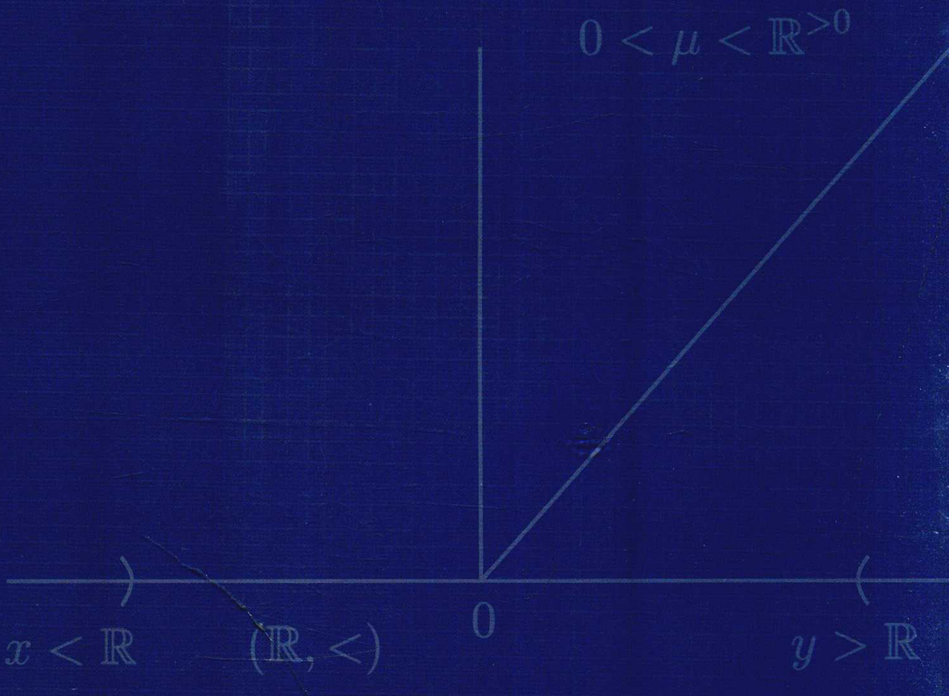
逻辑与形而上学教科书系列

初等模型论

姚宁远 著

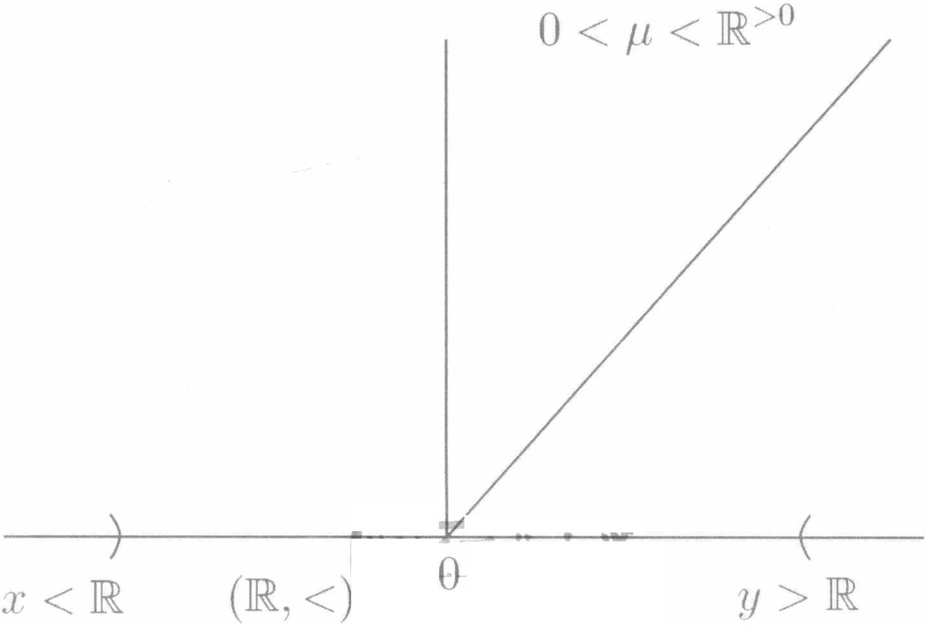


复旦大学出版社

逻辑与形而上学教科书系列

初等模型论

姚宁远 著



复旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

初等模型论/姚宁远著. —上海:复旦大学出版社, 2018.11
逻辑与形而上学教科书系列
ISBN 978-7-309-14019-4

Ⅰ.①初… Ⅱ.①姚… Ⅲ.①模型论-高等学校-教材 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 241219 号

初等模型论
姚宁远 著
责任编辑/陆俊杰

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
上海四维数字图文有限公司

开本 787×1092 1/16 印张 15.5 字数 215 千
2018 年 11 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-14019-4/O·665
定价: 36.00 元

前　　言

本书根据我2016学年和2017学年在复旦大学为本科生和研究生开设的模型论课程的讲义整理而成。写作本书的目的是为模型论的初学者提供一本较为系统的讲述模型论基本概念和原理、同时可读性较强的教材。我们假设本书的读者了解集合论中的基本概念，这些概念可以在[1]中找到。读者还需要了解一点一阶逻辑的知识，这些知识可以在[2]中找到。线性代数和代数闭域理论的知识可以使读者更深刻地理解本书中的例子。

模型论是数理逻辑的一个分支，一般来说，它有两个主要的研究方向。第一个研究方向是如何将逻辑方法应用在纯粹的数学对象和数学结构上，本书的大量实例都体现了这一思想，我们习惯于将这一方向称作“应用模型论”。模型论发展至今，已经在代数几何、代数数论、实几何、复几何等众多数学领域中都做出了很好的结果。第二个研究方向是根据数学结构的一阶性质以及相应的组合性质对结构进行分类，本书中的Morley定理以及ω-稳定理论都是这一方向的代表成果，我们习惯于将这一方向称作“纯粹模型论”。

本书的结构组如下。我们将在第1章快速回忆一阶逻辑中的一些基本概念，包括语言、公式、结构等概念。

第2章将给出紧致性定理的证明和重要的推论。紧致性定理是模型论中最重要的一个定理，因此本章也是本书重点。读者需要掌握Henkin构造法、超积的构造和应用及Löwenheim-Skolem定理。这些知识点将在以后的章节中反复地应用。

第3章是紧致性定理的应用。3.1－3.3节的例子来自[3]，但是有较大的改动。对抽象代数不熟悉的读者可以跳过3.1节。3.4节的知识将在以后的章节中反复出现，需要重点掌握。

第4章中的饱和性、齐次性、进退构造法都是模型论证明中经常用到

的概念和方法，读者需要重点掌握。

第5章简单讨论了可数模型的分类问题，其中省略型定理是本章的难点，在证明省略型定理的过程中，我们再次应用了Henkin构造法。此外原子模型、素模型、孤立型等概念在Morley定理和ω-稳定理论中有重要的应用。

在第6章中，我们引入了量词消去和模型完全的概念。命题6.2.3给出了一个常用的量词消去的判定方法。量词消去是模型论中非常重要的概念。一般而言，要理解一个一阶结构，首先要理解其中的可定义集合，而量词消去将大大简化可定义集合的复杂性。本章需要重点掌握。

在第7章，我们运用第6章中关于判别量词消去的判断准则证明了一些理论具有量词消去，并且利用量词消去证明了Chevalley 定理、Tarski-Seidenberg 投射定理、Hilbert第17问题等一些重要的定理。对抽象代数不熟悉的读者可以跳过7.1节和7.2节。7.3节证明了Presburger算术的量词消去，这部分内容在同类教科书中很少讨论。此外，7.3节仅需要基本的算术知识，对大多数读者而言都较容易理解，读者可以通过此节的学习来体会证明量词消去方法。7.4节是对7.3节中的证明思路的推广和应用，此节中给出的例子均可以用7.3节中给出的方法来解决，使得读者可以更深刻地体会证明量词消去的一般方法。

在第8章中，我们引入了ω-稳定性和Morely秩的概念，并且证明了Morley定理，也是本书的重点章节。考虑到篇幅的限制，本章没有采用传统的方法来证明Morley定理，而是采用了A. Pillay的讲义[4] 中的证明方法。这个方法的优点是需要的预备知识较少、步骤较少，缺点是不够直观。为了弥补这一缺点，我们在8.3 节给出了证明强极小理论具有范畴性的证明概要，强极小理论的例子有助于读者更直观地理解Morley定理。

第9章是我在讲义之外新增的内容，初步介绍了稳定理论和分叉性。稳定理论是当代模型论的核心研究对象，而分叉性是对理论进行分类的一个标准，即不同的理论对应不同的分叉性质。需要注意的是，大多数教材（例如[5]）都是用Morley秩来直接定义ω-稳定理论中的分叉，而本书是从

分叉的定义出发，推导出分叉性和Morley秩有直接的对应关系。

本书是引论性质的教材，适用于逻辑学、数学、计算机科学专业的本科生或研究生。对数学不感兴趣的读者可以跳过第3章的3.1－3.3节和第7章。本书中的练习是本书的重要组成部分，一部分引理、命题、推论的证明直接引用了习题中的结论。

在本书中$\aleph_0$表示可数基数，即第0个无穷基数，$\aleph_1$表示第1个无穷基数，$\aleph_\alpha$表示第α个无穷基数。ω表示第一个无穷序数，即自然数的集合$\mathbb{N}$，因此$\aleph_0$，ω，$\mathbb{N}$是同一个集合的3种记号。对于序数α，β，$\alpha < \beta$和$\alpha \in \beta$是同一个意思。$\mathbb{Z}$ 表示整数集合，$\mathbb{Q}$表示有理数集合，$\mathbb{R}$表示实数集合，$\mathbb{C}$表示复数集合。

我首先要感谢我的导师Anand Pillay教授、中山大学的鞠实儿教授，他们在我学习模型论的过程中给予我很多的支持和帮助。我还要感谢中山大学的王玮教授，他带我走进了数理逻辑的殿堂。我要特别感谢复旦大学研究生吕泽豪同学和复旦大学出版社的陆俊杰老师，他们非常仔细地校对本书，指出了部分错误，并且提出了很多具体的修改建议。我还要感谢复旦大学的郝兆宽教授和新加坡国立大学的杨跃教授，他们耐心地审阅本书，并且提出了宝贵的批评意见。

作者

2018年8月8日

法国高等研究所

目　录

第 1 章　基本概念

我们假设读者具有一定数理逻辑基础，因此本章将快速地复习一阶逻辑的语法和语义，并且引入一些新的记号。如果读者在阅读本章时感到困难，可以参考[2]的2—5章。

1.1　一阶逻辑的结构

相较于命题逻辑而言，一阶逻辑的符号系统更加丰富，同时其表达能力也要比命题逻辑强大。一阶逻辑的符号系统除了包含命题逻辑中的逻辑连接词，还有量词、变元符号、谓词符号（或关系符号）、函数符号及常元（或常数）符号，这使得我们可以用一阶逻辑来刻画几乎所有的经典数学结构和数学对象。

一般来说，一阶逻辑的符号系统包含两部分：**逻辑符号**和**非逻辑符号**。逻辑符号包含以下5 类符号：

- 逻辑连接词：或$\vee$,与$\wedge$,非$\neg$,蕴涵$\to$, 双蕴涵$\leftrightarrow$。
- 括号、方括号及其他标点符号。
- 无限多个变元，通常标记为英文字母末端的小写字母x,y,z,$\cdots$，也常用下标来区别不同的变量：x_0,x_1,x_2,$\cdots$。
- 全称量词符号$\forall$和存在量词符号$\exists$。
- 等式符号$=$。

一阶逻辑中的逻辑符号的含义是固定不变的。为了描述不同的系统，我们有时需要引入谓词符号、函数符号及常元符号等新符号。由于这些新符号的含义并非固定不变，因此我们称它们为非逻辑符号，而一个语言就是一个非逻辑符号的集合。更精确的定义是：

定义 1.1.1 一个**语言**$\mathcal{L}$是具有以下3 类符号的符号集：**函数符号集**$\mathcal{F}$,**关系符号集**$\mathcal{R}$, 以及**常元符号集**$\mathcal{C}$。此外，对于每个函数符号$f \in \mathcal{F}$ 和关系符号$R \in \mathcal{R}$ ，都有一个正整数n_f 和一个正整数n_R分别与之对应，此时称f为n_f-元函数符号，R 为n_R-元关系符号。

注 1.1.1 由定义可以看出，我们称$\mathcal{L}_1$和$\mathcal{L}_2$是不同的语言，是指$\mathcal{L}_1$和$\mathcal{L}_2$作为符号集合是不同的集合。

给定一个语言$\mathcal{L}$，其中的符号是没有任何含义的，因此需要我们（按照需求）对其进行解释。正如上文所述，我们对非逻辑符号的解释不是唯一的，其中的每一种解释都称为$\mathcal{L}$的一个结构。更精确地讲：

定义 1.1.2 设$\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$是一个语言，其中$\mathcal{F}$,$\mathcal{R}$,$\mathcal{C}$ 分别是函数符号集、关系符号集和常元符号集，则一个**$\mathcal{L}$-结构**$\mathcal{M}$包含以下对象：

(i) 一个非空集合M。我们一般把M称作**论域** 。

(ii) 对于每个$f \in \mathcal{F}$，都有一个函数$f^{\mathcal{M}} : M^{n_f} \longrightarrow M$与$f$ 对应。

(iii) 对于每个$R \in \mathcal{R}$，都有一个集合$R^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_R}$与$R$对应。

(iv) 对于每个$c \in \mathcal{C}$，都有一个点 $c^{\mathcal{M}} \in M$与c对应。

我们称M的基数$|M|$为$\mathcal{M}$的基数，并且用$|\mathcal{M}|$来表示$\mathcal{M}$的基数。

显然n-元函数符号f在$\mathcal{M}$中的解释$f^{\mathcal{M}} : M^n \longrightarrow M$的函数图像是$M$上的一个$(n+1)$-元关系。

在上面的定义中，我们称$f^{\mathcal{M}}$,$R^{\mathcal{M}}$,$c^{\mathcal{M}}$分别为符号f,R,c的解释，而结构$\mathcal{M}$通常记作$\mathcal{M} = (M, f^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} : f \in \mathcal{F}, R \in \mathcal{R}, c \in \mathcal{C})$或者$\mathcal{M} = \{M, \{Z^{\mathcal{M}}\}_{Z \in \mathcal{L}}\}$。在以上定义中，结构是在语言的基础上定义的。然而，一般的情形是我们会根据结构来选择相应的语言。

例 1.1.1

(i) **空语言** $\mathcal{L}_\emptyset = \emptyset$，则一个$\mathcal{L}_\emptyset$-结构就是一个非空集。

(ii) **群的语言** $\mathcal{L}_G=\{*,e\}$，其中$*$是一个2-元函数符号，e是一个常元符号，则$\mathcal{Z}_g=(\mathbb{Z},+,0)$, $\mathcal{R}=(\mathbb{R}^{>0},\times,1)$及$\mathcal{N}=(\mathbb{N},+,0)$均是$\mathcal{L}_G$-结构，其中$\mathcal{Z},\mathcal{R}$是群，$\mathcal{N}$是半群。

(iii) **集合论的语言** $\mathcal{L}_S=\{\in\}$，其中$\in$ 是2-元关系符号,则对任意的集合A, $(A,\in)$是一个$\mathcal{L}_S$-结构。

(iv) **环的语言** $\mathcal{L}_r=\{+,\times,u_0,u_1\}$，其中$+$和$\times$是2-元函数符号，$u_0$和$u_1$是常元符号，则$\mathcal{Z}_r=(\mathbb{Z},+,\times,0,1)$是一个$\mathcal{L}_r$-结构。

(v) **序的语言** $\mathcal{L}_o=\{<\}$，其中$<$是2-元关系符号，则$\mathcal{Z}_o=(\mathbb{Z},<)$是一个$\mathcal{L}_o$-结构。

(vi) **有序环的语言** $\mathcal{L}_{or}=\{<,+,\times,u_0,u_1\}$，其中$<$是2-元关系符号，$+$和$\times$是2-元函数符号,$u_0$和$u_1$是常元符号，则$\mathcal{Z}_r=(\mathbb{Z},<,+,\times,0,1)$是一个$\mathcal{L}_{or}$-结构。

给定语言$\mathcal{L}$，一个$\mathcal{L}$-结构就是对$\mathcal{L}$的一个解释。反之，对语言$\mathcal{L}$的解释的同时也给出了一个$\mathcal{L}$-结构。在上面的例1.1.1中，我们观察到$\mathcal{L}_G$的结构$\mathcal{Z}=(\mathbb{Z},+,0)$和$\mathcal{R}=(\mathbb{R}^{>0},\times,1)$之间有这样一个关系：令$\exp:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto \mathrm{e}^x$是$\mathbb{Z}$到$\mathbb{R}$的指数函数，其中e是自然对数，则exp是$\mathbb{Z}$到$\mathbb{R}$的群同态。从形式上来看$\mathrm{e}^0=1$且$\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^y$，即exp在“形式上”保持了$\mathcal{L}_G$在$\mathbb{Z}$和$\mathbb{R}$中的解释。我们把这个概念抽象出来，就得到了以下定义：

定义 1.1.3 设$\mathcal{M}=\{M,\{Z^{\mathcal{M}}\}_{Z\in\mathcal{L}}\}$和$\mathcal{N}=\{M,\{Z^{\mathcal{N}}\}_{Z\in\mathcal{L}}\}$是两个$\mathcal{L}$-结构。如果一个映射$h:M\longrightarrow N$满足：

(i) 对每个常元符号$c\in\mathcal{L}$，都有$h(c^{\mathcal{M}})=c^{\mathcal{N}}$;

(ii) 对每个n-元的函数符号$f\in\mathcal{L}$，以及$(a_1,\cdots,a_n)\in M^n$，都有$h(f^{\mathcal{M}}(a_1,\cdots,a_n))=f^{\mathcal{N}}(h(a_1),\cdots,h(a_n))$;

(iii) 对每个n-元的关系符号$R\in\mathcal{L}$，以及$(a_1,\cdots,a_n)\in M^n$，都有$(a_1,\cdots,a_n)\in R^{\mathcal{M}}$蕴涵着$(h(a_1),\cdots,h(a_n))\in R^{\mathcal{N}}$,

则称h是（$\mathcal{M}$到$\mathcal{N}$的）**同态**。我们用$h:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$来表示$h$是$\mathcal{M}$到$\mathcal{N}$的同态。

如果$h:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$是单射且对每个$n$-元的关系符号$R\in\mathcal{L}$，以及$(a_1,\cdots,a_n)\in M^n$，都有$(a_1,\cdots,a_n)\in R^{\mathcal{M}}$当且仅当

$$(h(a_1),\cdots,h(a_n))\in R^{\mathcal{N}},$$

则称h是（$\mathcal{M}$到$\mathcal{N}$ 的）**嵌入**。

如果嵌入$h:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$还是满射，则称$h$是（$\mathcal{M}$到$\mathcal{N}$的）**同构**。如果存在$\mathcal{M}$到$\mathcal{N}$的同构，则称$\mathcal{M}$与$\mathcal{N}$**同构**，记作$\mathcal{M}\cong\mathcal{N}$。

定义 1.1.4 设$\mathcal{M}$是一个$\mathcal{L}$-结构。如果σ是$\mathcal{M}$到$\mathcal{M}$的同构，则称σ是$\mathcal{M}$的**自同构**。令

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{M})=\{\sigma|\ \sigma\text{是}\mathcal{M}\text{到}\mathcal{M}\text{的同构}\},$$

则$\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$在映射复合下是一个群，我们称$\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$是$\mathcal{M}$的**自同构群**。

定义 1.1.5 设$\mathcal{M}=(M,\{Z^{\mathcal{M}}\}_{Z\in\mathcal{L}})$和$\mathcal{N}=(N,\{Z^{\mathcal{N}}\}_{Z\in\mathcal{L}})$是两个$\mathcal{L}$-结构。如果$M\subseteq N$且包含映射$i:M\longrightarrow N$ $(x\mapsto x)$ 是$\mathcal{M}$到$\mathcal{N}$的嵌入，则称$\mathcal{M}$是$\mathcal{N}$的**$\mathcal{L}$-子结构**（简称子结构），称$\mathcal{N}$是$\mathcal{M}$的**膨胀**，记作$\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}$或$\mathcal{N}\supseteq\mathcal{M}$。

注 1.1.2

(i) 设$\mathcal{N}=(N,\{Z^{\mathcal{N}}\}_{Z\in\mathcal{L}})$是一个$\mathcal{L}$-结构，且$A\subseteq N$。如果$A$满足：

 (a) 对每个常元符号$c\in\mathcal{L}$，有$c^{\mathcal{N}}\in A$;

 (b) 对每个n-元函数符号$f\in\mathcal{L}$，有$f^{\mathcal{N}}(A^n)\subseteq A$,

 则$(A,\{Z^{\mathcal{N}}\restriction A\}_{Z\in\mathcal{L}})$ 是$\mathcal{N}$的子结构，其中$Z^{\mathcal{N}}\restriction A$是$Z^{\mathcal{N}}$在$A$上的限制。此时，我们也简称$A$为$\mathcal{N}$的**子结构**。

(ii) 特别地，如果$\mathcal{L}$中没有常元符号和函数符号，则N的每个非空子集B都可以被自然地解释为$\mathcal{N}$的子结构$(B,\{Z^{\mathcal{N}}\restriction B\}_{Z\in\mathcal{L}})$。

(iii) 在没有歧义的情况下，我们直接用结构的论域代指结构本身。比如，设$\mathcal{N}=(N,\{Z^{\mathcal{N}}\}_{Z\in\mathcal{L}})$是一个$\mathcal{L}$-结构，我们也会说$N$是一个$\mathcal{L}$-结构。

(iv) 设$\mathcal{M}=\{M,\{Z^{\mathcal{M}}\}_{Z\in\mathcal{L}}\}$和$\mathcal{N}=\{N,\{Z^{\mathcal{N}}\}_{Z\in\mathcal{L}}\}$是两个$\mathcal{L}$-结构。如果$h$是$M$到$N$的嵌入，则$h(M)$是$\mathcal{N}$的子结构。

定义 1.1.6 设I是一个集合。$\{\mathcal{M}_i=\{M_i,\{Z^{\mathcal{M}_i}\}_{Z\in\mathcal{L}}\}|i\in I\}$是一族$\mathcal{L}$-结构。如果它们满足：

(i) $\bigcap_{i\in I}M_i\neq\emptyset$;

(ii) 对每个常元符号$c\in\mathcal{L}$，对任意的$i,j\in I$，有$c^{\mathcal{M}_i}=c^{\mathcal{M}_j}$;

(iii) 对每个n-元函数符号$f\in\mathcal{L}$，如果$(a_1,\cdots,a_n)\in\bigcap_{i\in I}{M_i}^n$，对任意的$i,j\in I$，有$f^{\mathcal{M}_i}(a_1,\cdots,a_n)=f^{\mathcal{M}_j}(a_1,\cdots,a_n)$,

则定义$\{\mathcal{M}_i|i\in I\}$的交为一个以$\bigcap_{i\in I}M_i$为论域的$\mathcal{L}$-结构，记作$\bigcap_{i\in I}\mathcal{M}_i$。其解释为：对每个常元符号$c\in\mathcal{L}$，$c^{\bigcap_{i\in I}\mathcal{M}_i}=c^{\mathcal{M}_i}$；对每个$n$-元函数符号$f\in\mathcal{L}$，如果$(a_1,\cdots,a_n)\in\bigcap_{i\in I}M_i^n$，则有$f^{\bigcap_{i\in I}\mathcal{M}_i}(a_1,\cdots,a_n)=f^{\mathcal{M}_i}(a_1,\cdots,a_n)$；对每个$n$-元关系符号$R\in\mathcal{L}$，$R^{\bigcap_{i\in I}\mathcal{M}_i}=\bigcap_{i\in I}R^{\mathcal{M}_i}$。

练习 1.1.1 设I是一个集合，$\{\mathcal{M}_i|\ i\in I\}$是$\mathcal{L}$-结构$\mathcal{N}$的一族子结构。证明$\bigcap_{i\in I}\mathcal{M}_i$ 也是$\mathcal{N}$的子结构。

练习 1.1.2 设$\mathcal{M}$是论域为M的$\mathcal{L}$-结构。证明对任意的$S\subseteq M$, 存在一个论域包含S的$\mathcal{M}$的子结构$\mathcal{A}$, 使得对任意论域包含S的$\mathcal{M}$的结构$\mathcal{B}$, 都有$\mathcal{A}$是$\mathcal{B}$的子结构。（我们称$\mathcal{A}$是由S**生成的子结构**，记作$\langle S\rangle^{\mathcal{M}}$。如果存在$M$的有限子集$S_0$，使得$\mathcal{A}=\langle S_0\rangle^{\mathcal{M}}$，则称$\mathcal{A}$是**有限生成的**。）

练习 1.1.3 设论域为M的$\mathcal{L}$-结构$\mathcal{M}$是由子集$S\subseteq M$ 生成的。证明对任意的$\mathcal{L}$-结构$\mathcal{N}$,同态$h:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$仅由$h\restriction S$确定。即两个同态$h_1:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$和$h_2:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$, 如果对任意的$s\in S$都有$h_1(s)=h_2(s)$，则$h_1=h_2$。

定义 1.1.7 设$\mathcal{L}$是一个语言。如果$\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$，则称$\mathcal{L}_0$是$\mathcal{L}$的子语言。显然，对任意的$\mathcal{L}$-结构$\mathcal{M}$，如果我们忘掉$\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$中的符号在$\mathcal{M}$中的解释，即令$\mathcal{M} \upharpoonright \mathcal{L}_0 = \{M, \{Z^{\mathcal{M}}\}_{Z \in \mathcal{L}_0}\}$，则$\mathcal{M} \upharpoonright \mathcal{L}_0$是一个$\mathcal{L}_0$-结构。我们称$\mathcal{M} \upharpoonright \mathcal{L}_0$是$\mathcal{M}$在$\mathcal{L}_0$上的**约化**，而$\mathcal{M}$ 是$\mathcal{M} \upharpoonright \mathcal{L}_0$在$\mathcal{L}$上的**扩张**。

扩张是模型论中常用的一种方法，下面是一些典型的例子。

例 1.1.2 设$\mathcal{M}$是一个$\mathcal{L}$-结构，论域是M。

(i) 设$R_0 \subseteq M^n$是M上的一个n-元关系。我们引入一个新的关系符号R，令$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{R\}$，同时将$R$解释为$R_0$，则

$$\mathcal{M}' = (M, \{Z^{\mathcal{M}}\}_{Z \in L} \cup \{R_0\})$$

是一个$\mathcal{L}'$-结构，它是$\mathcal{M}$ 的扩张。我们一般记作$\mathcal{M}' = (\mathcal{M}, R_0)$。

(ii) 设$\{a_1, \cdots, a_m\} \subseteq M$，并引入新的常元符号$c_1, \cdots, c_m$，令$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_1, \cdots, c_m\}$，同时将$c_i$解释为$a_i$，$i = 1, \cdots, m$，则

$$\mathcal{M}' = (M, \{Z^{\mathcal{M}}\}_{Z \in L} \cup \{a_1, \cdots, a_m\})$$

是一个$\mathcal{L}'$-结构，是$\mathcal{M}$的扩张。一般记作$\mathcal{M}' = (\mathcal{M}, a_1, \cdots, a_m)$。

(iii) 设$B \subseteq M$。我们将B的每个元素看成一个新的常元符号。令$\mathcal{L}_B = \mathcal{L} \cup B$，同时将每个$b \in B$在$M$中解释为$b$自己，则

$$\mathcal{M}_B = (M, \{Z^{\mathcal{M}}\}_{Z \in L} \cup \{b \mid b \in B\})$$

是一个$\mathcal{L}_B$-结构，它是$\mathcal{M}$的扩张。我们一般记作$\mathcal{M}_B = (\mathcal{M}, b)_{b \in B}$。

注 1.1.3 设$\mathcal{M}$是一个论域为M的$\mathcal{L}$-结构且$B \subseteq M$，则

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_B) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}) \mid \sigma(b) = b, \quad \forall b \in B\},$$

即$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_B)$是所有保持$B$中各点不变的$\mathcal{M}$的自同构。它是$\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$的一个子群。我们也常把$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_B)$记作$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}/B)$。

1.2 一阶公式和语义

1.2.1 一阶逻辑的项与公式

在上一节中，我们主要讲了一阶逻辑中的非逻辑符号的解释。在本节中，我们主要讲一阶逻辑中逻辑符号的解释。和命题逻辑类似，为了解释这些逻辑符号，我们需要引入一阶公式的概念。在此之前，我们先要引入**项**的定义。

定义 1.2.1 给定语言$\mathcal{L}$，则$\mathcal{L}$-项可以根据如下规则递归定义：

(i) 每个常元符号$c \in \mathcal{L}$都是$\mathcal{L}$-项；

(ii) 每个变元符号x都是$\mathcal{L}$-项；

(iii) 如果$f \in \mathcal{L}$是n-元函数符号且$t_1, \cdots, t_n$是$\mathcal{L}$-项，则$f(t_1, \cdots, t_n)$是$\mathcal{L}$-项；

(iv) 每个$\mathcal{L}$-项都是有限次应用(i)，(ii)，(iii)得到的。

注 1.2.1 (i) 如果我们把函数符号理解为函数的形式化，那么项就是复合函数的形式化表达式。

(ii) 我们称定义1.2.1的条件(iv)为极小性条件。由此可以得出，每个项t的表达式中仅含有有限多个变元符号。我们用$t(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n})$表示$t$的表达式中的变元均来自集合$\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}\}$，即$t(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n})$表示$t$中出现的全体变元是$\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}\}$的子集。

定义 1.2.2 设$\mathcal{M}$是一个$\mathcal{L}$-结构，$t = t(\bar{x})$是一个$\mathcal{L}$-项，其中$\bar{x} = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_m})$。我们可以在$\mathcal{M}$中把$t$解释为一个函数$t^{\mathcal{M}} : M^m \to M$：对于任意一点$\bar{a} = (a_{i_1}, \cdots, a_{i_m}) \in M^m$，把$t^{\mathcal{M}}(\bar{a})$递归地定义为：

(i) 如果t是常元符号c，则$t^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = c^{\mathcal{M}}$是一个常函数；

(ii) 如果t是变元符号x_{i_j}，则$t^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = a_{i_j}$是一个坐标函数；

(iii) 如果t是$f(t_1, \cdots, t_{n_f})$，其中$t_1, \cdots, t_{n_f}$是$\mathcal{L}$-项且f是函数符号，则

$$t^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = f^{\mathcal{M}}(t_1{}^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \cdots, t_{n_f}{}^{\mathcal{M}}(\bar{a}))。$$

在定义1.2.2中，$t^{\mathcal{M}}$的定义仅仅与$\mathcal{M}$有关，不依赖于变元集的选取。容易观察到，如果x_{i_j}没有出现在t中，则当其他坐标分量不变时，a_{i_j}的改变不会引起函数$t^{\mathcal{M}}$的值的改变。

从现在开始，我们假设$\{x_i|\ i \in \lambda\}$是语言$\mathcal{L}$的变元符号的集合，其中λ是一个无穷基数。

定义 1.2.3 设$\mathcal{M}$是一个论域为M的$\mathcal{L}$-结构。我们称映射$\mu : \{x_i|\ i \in \lambda\} \longrightarrow M$是一个$\mathcal{M}$-**指派**。我们也用$M$中的序列$< \mu(x_i) >_{i\in\lambda}$来表示$\mu$。

定义 1.2.4 设$\mathcal{M}$是一个论域为M的$\mathcal{L}$-结构，$\bar{b} =< b_i >_{i\in\lambda}$是一个$\mathcal{M}$-指派。我们按照如下方式递归地定义$\mathcal{L}$-项$t$在指派$\bar{b}$下的值$t^{\mathcal{M}}[\bar{b}]$:

(i) 若$i \in \lambda$且$t = x_i$，则$t^{\mathcal{M}}[\bar{b}] = b_i$；

(ii) 若c是$\mathcal{L}$中的常元且$t = c$，则$t^{\mathcal{M}}[\bar{b}] = c^{\mathcal{M}}$；

(iii) 若f是$\mathcal{L}$中的n-元函数符号，$t_1, \cdots, t_n$是$\mathcal{L}$-项，且$t = f(t_1, \cdots, t_n)$，则

$$t^{\mathcal{M}}[\bar{b}] = f^{\mathcal{M}}(t_1{}^{\mathcal{M}}[\bar{b}], \cdots, t_n{}^{\mathcal{M}}[\bar{b}])。$$

这里需要注意到定义1.2.2中的记号$t^{\mathcal{M}}$是一个函数，定义1.2.4中的记号$t^{\mathcal{M}}[\bar{b}]$是M中的一个元素。这两种记号容易引起歧义。通过下面的练习，我们将看到，这种有歧义的记号是合理的。

练习 1.2.1 设$\mathcal{L}$-项$t = t(x_{m_1}, \cdots, x_{m_n})$，$\mathcal{M}$是一个$\mathcal{L}$-结构，则对任意的$\mathcal{M}$-指派$\bar{b}$，都有$t^{\mathcal{M}}[\bar{b}] = t^{\mathcal{M}}(b_{m_1}, \cdots, b_{m_n})$。特别地，$t^{\mathcal{M}}[\bar{b}]$ 的值仅与$b_{m_1}, \cdots, b_{m_n}$相关。

设$\mathcal{L}$是一个语言，$\mathcal{M}$和$\mathcal{N}$是两个$\mathcal{L}$-结构。由于$\mathcal{M}$-指派就是由变元符号集合到M的映射，故而对任意的$\mathcal{L}$-同态$h : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$，通过映射复合，$h$将$\mathcal{M}$-指派变为一个$\mathcal{N}$-指派。设$\bar{b} =< b_i >_{i\in\lambda}$ 是一个$\mathcal{M}$-指派，则$h(\bar{b}) =< h(b_i) >_{i\in\lambda}$是一个$\mathcal{N}$-指派。

引理 1.2.1　设$\mathcal{L}$是一个语言，$\mathcal{M}$和$\mathcal{N}$是两个$\mathcal{L}$-结构。若$h : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$是一个同态，且$t$是一个项，则对任意的$\mathcal{M}$-指派$\bar{b}$，都有$h(t^{\mathcal{M}}[\bar{b}]) = t^{\mathcal{N}}[h(\bar{b})]$。

证明: 对t的长度（或形式）归纳证明。 ■

引理 1.2.2　设$\mathcal{L}$是一个语言，$\mathcal{M}$是一个论域为M的$\mathcal{L}$-结构且$S \subseteq M$，则$\langle S\rangle^{\mathcal{M}}$的论域是

$$\bar{S} = \{t^{\mathcal{M}}(b_1, \cdots, b_n)|\ t(x_{m_1}, \cdots, x_{m_n})\text{是}\mathcal{L}\text{-项，}b_1, \cdots, b_n \in S\}\text{。}$$

证明: 首先证明

$$\bar{S} = \{t^{\mathcal{M}}(b_1, \cdots, b_n)|\ t(x_{m_1}, \cdots, x_{m_n})\text{是}\mathcal{L}\text{-项，}b_1, \cdots, b_n \in S\}$$

是子结构。设c是$\mathcal{L}$中的常元符号，则$c^{\mathcal{M}} \in \bar{S}$。设$f$是$\mathcal{L}$中的$m$-元函数符号，且$d_1, \cdots, d_m \in \bar{S}$，则存在项$t_1(x_{k_1}, \cdots, x_{k_n}), \cdots, t_m(x_{k_1}, \cdots, x_{k_n})$及$b_1, \cdots, b_n \in S$，使得$d_i = t_i{}^{\mathcal{M}}(b_1, \cdots, b_n)$，其中$1 \leqslant i \leqslant m$。故

$$f^{\mathcal{M}}(d_1, \cdots, d_m) = \big(f(t_1, \cdots, t_m)\big)^{\mathcal{M}}(b_1, \cdots, b_n) \in \bar{S}\text{。}$$

根据注1.1.2，只须证明$\bar{S}$包含所有常元符号的解释，并且关于每个函数符号f的解释$f^{\mathcal{M}}$封闭，故而$\bar{S}$是$\mathcal{M}$的一个子结构的论域。

其次要证明：对$\mathcal{M}$的任意子结构$\mathcal{M}_0$，如果其论域$M_0 \supseteq S$，则$M_0 \supseteq \bar{S}$。容易看出，这个证明与第一段的论证类似。 ■

推论 1.2.1　设$\mathcal{L}$是一个语言，$\mathcal{M}$是一个论域为M的$\mathcal{L}$-结构且$S \subseteq M$，则

$$|\langle S\rangle^{\mathcal{M}}| \leqslant \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}\text{。}$$