金榜图书
JINBANG BOOKS·SINCE 1997
北京时代巨流文化有限公司

大学数学名师辅导系列

大学数学
线性代数辅导

主编◎(清华大学)李永乐

刚开始学的大一、大二的同学，学习线代
准备考研的大三、大四的同学，复习线代
这本书都可以帮到你！

双色印刷
高品质阅读体验

微信扫码 查询真伪
知识成就未来，金榜助您成才！

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

金榜图书

大学数学名师辅导系列

大学数学 线性代数辅导

主编◎（清华大学）李永乐

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

线性代数，是大学数学中入门课程之一，不仅是一门非常好的数学课程，也是一门非常好的工具学科，在很多领域都有广泛的用途。本书内容主要介绍线性代数的基本知识，包括方程组、行列式、特征值、相似矩阵、正定矩阵以及向量空间。内容讲解全面，例题经典。特别设置考研题选讲，既能辅导学习，也能为考研复习助力。本书可作为普通高等院校理工、经济管理类各专业的学习用书，也可供报考硕士研究生的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学线性代数辅导 / 李永乐主编. —西安：西安交通大学出版社，2018.7
ISBN 978-7-5693-0804-4

Ⅰ.①大… Ⅱ.①李… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 180889 号

书　　名 大学数学线性代数辅导
主　　编 李永乐
责任编辑 李文

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 三河市燕山印刷有限公司

开　　本 787mm×1092mm　1/16　**印张** 10　**字数** 225 千字
版次印次 2018 年 12 月第 1 版　2018 年 12 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5693-0804-4
定　　价 49.80 元

前　言

大学数学是高等学校本科生公共数学基础课程，一般包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计三门课程。它们都是重要的基础课程，是同学们此阶段所需要掌握的数学基础知识，也是今后研究生入学考试的重要内容。无论是刚开始学习的大一、大二学生，还是准备研究生考试的大三、大四的学生，都需要能帮助他们系统学习、复习大学数学内容和练习的工具书。

编写时我们在例题的选择与解法上尽量做到：

一、低起点高要求

从最基础的概念起步，重要内容都尽量详细展开。例题设计上难度逐渐增加，也选用一些历年研究生试题作为对有高目标同学的起点。

二、内容全面

高度重视基础环节，也同时注意综合能力的训练，不仅希望同学把每个知识点要搞清楚，也要把握知识点的内在联系，注意领会线性代数中常用思路与技巧。

三、重视教方法

解题步骤尽可能详细，思路交待清楚，注意一题多解，也注意简单反例的训练，期望能活跃思维，举一反三，触类旁通。

本书是编者在教学中的一些经验总结，不足之处难免，您的一切意见和建议都将成为本书不断改进和提高的动力，如蒙赐教，感激不尽！

学习不是个轻松的过程，要适应数学的思维方式，主动克服各种学习困难，不断提高学习兴趣。祝愿读者学习进步！

编者

目　　录

第一章　行列式

内容提要

行列式是一个重要的数学工具，不仅在线性代数中有较多的应用，而且在数学的其它领域也常用到.

行列式的计算有较多的技巧，要细心体会把握.

一、基本要求

(1) 会用对角线法则计算 2 阶、3 阶行列式

(2) 知道 n 阶行列式的定义及性质

(3) 知道代数余子式的定义及性质

(4) 会用行列式的性质及按行(列) 展开公式计算简单的 n 阶行列式

二、基本概念

1. n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项的前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项的前面带负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 式(1.1) 称为 n 阶行列式的完全展开式.

【注】 所谓排列是指由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 所构成的一个有序数组，通常用 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 表示 n 阶排列，显然共有 $n!$ 个 n 阶排列.

一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列的逆序总数称为这个排列的**逆序数**. 用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**.

2. 代数余子式

在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，由剩下的元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称其为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}；称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \tag{1.2}$$

三、重要定理

定理　n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行(列) 的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn} \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{1.3}$$

$$D=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk} \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{1.4}$$

公式(1.3) 称为行列式按第 k 行的展开公式.

公式(1.4) 称为行列式按第 k 列的展开公式.

定理　设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，当 $i\neq k\quad(i,k=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0 \tag{1.5}$$

当 $j \neq k \quad (j,k=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0 \tag{1.6}$$

四、行列式的性质(为方便，行列式性质以下用 3 阶示意).

记 $|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$，

行列式 $|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|$ 称为 $|\mathbf{A}|$ 的转置行列式.

性质 1　经过转置行列式的值不变，即 $|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|=|\mathbf{A}|$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

由此可知行列式行的性质与列的性质是对等的.

性质 2　两行(或列)互换位置，行列式的值变号.

特别地，两行(或列)相同，行列式的值为 0.

性质 3　某行(或列)如有公因子 k，则可把 k 提出行列式记号外.(亦即用数 k 乘行列式 $|\mathbf{A}|$ 等于用 k 乘它的某行(或列)).

特别地：(1) 某行(或列)的元素全为 0，行列式的值为 0.

(2) 若两行(或列)的元素对应成比例，行列式的值为 0.

性质 4　如果行列式某行(或列)是两个元素之和，则可把行列式拆成两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

性质 5　把某行(或列)的 k 倍加到另一行(或列)，行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 & b_3+ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

五、主要公式

1. 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1.7}$$

2. 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \tag{1.8}$$

3. 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \tag{1.9}$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

4. 范德蒙行列式

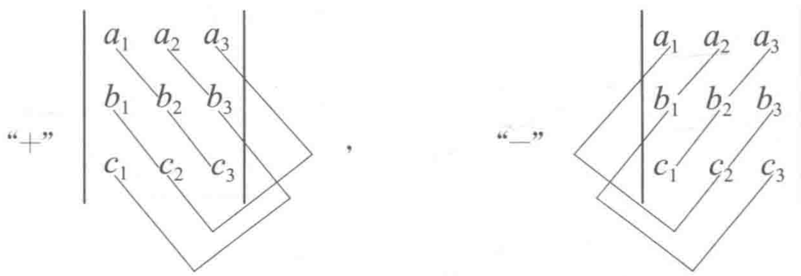
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j). \tag{1.11}$$

典型例题解析

一、3 阶行列式的对角线计算法（只能用于 3 阶行列式）

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

在这六项中，有 3 项带“+”号，3 项带“—”号，大家可以用对角线方法来记忆：



当 3 阶行列式的元素中有较多的“0”时，用对角线法来计算行列式的值是简便地.

【例 1】　用对角线法计算 3 阶行列式 D

(1)$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} =$ __________.

【分析】

$$\begin{aligned} D &= 2\cdot(-4)\cdot 3 + 0\cdot(-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 8 - 1\cdot(-4)\cdot(-1) - 0\cdot 1\cdot 3 - \\ &\quad 2\cdot(-1)\cdot 8 \\ &= (-24) + 0 + 8 - 4 - 0 - (-16) \\ &= -4. \end{aligned}$$

(2)$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$ __________.

【分析】

$$\begin{aligned} D &= 1\cdot b\cdot c^2 + 1\cdot c\cdot a^2 + 1\cdot a\cdot b^2 - 1\cdot b\cdot a^2 - 1\cdot a\cdot c^2 - 1\cdot c\cdot b^2 \\ &= bc^2 + \underline{\underline{ca^2}} + ab^2 - \underline{\underline{ba^2}} - ac^2 - cb^2 \\ &= (b-a)c^2 + c(a^2-b^2) + ab(b-a) = (b-a)(c^2 - ac - bc + ab) \\ &= (b-a)[c(c-a) - b(c-a)] = (b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

二、逆序数、n 阶行列式

【例 2】 求下列排列的逆序数

(1)4132 (2)256341

(3)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$

【分析】 求一个排列的逆序数大体可以有两种思路：

思路一：按此排列的次序分别算出每个数的后面比它小的数的个数，然后求和.

思路二：按自然数的顺序分别算出排在 1,2,3,… 前面的比它大的数的个数，然后求和.

(1)(用思路一)

4 的后面有 3 个数小于 4，故 4 的逆序为 3

1 的后面没有小于 1 的数，故 1 的逆序为 0

3 的后面有 1 个数小于 3，故 3 的逆序为 1

2 是排列的末位，后面没有数，故 2 的逆序为 0

从而 $\tau(4,1,3,2)=3+0+1+0=4$，是偶排列.

(用思路二)

1 的前面有 1 个数比 1 大，故 1 的逆序为 1

2 的前面有 2 个数比 2 大，故 2 的逆序为 2

3 的前面有 1 个数比 3 大，故 3 的逆序为 1

4 是排列的首位，它前面没有数，故 4 的逆序为 0

从而 $\tau(4,1,3,2)=1+2+1+0=4$.

(2)(用思路一)

2 的后面有 1 个数小于 2，故 2 的逆序为 1

5 的后面有 3 个数小于 5，故 5 的逆序为 3

6 的后面有 3 个数小于 6，故 6 的逆序为 3

3 的后面有 1 个数小于 3，故 3 的逆序为 1

4 的后面有 1 个数小于 4，故 4 的逆序为 1

1 是排列的末位，后面没有数，故 1 的逆序为 0

从而 $\tau(2,5,6,3,4,1)=1+3+3+1+1+0=9$，是奇排列.

(用思路二)

1 的前面有 5 个数比 1 大，故 1 的逆序为 5

2 是排列的首位，它前面没有数，故 2 的逆序为 0

3 的前面有 2 个数比 3 大，故 3 的逆序为 2

4 的前面有 2 个数比 4 大，故 4 的逆序为 2

5 的前面没有比 5 大的数，故 5 的逆序为 0

6 的前面没有比 6 大的数，故 6 的逆序为 0

从而 $\tau(2,5,6,3,4,1)=5+0+2+2+0+0=9$.

(3) 此排列的前 n 个数 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$ 之间没有逆序，后 n 个数 $2,4,6,\cdots,(2n)$ 之间也没有逆序，只是前 n 个数和后 n 个数之间才有逆序. 因而求这个排列的逆序数只需找出前 n 个数对后 n 个数的逆序就可.

用思路一，即有

$$\tau(1,3,5,\cdots,(2n-1),2,4,6,\cdots,(2n))=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1).$$

【例 3】 已知 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 在 4 阶行列式中带负号，那 j 和 k 分别为________.

【分析】 按行的自然顺序，有

$a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}=a_{12}a_{2k}a_{3j}a_{41}$

由于列 $2,k,j,1$ 是 1 至 4 的排列，故 j 和 k 只能取自 3 和 4.

若　$j=3,k=4$

由 $\tau(2,4,3,1)=1+2+1+0=4$，是偶排列，与该项带负号不符，故 $j=4,k=3$.

注意，$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ 的列排列是 2,3,4,1，其逆序数 $\tau(2,3,4,1)=3$，是奇排列，故 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ 在 4 阶行列式中带负号.

【例 4】 四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项是________.

【分析】 行列式是不同行不同列元素乘积的代数和.

那么在 4 阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 的应当有形式：

$a_{11}a_{23}a_{3j}a_{4k}$，且列 $1,3,j,k$ 是 1 至 4 的排列.

从而含 $a_{11}a_{23}$ 因子的共有 2 个 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$

又，列的逆序数分别是：$\tau(1,3,2,4)=1$，$\tau(1,3,4,2)=2$

从而含 $a_{11}a_{23}$ 的项是：$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

【例 5】 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & x & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 和 x^3 的系数分别是________.

【分析】 行列式是不同行不同列元素乘积的代数和，x^4 项必须每行元素中都有 x 项出现，那么在 2,3,4 行必须是 a_{22}，a_{33}，a_{44}，因而在第 1 行中只能取 a_{11}

而 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 的列是 1,2,3,4 为偶排列

故 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=2x^4$，即 x^4 系数为 2

关于 x^3，当第 1 行取 a_{11}（或 a_{14}）时，不论 2,3,4 行如何选择都不可能有 x^3 项. 仅 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 和 $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$ 为 x^3 项

由列的逆序数 $\tau(2,1,3,4)=1$. $\tau(3,2,1,4)=3$，都是奇排列，均带负号.

故 $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}=-x^3-3x^3=-4x^3$

即 x^3 系数为 -4.

三、n 阶行列式的计算

1. 按行（列）展开

【例 6】 计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ 的值.

【分析】 本题的行列式没有太多的规律，因而在用展开公式来计算时，要先利用行列式的性质将其恒等变形，让其某行(或列) 有较多的零.

(例如，可利用 $a_{33}=0$，再把 a_{32}, a_{34} 化为 0)

$$D \xlongequal[c_4-5c_1]{c_2+2c_1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 \\ 4 & 7 & 5 & -20 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -2 & -7 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 7 & 5 & -20 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-5r_1} -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -8 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -(-8)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} = 120.$$

【评注】 ①r_i 表示行列式的第 i 行，c_j 表示行列式的第 j 列，对换 i 行与 j 行记成 $r_i \leftrightarrow r_j$，第 i 行乘以 k 记成 kr_i，i 行的 k 倍加至 j 行记成 r_j+kr_i，类似有列变换的记号.

② 用行列式展开式时，不要丢掉正负号. 这是初学时常犯的错误.

【例 7】 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

【分析】 若利用 $a_{41}=0$，把 a_{42}, a_{44} 化为 0，有

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-7c_3]{c_2-c_3} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2-2c_1]{c_3-c_2} -\begin{vmatrix} 4 & -9 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 10 & -17 & -17 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(二、三两列相同)}.$$

（若利用 $a_{23}=0$，把 a_{22}, a_{24} 化为 0）

$$D=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xlongequal[c_2-2c_1]{c_4-c_2}\begin{vmatrix}4&-7&2&3\\1&0&0&0\\10&-15&2&-5\\0&1&1&6\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-7&2&3\\-15&2&-5\\1&1&6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-2r_3]{r_1-r_2}-\begin{vmatrix}8&0&8\\-17&0&-17\\1&1&6\end{vmatrix}=0\quad（一、二两行成比例）.$$

【例 8】　解方程

$$\begin{vmatrix}x+1&2&-1\\2&x+1&1\\-1&1&x+1\end{vmatrix}=0.$$

【分析】　这是 x 的三次方程，用观察法让某行(列)出现 x 的一次因式. 例如，可第 2 行加至第 1 行. 第 1 行出现 $x+3$ 公因数，

$$\begin{vmatrix}x+1&2&-1\\2&x+1&1\\-1&1&x+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+3&x+3&0\\2&x+1&1\\-1&1&x+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+3&0&0\\2&x-1&1\\-1&2&x+1\end{vmatrix}$$

$$=(x+3)\begin{vmatrix}x-1&1\\2&x+1\end{vmatrix}=(x+3)(x^2-3)=0$$

$\therefore\ x_1=-3, x_2=\sqrt{3}, x_3=-\sqrt{3}$.

2. 三角化法

【例 9】　计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{vmatrix}$ 的值.

【分析】　为简化计算可利用行列式的性质先去掉行列式里的分母，转化为整数的运算.

【解】（三角化法）

$$D=(\frac{1}{2})^4\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{\sum r_i}\frac{1}{16}\begin{vmatrix}5&5&5&5\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{5}{16}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\frac{5}{16}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=\frac{5}{16}.$$

【评注】 ① 如果行列式各列元素和相等都是 a,一个常用的办法是将各行均加至第一行,则第一行有公因数 a 可提到行列式记号之外.

② 对行列式作恒变形,化其为上三角或下三角行列式利用公式(1.7)是常用技巧.

【例 10】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\-1&1-b_1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}$ 的值.

【解】 (三角化法)

$$D\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1.$$

【评注】 把第 1 行加至第 2 行,然后把第 2 行加至第 3 行,再把第 3 行加至第 4 行,…… 习惯上称为逐行相加.逐行(列)相加减的技巧应当知道.

【例 11】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}.$$

【分析】 各行元素之和相等,把每列都加到第 1 列,有

$$D=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{c_3-c_1\\c_4+c_1}]{c_2+c_1}x\begin{vmatrix}1&0&0&x\\1&0&x&0\\1&x&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=x^4.$$