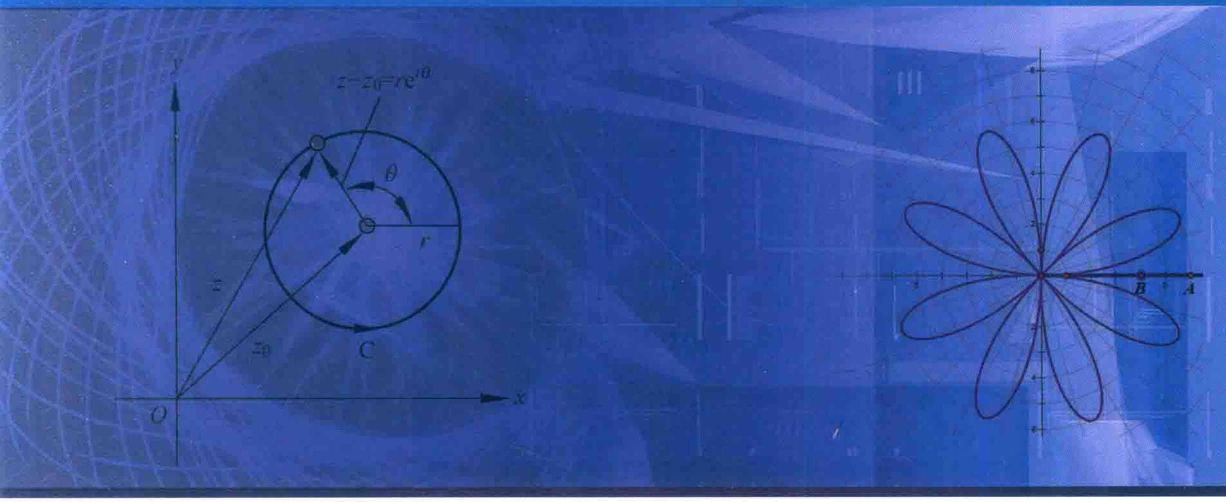


普通高等学校“十三五”规划教材

应用工程数学

YINGYONG GONGCHENG SHUXUE

朱泰英　刘三明　郭　鹏　主编

中国铁道出版社有限公司
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE CO., LTD.

内容简介

本书以优化结构、逻辑清晰、通俗易懂、注重应用为原则，采用应用型本科院校学生易于接受的方式，深入浅出地讲解“应用工程数学”课程的基本内容，以培养学生的应用能力。

全书共分14章，第1～5章是线性代数部分，内容包括行列式、矩阵、矩阵的秩与线性方程组、向量组的线性相关性与线性方程组解的结构、相似矩阵与二次型；第6～10章是概率论部分，内容包括随机事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理；第11～14章是复变函数和拉普拉斯变换部分，内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、拉普拉斯变换。每章末均附有习题，书后附有习题参考答案。

本书适合作为应用型本科院校“应用工程数学”课程教材，也可以作为一般工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用工程数学/朱泰英，刘三明，郭鹏主编. —北京:中国铁道出版社有限公司，2019.7

普通高等学校“十三五”规划教材

ISBN 978-7-113-25824-5

Ⅰ.①应… Ⅱ.①朱… ②刘… ③郭… Ⅲ.①工程数学-高等学校-教材 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第120697号

书　　名：应用工程数学
作　　者：朱泰英　刘三明　郭　鹏

策　　划：李小军　　　　**读者热线**：(010)63550836
责任编辑：许　璐　徐盼欣
封面设计：刘　颖
责任校对：张玉华
责任印制：郭向伟

出版发行：中国铁道出版社有限公司(100054，北京市西城区右安门西街8号)
网　　址：http://www.tdpress.com/51eds/
印　　刷：三河市宏盛印务有限公司
版　　次：2019年7月第1版　2019年7月第1次印刷
开　　本：700 mm×1000 mm　1/16　**印张**：19.75　**字数**：386千
书　　号：ISBN 978-7-113-25824-5
定　　价：48.00元

前　言

应用工程数学作为高等院校一门重要的应用性基础课程，它对提高学生的素质，优化知识结构，培养科学思维能力、分析问题和解决工程问题能力，提高创新意识，以及为后续专业课程的学习打下坚实的数学理论基础等方面具有重要的作用。

针对目前国内开展的应用型本科院校转型发展的趋势，本书着眼于对工程实践及经济问题的实际需要，注重阐明应用工程数学的基本知识和基本方法。在教材体系与内容编写安排上，充分考虑应用型本科院校的实际教学特点，以提高学生的素质能力为前提，以基本概念和基本方法为核心，适当精简结构，力图做到优化结构、逻辑清晰、通俗易懂、注重应用，保证教材的科学性、系统性和直观性，旨在培养学生把应用工程数学知识用于工程实践及经济问题的意识和能力，以适用于应用型本科人才的培养。

全书内容共分 14 章，第 1～5 章是线性代数部分，内容包括行列式、矩阵、矩阵的秩与线性方程组、向量组的线性相关性与线性方程组解的结构、相似矩阵与二次型；第 6～10 章是概率论部分，内容包括随机事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理；第 11～14 章是复变函数和拉普拉斯变换部分，内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、拉普拉斯变换。

本书由编者在多年教学实践基础上积累的教学资料和教材经过完善和整理而成，由朱泰英、刘三明、郭鹏任主编。具体编写分工如下：第 1、2 章由欧阳庚旭编写，第 3、4 章由刘三明编写，第 5 章由程松林编写，第 6 章由朱泰英编写，第 7、8 章由周钢编写，第 9、10 章由王玲编写，第 11 章由郭鹏编写，第 12 章由杨伟编写，第 13 章由戚建明编写，第 14 章由戚建明、郭鹏和杨伟编写。全书由朱泰英、刘三明、郭鹏统稿、定稿。

本书适合作为应用型本科院校“应用工程数学”课程教材，也可以作为一般工程技术人员的参考书。

在编写过程中，我们参考了大量的国内外资料及教材，在此向其作者表示衷心的感谢。

限于编者水平和时间，书中疏漏之处在所难免，恳请读者指正，以便以后完善提高。

编　者

2019 年 4 月

目　　录

第1章 行 列 式

行列式起源于线性方程组，是线性代数中的重要概念之一. 它在数学的许多分支中都有非常广泛的应用，是研究线性方程组、矩阵及向量组线性相关性的一种重要工具. 本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质和计算方法，以及用行列式解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1.1 二阶行列式与三阶行列式

1.1.1 二阶行列式的定义

考虑一般的两个未知数两个方程构成的线性方程组.

例 1 用消元法解二元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$.

解 第 1 个方程$\times a_{22}-$第 2 个方程$\times a_{12}$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$

第 2 个方程$\times a_{11}-$第 1 个方程$\times a_{21}$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1,$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

为此，我们引入二阶行列式的定义.

定义 1 二阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1-1}$$

其中，数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1-1)的**元素**，横排称为**行**，竖排称为**列**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列. 通常用字母 D 表示行列式，并记为 $D=\det(a_{ij})$.

若记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则当 $D\neq 0$ 时例 1 中二元线性方程组的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1-2}$$

例 2 计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=2\times4-5\times3=-7$.

(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}=-\cos^2\theta-\sin^2\theta=-1$.

例 3 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=5 \\ 2x_1-x_2=1 \end{cases}$.

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-2-6=-8\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5-3=-8,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2-10=-8,$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-8}{-8}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-8}{-8}=1.$$

1.1.2 三阶行列式的定义

1. 问题的提出

对于下面三个未知数的线性方程组,何时有唯一解?

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}. \tag{1-3}$$

用消元法可以得到“类似”式(1-2)的结论:若

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq0,$$

则线性方程组(1-3)有唯一解.

2. 三阶行列式的定义

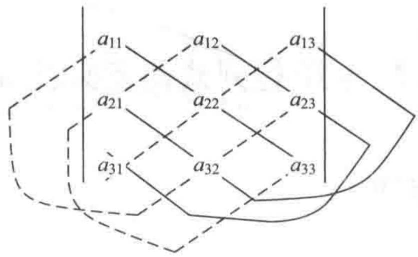
定义 2 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1-4}$$

三阶行列式的特点：

(1) 每个乘积项中三个因子来自不同行不同列的三个数，共 6 项求和；

(2) 其运算的规律性可用对角线法则来表述：



(3) 利用定义 2，线性方程组(1-3)的解有如下表示：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{1-5}$$

例 4　计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解　$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times3\times5 + 1\times1\times2 + 2\times(-4)\times3 - 2\times3\times2 -$

$1\times(-4)\times5 - 2\times3\times1$

$= 30 + 2 - 24 - 12 + 20 - 6 = 10.$

例 5　求证：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{1-6}$$

证明 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

§1.2 n 阶行列式的定义及性质

1.2.1 n 阶行列式的定义

1. 问题的提出

从以上对二元一次方程组、三元一次方程组的讨论,我们肯定会猜想:对于下面的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-7}$$

是否也会有类似二元一次方程组、三元一次方程组那样的结论,即

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}?$$

若有,那么相应的行列式又是如何进行运算的?

对于由 $n\times n$ 个数排列成的 n 行 n 列,且以符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记之的数式,我们称其为 n **阶行列式**,它表示了一个按照确定的运算关系所决定的数.其中,每个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3,\cdots,n)$ 称为**元素**,且为位于第 i 行第 j 列的元素.

2. n 阶行列式的递归定义

为了引入 n 阶行列式的计算式,我们把三阶行列式的计算式整理成为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$
$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

其中，分别与 a_{11},a_{12},a_{13} 相乘的三个二阶行列式正好是在三阶行列式中划去 a_{11},a_{12},a_{13} 所在的行和列后剩下的元素组成的，我们分别称之为 a_{11},a_{12},a_{13} 的**余子式**，依次记为 M_{11},M_{12},M_{13}；它们前面的(-1)的幂指数分别是这三个元素 a_{11},a_{12},a_{13} 的两个下标之和. 我们分别称

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12},\quad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}$$

为 a_{11},a_{12},a_{13} 的**代数余子式**. 于是得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \tag{1-8}$$

这就是说，三阶行列式等于它的第一行元素与各自的代数余子式乘积之和. 简言之，可以按其第一行展开.

下面给出代数余子式的定义.

定义 1　在 n 阶行列式 D 中，把元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3,\cdots,n)$ 所在的第 i 行和第 j 列划去后，剩下的元素按原次序构成一个 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}，并称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例 1　求三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的余子式 M_{12} 和代数余子式 A_{12}.

解　a_{12} 的余子式 $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}$；

a_{12} 的代数余子式 $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}$.

例 2　求三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 的余子式 M_{12},M_{22} 及代数余子式 A_{12},A_{22}.

解　$M_{12}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2$；$M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3$.

$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-2$；$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=3$.

把式(1-8)推广到一般，即得到 n 阶行列式的定义.

定义 2 我们定义 n **阶行列式**的值如下：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, \tag{1-9}$$

其中，$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$. M_{1j} 称为 a_{1j} 的**余子式**，即在 D_n 中划去第一行和第 j 列后得到的 $(n-1)$ 阶行列式；A_{1j} 称为 a_{1j} 的**代数余子式**. D_n 也可简记为 D 或 $|a_{ij}|_n$.

例 3 **计算下三角行列式**

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由定义 2，依次按第一行展开，得

$$\begin{aligned} D_n &= a_{11}A_{11}+0\cdot A_{12}+\cdots+0\cdot A_{1n} \\ &= a_{11}\cdot(-1)^{1+1}M_{11} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \cdots\cdots \\ &= a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

根据例 3，不难得出 n **阶对角行列式**

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

对角行列式一般记为 $\det[\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)]$.

同理可得，上三角行列式亦等于其主对角线上各元素之积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 4 计算下列三角行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$， (2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1n} \cdot (-1)^{1+n} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&=\cdots\cdots \\
&=(-1)^{(1+n)+n+(n-1)+\cdots+2} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \\
&=(-1)^{(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \\
&=(-1)^{(n-2)+n+(n-1)+\cdots+1} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \\
&=(-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \\
&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.
\end{aligned}
$$

同理可得

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

仅仅按定义计算行列式是比较麻烦的. 对于行列式可以证明以下定理.

定理 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和. 即设 n 阶行列式

$$
D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1-10}
$$

D_n 的第 i 行元素 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 所对应的代数余子式为 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}$，则

$$
D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{1-11}
$$

D_n 第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 所对应的代数余子式为 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$，则

$$
D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n). \tag{1-12}
$$

1.2.2 *n* 阶行列式的性质

n 阶行列式的定义给出了用递推公式计算 n 阶行列式的方法，但在实际中，用这种方法计算三阶以上的行列式计算量是非常大的. 我们需要探讨行列式的性质，以得到化简行列式的方法.

定义 3 将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \text{则 } D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

下面讨论 n 阶行列式的性质.

性质 1 设 D^T 是 D 的转置行列式，则 $D=D^T$.

证明 由本节行列式的定义 2 和定理知结论成立.

例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & e & 3 \\ b & f & 4 \\ c & g & 5 \end{vmatrix}.$$

性质 2 行列式中若有某行(列)元素全是零，则此行列式为零.

性质 3 互换行列式中两行(列)，行列式变号.

例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 4 & 5 \\ e & f & g \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ a & b & c \\ e & f & g \end{vmatrix}.$$

性质 4 行列式中有两行元素相同，则该行列式的值为零.

证明 假设第 i,j 行元素相等，则交换第 i,j 行：$D=-D$，即 $D=0$.

例如：$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ a & b & c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 19 & a & 19 & e \\ 41 & b & 41 & f \\ 2.3 & c & 2.3 & g \\ 11 & d & 11 & h \end{vmatrix}=0.$

性质 5 行列式的某一行诸元素同乘数 k，等于用数 k 乘此行列式.