdots k_r j_1 \cdots j_t \xrightarrow{r \text{ 次相邻对换}} i_1 \cdots i_s b k_1 \cdots k_r a j_1 \cdots j_t,$$

显然, $2r+1$ 为奇数, 由(1)知奇数次相邻对换也改变了排列的奇偶性. 可见, 一次非相邻对换会改变排列的奇偶性.

综上(1)和(2)可得, 一次对换会改变排列的奇偶性.

定理 1-2 在所有 $n(n \geq 2)$ 阶排列中, 奇排列和偶排列各占一半, 即各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明 易知所有 n 阶排列共有 $n!$ 个, 用 A 表示所有 n 阶奇排列构成的集合, 用 B 表示所有 n 阶偶排列构成的集合, 并用 $|A|$ 和 $|B|$ 分别表示集合 A 和 B 中元素的个数.

若对所有的 n 阶排列进行一次相同的对换, 则集合 A 中所有奇排列都变成了偶排列. 由假设知, 在所有 n 阶排列中, 偶排列共有 $|B|$ 个, 从而可得 $|A| \leq |B|$, 同理可得 $|B| \leq |A|$, 从而有 $|A| = |B| = \frac{n!}{2}$.

习题 1-2

1. 用 1, 2, 3, 4, 5, 6 这 6 个数字, 问:

(1) 总共可以组成多少个 6 位数?

(2) 总共可以组成多少个 6 位的偶数?

(3) 总共可以组成多少个没有重复数字的 6 位数?

2. 求下列排列的逆序数:

(1) 162435;

(2) 293674518;

(3) 7635421;

(4) $135 \cdots (2n-1)246 \cdots 2n$.

3. 试确定数码 i 和 j 的值, 使得六阶排列:

(1) $63i5j1$ 成为奇排列;

(2) $3i26j5$ 成为偶排列.

4. 设 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$ 为一个 n 阶排列, 证明:

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n) + \tau(i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

5. 求证:

(1) 一个 n 阶奇排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$, 经过奇数次对换变成标准排列 $12 \cdots (n-1)n$;

(2) 一个 n 阶偶排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$, 经过偶数次对换变成标准排列 $12 \cdots (n-1)n$.

第三节 n 阶行列式

【课前导读】

在第一节中, 我们介绍了二阶和三阶行列式, 并使用对角线规则来计算它们所表示的代数. 值得注意的是, 对角线规则并不适用于四阶以上(包括四阶)行列式的计算. 在本节中, 我们从理论上系统地介绍了 n 阶行列式的定义, 它表示所有取自不同行、不同列元素乘积的代数和, 并给出了代数和的一种数学表达式. 同时, 我们使用行列式的定义分析了一些特殊行列式的值. 其中, 上三角形行列式在行列式的计算中起着非常重要的作用. n 阶行列式的定义是本章中一个基本而重要的概念, 是行列式所有相关理论的基石.

【学习要求】

1. 了解 n 阶行列式的定义.

2. 理解 n 阶行列式定义的一种数学表达式.

3. 掌握使用行列式定义计算行列式的思路和方法.