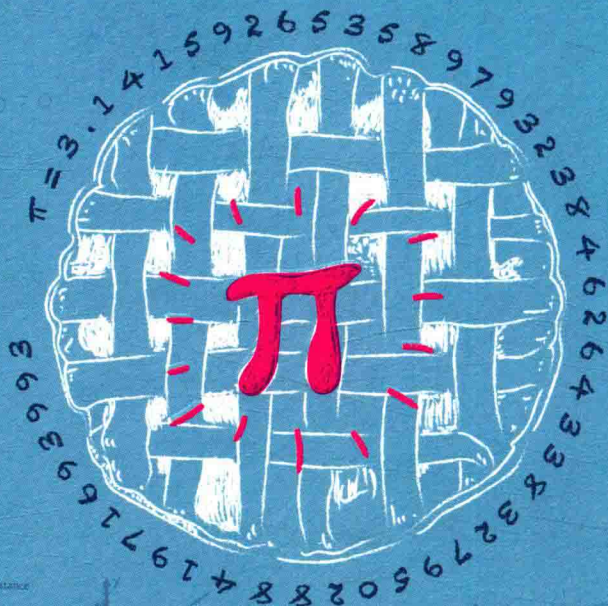


跨越抽象与现实的边界，用数学思考万物

数学思维

[英] 郑乐隽 (Eugenia Cheng) —— 著 朱思聪 张任宇 —— 译



HOW TO BAKE PI

EASY RECIPES FOR
UNDERSTANDING COMPLEX MATHS

中信出版集团

数学思维

[英] 郑乐隽 (Eugenia Cheng) — 著 朱思聪 张任宇 — 译

HOW TO BAKE π

EASY RECIPES FOR
UNDERSTANDING COMPLEX MATHS

图书在版编目 (CIP) 数据

数学思维 / (英) 郑乐隽著; 朱思聪, 张任宇译

北京: 中信出版社, 2020.1

书名原文: How to Bake Pi: Easy Recipes for

Understanding Complex Maths

ISBN 978-7-5217-1261-2

I. ①数… II. ①郑… ②朱… ③张… III. ①数学—

思维方法—普及读物 IV. ① O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 273061 号

How to Bake Pi by Eugenia Cheng

Copyright © Eugenia Cheng, 2015

Simplified Chinese translation copyright © 2020 by CITIC Press Corporation

ALL RIGHTS RESERVED

本书仅限中国大陆地区发行销售

数学思维

著 者: [英] 郑乐隽

译 者: 朱思聪 张任宇

出版发行: 中信出版集团股份有限公司

(北京市朝阳区惠新东街甲 4 号富盛大厦 2 座 邮编 100029)

承 印 者: 北京诚信伟业印刷有限公司

开 本: 880mm × 1230mm 1/32

印 张: 11.25 字 数: 185 千字

版 次: 2020 年 1 月第 1 版

印 次: 2020 年 1 月第 1 次印刷

京权图字: 01-2019-4610

广告经营许可证: 京朝工商广字第 8087 号

书 号: ISBN 978-7-5217-1261-2

定 价: 58.00 元

版权所有·侵权必究

如有印刷、装订问题, 本公司负责调换。

服务热线: 400-600-8099

投稿邮箱: author@citicpub.com



凝脂奶油

配料

奶油

方法

1. 将奶油倒入电饭煲。
2. 开关调至“保温”档，盖子微微打开，静置约 8 小时。
3. 取出后在冰箱中冷藏约 8 小时。
4. 用勺子将最上面的一层刮下来——这就是凝脂奶油。

那么，这和数学到底有什么关系呢？

关于数学的迷思

数学是关于数字的科学。

你也许认为电饭煲就是用来煮米饭的。这话没错，但同一个电器也可以用来做其他的事情：做凝脂奶油，煮蔬菜，蒸一只鸡。同样，数学的确关乎数字，但它也关乎很多其他的东西。

数学是关于得出正确答案的科学。

烹饪是关于把各种配料调和在一起，做出美味食物的艺术。有时它更强调的是方法，而不是配料本身，就像做凝脂奶油的食谱一样，配料只有一样，整个食谱讲的是一种方法。数学是关于如何把各种想法组合到一起，创造出令人激动的新想法的科学。同样，有时它更强调的是方法，而不是“配料”本身。

数学是非对即错的科学。

烹饪可能会失败——你的蛋奶糊可能会结块，你的蛋奶酥可能会塌掉，你的鸡肉可能没熟，让每个吃了它的人都食物中毒了。或者，某些食物可能并不会使你中毒，但总有一些食物要比另一些更好吃。有时候，烹饪“失败”了，你却在无意中发明了一种美妙的新食谱：塌掉的巧克力蛋奶酥柔软而绵密；做饼干时忘了把巧克力融掉，结果做出了巧克力豆饼干。数学也是如此。在学校，如果你写下 $10 + 4 = 2$ ，你会被告知这是错的，但在某些情况下，这个等式是对的，比如计算时间——上午 10 点过去 4 个小时就是下午 2 点。事实上，数学的世界比你所知道的更加神奇和不可思议……

你是数学家？那你一定非常聪明。

虽然我很喜欢别人说我聪明，但这个迷思更说明了人们普遍认

为数学很难。一个许多人不理解的事实是，数学的目的是让事情简单化。这里有个问题——如果数学是为了简化，就说明这件事情一开始是复杂的。数学的确很难，但它也能让复杂的事情变得简单。事实上，正因为数学很难，数学才能让数学变得更容易。

很多人要么害怕数学，要么很容易被数学搞糊涂，当然也可能两者兼具。或者，也有可能是他们在学校里上过的数学课让他们对这一切很反感。我能理解这些，我也曾经对学校里的体育课很反感，并且从未真正克服这一障碍。我在运动方面的表现在很差，我当时的老师简直难以相信世界上竟然真的存在运动能力这么差的人。但现在我也挺健康的，甚至还参加了纽约马拉松的比赛。至少现在，我体会到了体育锻炼的好处，但我仍然害怕任何一种团队性的体育项目。

你究竟是怎么做数学研究的呢？你也不可能再发现一个新的数字了啊！

这本书就是我对这个问题的回答。如果我正身处一场鸡尾酒会，而有其他人向我提出了这个问题，那我只能说我很难给出一个言简意赅又不失新意的答案，这个答案要么因为太长而占用听者太多的时间，要么因为太出乎意料而吓到旁边的人。是的，在一场正式的宴会上，吓到别人的方法之一就是谈论数学。

没错，你的确不可能再发现一个新的数字了。那我们能在数学里发现什么新东西呢？在解释这个“新的数学”是什么之前，我

需要先澄清一些关于数学是什么的误解。事实上，对于整体意义上的数学，数字只占据其中的一小部分，而我将要讲述的这个数学分支甚至和数字一点儿关系都没有。这个分支叫作“范畴论”，可以被理解为“关于数学的数学”。它是关于关系、情境、过程、原理、结构、蛋糕和蛋奶糊的。

是的，甚至是关于蛋奶糊的。因为数学是关于类比的，而接下来我将用各式各样的类比来解释数学是如何运作的，包括蛋奶糊、蛋糕、派、松饼、甜甜圈、贝果面包、蛋黄酱、酸奶、千层面和寿司。

不管你认为数学是什么，现在，请暂时放下你的想法。

我将给你一个与众不同的答案。

目录

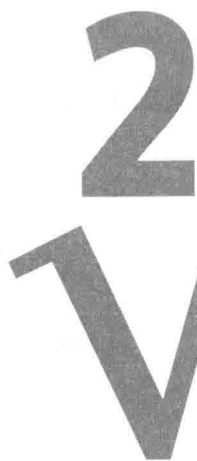
前言

III



数学

- | | |
|-----------|-----|
| 1. 什么是数学? | 003 |
| 2. 抽象 | 011 |
| 3. 原理 | 050 |
| 4. 过程 | 066 |
| 5. 推广 | 083 |
| 6. 内在和外在 | 117 |
| 7. 公理化 | 139 |
| 8. 数学是什么 | 171 |



范畴论

9. 范畴论是什么?	195
10. 情境	201
11. 关系	222
12. 结构	251
13. 相同	271
14. 泛性质	293
15. 范畴论是什么	324

致谢	345
----	-----



1

什么是数学？



无麸质巧克力布朗尼

配料

115 克黄油 125 克黑巧克力 150 克糖粉 80 克土豆粉
2 个中等大小的鸡蛋

方法

1. 将黄油和巧克力融化，一起搅匀，然后冷却一会儿。
2. 将加入糖的蛋液打发。
3. 缓缓将巧克力倒入蛋液中。
4. 倒入土豆粉。
5. 将混合液体倒入单独的几个小号模具中，将烤箱温度调至 180°C 预热，然后放入模具，烤大约 10 分钟（或者根据你喜欢的熟度调节时间）。

数学，就像食谱一样，包含配料和方法。同样，就像食谱如果不谈论方法会变得无用，如果我们不谈论数学的研究方法，而只讨论数学的研究对象，我们就无法理解数学究竟是什么。碰巧，在上述这个食谱里，方法很重要——我们没法儿直接用一个很大的托盘成功地烤出布朗尼，我们必须要用小号模具。在数学里，方法也许比配料更重要。真正的数学很可能并不是你在学校的数学课上学到

的东西。不过，就我自己而言，我似乎一直都知道数学的内涵要比我们在学校学到的那些更丰富。那么，什么是数学呢？

食谱书

按照所需厨具来给食谱分类会怎样？

做饭的流程通常类似于这样：决定你想做什么，买原材料，然后着手烹饪。有时，步骤的顺序会发生颠倒：你在商店或市场里闲逛，看到一些不错的食材，想要用它们来做饭。也许是某种格外新鲜的鱼，也许是一种你从未见过的蘑菇。你先把它们买回家，然后才开始查可以用它们做什么菜。

偶尔，你遇到的情况可能会与上述这两种完全不同：你买了一个新的厨具，于是你想用这个厨具做所有它能做的美食。也许你买了一台搅拌机，于是突然之间，你便开始做汤、奶昔、冰激凌。你可能还试着用它做了土豆泥，但结果很不理想（成品看起来就像一罐胶水）。也许你买了一只慢炖锅，或是一只蒸锅，或是一个电饭煲。也许你刚刚学会了一种新的烹饪技术，比如分离蛋清和蛋黄，或是给黄油脱水，于是你想用你的新技术做尽可能多的事。

因此，我们有两种方法来烹饪，而其中一种看起来要更实用。大多数烹饪书都是根据菜品的性质，而不是烹饪方法来归类的：一章介绍前菜，一章介绍汤品，一章介绍鱼类的做法，一章介绍肉类的做法，一章介绍甜品，等等。有时，书里可能会有一章专门讲解某种配料的使用，比如专门介绍巧克力类甜点的食谱或蔬菜类的食

谱等。有时，书里可能还会有一章专门介绍特殊场合的烹饪食谱，比如圣诞节午宴。但如果书里有一章是关于“用到橡胶刮铲的食谱”或者“用到手动打蛋器的食谱”的，那么这本书看起来就太奇怪了。不过，厨具本身通常都会自带一些可以用到此工具的简单食谱，搅拌机自带搅拌机食谱，慢炖锅和冰激凌机也同样如此。

这与做学术研究的研究对象颇具异曲同工之处。通常，当你说起你所研究的课题时，你会根据你的研究对象是什么来描述它。也许你研究的是鸟类、植物、食物、烹饪、理发，或者是过去发生的事，又抑或是社会如何运转。一旦你决定了想要研究什么，你就需要学习研究它的方法，或是自创一些研究方法，就像在烹饪中学习打发蛋白或是给黄油脱水一样。

然而，在数学领域，我们所研究的对象本身就取决于我们使用的研究方法。这就类似于我们买了一个搅拌机，然后决定用它做各种美食这种情况。与其他学科相比，数学的研究过程可以说是逆向的。通常而言，是我们的研究对象决定我们的研究方法；是我们先决定晚饭想吃什么，然后再选用合适的厨具。但是，当我们因新买的搅拌机而心情激动时，我们就会想试试用它来做我们所有的饭菜。（至少，我就见过这么做的人。）

这多少有点像“先有鸡还是先有蛋”的问题。但我的论点是，数学是由它的研究方法来定义的，而它的研究对象则是由那些研究方法决定的。

立体主义

当风格影响内容的选择时

用研究方法给数学分类与艺术流派的分类十分相似。诸如立体主义、点彩画派、印象派这些流派都是依据作画方法，而不是依据作画内容来划分的。芭蕾和歌剧也是如此，其艺术形式是根据表达方式划分的，而主题内容通常是有固定范畴的。芭蕾很适合抒发情感，但并不那么适合描述对白，也不适合表达政治诉求。立体主义显然不适合描绘昆虫。交响乐适合表现大喜大悲，但并不适合传达如“请把盐递给我”这样的寻常信息。

在数学里，我们使用的方法是逻辑。我们只想使用纯粹的逻辑推理，而非使用实验、实证、盲信、希望、民主、暴力等种种途径。仅仅是逻辑。那么，我们研究的对象是什么呢？我们研究所有符合逻辑规则的事物。

数学是运用逻辑规则，对所有符合逻辑规则的事物进行的研究。

我承认这是一个过分简化的定义。但我希望，在读了本书更多内容以后，你会明白这个定义就它本身而言已经足够准确了，它正是一个范畴论数学家会给出的定义，而非像第一眼看上去那样是个循环论证。

谁是首相

用它是做什么的来描述事物

设想有人问你“谁是首相”，而你回答说“他是政府首脑”。这个答案没错，但并不能让人满意，因为它没有正面回答问题：你描述了首相的性质，但没告诉我们首相是做什么的。同样，我刚刚对于数学的“定义”也描述了数学的特点，但并没有告诉你它是做什么的。因此，这个定义可能不是很有帮助，或者至少不太全面——不过，这只是了解数学的开始。

我们可以说清楚数学是什么，而不是数学像什么吗？数学到底研究什么？它的确研究数字，但也研究其他东西，比如形状、图像和模式，以及肉眼看不到的——富有逻辑的想法。甚至还有更多：那些我们目前还不知道的东西。数学持续发展的原因之一就是，一旦你掌握了一种方法，你总能找到更多可以用它来研究的对象，然后你又能找到更多研究这些对象的方法，再然后你又能用新方法找到更多可以研究的对象，如此循环往复，就像鸡生蛋，蛋生鸡，鸡生蛋……

山脉

登上一座山能让你看到更高的山

你是否有过这种体验——登上一座山的顶峰，发现的却是比它更高的所有其他山峰？数学也是如此，它越发展，可供研究的对象就越多。此事的发生一般伴随着两种过程。

第一种是“抽象化”：我们用逻辑梳理清楚了本来没有逻辑存在的领域。打个比方，可能你原本只用电饭煲煮米饭，而有一天，你发现你也可以用它来烤蛋糕，而且用电饭煲烤出来的蛋糕和用传统烤箱烤出来的蛋糕只有一点点不同。换句话说，我们借助一种新的视角来看待原本不是数学的事物，从而将其变为数学。这就是 x 和 y 会出现在数学领域的原因——我们原先的目的是研究数字，但后来我们发现此种处理数字的方法也可以应用到其他领域。

第二种是“广义化”：我们明白了如何用我们已经理解的事物来建构更复杂的事物。这就好像你用搅拌机做了一个蛋糕，又用搅拌机做了酥皮，然后把两者堆叠起来，创造出一种新的甜点。在数学领域，这就等同于用比较简单的数字、三角形和日常生活中的事物来建构多项式、矩阵、四维空间等。

我会在接下来的几章探讨抽象化和广义化这两种过程，但首先我想请读者看一看数学是如何奇妙又怪异地实现这两个过程的。

鸟类

鸟类不等于鸟类研究

假设你是一个研究鸟类的专家。你研究鸟类的行为、饮食、求偶方式、育幼方式以及它们怎样消化食物，等等。然而，你永远不可能用更简单的鸟类来创造一种新的鸟类——鸟类不是这样创造出来的。在这件事上，你不能使用广义化，至少不能使用数学的广义化。

另一件你无法做到的事情是把不是鸟类的东西变成鸟类。鸟