文都教育®

高等数学

Higher Mathematics

大学同步辅导教程

（与同济七版教材配套）

文都考研数学命题研究组◎策划
汤家凤◎编著

上册

中国原子能出版社

文都教育®

www.wendu.com

考研数学图书系列

《考研数学复习大全》（数学一至三）

《全国硕士研究生招生考试高等数学辅导讲义》

《全国硕士研究生招生考试线性代数辅导讲义》

《全国硕士研究生入学统一考试概率论与数理统计辅导讲义》

《考研数学接力题典 1800》（数学一至三）

《考研数学 15 年真题解析与方法指导》（数学一至三）

《考研数学绝对考场最后八套题》（数学一至三）

《考研数学必备手册》

大学同步辅导系列

《高等数学大学同步辅导教程．上册》（与同济大学数学系编・七版配套）

《高等数学大学同步辅导教程．下册》（与同济大学数学系编・七版配套）

文都教育官方微博 http://e.weibo.com/wendujiaoyu

答疑 QQ 群 550604883

汤家凤一直播 ID 186288809

汤家凤 QQ 340496518

防伪验证　文都图书微信公众号　汤家凤微信公众号　汤家凤微博

上架指导：教辅 / 考研

ISBN 978-7-5022-8521-0

9 787502 285210

定价：58.00 元

高等数学 Higher Mathematics

大学同步辅导教程

（与同济七版教材配套）

文都考研数学命题研究组◎策划
汤家凤◎编著

上册

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学大学同步辅导教程. 上册 / 汤家凤编著.
—北京：中国原子能出版社，2017. 10
ISBN 978-7-5022-8521-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①汤… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 237809 号

高等数学大学同步辅导教程. 上册

出版发行	中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100048)
责任编辑	张 梅
特约编辑	邱晓春 何妍妍
印 刷	北京银祥印刷有限公司
经 销	全国新华书店
开 本	787mm × 1092mm 1/16
印 张	25 **字 数** 625 千字
版 次	2017 年 10 月第 1 版 2017 年 10 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5022-8521-0 **定 价** 58.00 元

网址：http://www.aep.com.cn **E-mail：atomep123@126.com**
发行电话：010-68452845

郑重声明

买正版图书　听精品课程

文都考研数学独家师资汤家凤老师编著的《高等数学大学同步辅导教程.上册》《高等数学大学同步辅导教程.下册》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大读者欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印汤家凤老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使读者蒙受金钱与精力的损失,而且误导读者。

为了保障读者、作者及出版社等多方的利益,文都教育特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育将严厉追究其法律责任;

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的读者,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷;

4. 全国各地举报电话:010-88820419,13488713672

电子邮箱:tousu@ wendu. com

为方便读者使用汤家凤老师系列正版图书,特提供网上增值服务,读者登录文都教育在线(www. wendu. com)可听取汤家凤老师的精品课程。

中国原子能出版社

世纪文都教育科技集团股份有限公司

授权律师:北京市安诺律师事务所

刘　岩

2017 年 10 月

前 言

高等数学是大学工程类及经济管理类专业重要的基础课程，工科很多后继课程需要扎实的高等数学知识，同时高等数学也是全国硕士研究生招生考试数学课程考试重要的考查课程（总分 150 分中，高等数学在数学一、数学三试卷中占 82 分，在数学二的试卷中占 116 分），所以对工科类及经管类专业来说，高等数学是大学数学最重要的课程。

本书为作者根据二十几年大学数学的教学及从事研究生招生考试数学课程指导的经验，编写的与同济大学数学系主编的《高等数学》（第七版）配套的适合大学一年级学生及研究生招生考试复习基础阶段使用的《高等数学大学同步辅导教程》，该套丛书分上册、下册，且均包含三套期末考试试卷。

本教程每章由如下四部分构成：

一、本节知识扫描：梳理该节的基本概念、基本性质、基本原理及公式，从而建立起该节的理论体系。

二、基本题型解析：在建立起该节理论体系的同时，为了能够更好地掌握该节的原理、性质、公式，以及掌握该节理论的应用，总结出基本的题型及解决这些基本题型所使用的基本方法。

三、同济七版教材习题解答：给出同济七版《高等数学》相应部分的习题及详细解答，并且根据作者多年教学经验的总结，对很多习题给出很多新颖的解题方法。

四、本章同步测试：高等数学任何一章都有一套完整的知识理论体系，为了能够全面掌握该章理论，根据该章的特点，在每章的最后给出一套本章同步测试试卷，以达到全面考查该章的基础知识、重要理论及方法的目的。

另外为了便于大学一年级的学生应对期末考试，作者根据上册和下册的知识点，尤其是重要的知识点，设置了三套适合期末考试特点的要求较高的期末试卷，通过这三套试卷的练习可以更好地掌握高等数学知识，让学生期末考出更好的成绩。

为使大家更扎实有效地学习高等数学，根据教学进度，每学期作者会定期安排重点章节的直播及期末考试前直播（直播平台：一直播，ID：186288809）。

汤家凤

2017 年 10 月于南京

目 录

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

本节知识扫描

1. 函数 —— 设 $D \subset \mathbf{R}$，若对任意的 $x \in D$，按照某种对应关系总有唯一确定的 y 与 x 对应，称 y 为 x 的函数，记为 $y=f(x)$，其中 D 为函数的定义域，$R_f=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称函数的值域.

【注解】

常见的特殊函数有：

(1) 狄利克雷函数 $y=D(x)=\begin{cases}1, x \in \mathbf{Q},\\ 0, x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}.\end{cases}$

(2) 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(3) 取整函数 $y=[x]=\begin{cases}m, & x=m,\\ m-1, & m-1 \leqslant x<m,\end{cases} \quad (m \in \mathbf{Z}).$

$[x]$ 的值等于 x 左侧的整数值，如：$[\sqrt{2}]=1, [-0.6]=-1, [6]=6$ 等.

取整函数的常见性质有：

$[x] \leqslant x$；

$[x+k]=[x]+k$（其中 k 为整数）.

2. 复合函数 —— 设函数 $y=f(u)(u \in D_1)$，函数 $u=\varphi(x)(x \in D_2)$，且 $\varphi(D_2) \subset D_1$，则函数 $y=f[\varphi(x)](x \in D_2)$ 称为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数.

3. 反函数 —— 设 $y=f(x)(x \in D)$ 为严格单调的函数，值域为 $R=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$，对任意 $y \in \mathbf{R}$，按照对应关系有唯一确定的 x 与 y 对应，从而确定 x 为 y 的函数，记为 $x=f^{-1}(y)(y \in \mathbf{R})$，称 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

4. 函数的初等特性

(1) 单调性

设 $y=f(x)(x \in D)$，若对任意的 $x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，称 $y=f(x)$ 在 D 上单调递增（若 $f(x_1)<f(x_2)$，称 $y=f(x)$ 在 D 上严格单调递增）；

若对任意的 $x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$，有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，称 $y=f(x)$ 在 D 上单调递减(若 $f(x_1) > f(x_2)$，称 $y=f(x)$ 在 D 上严格单调递减).

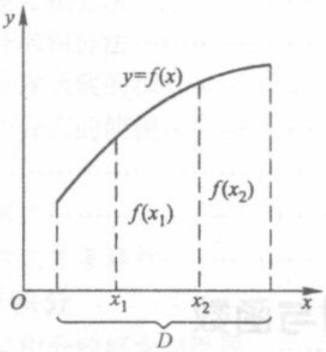

图 1－1

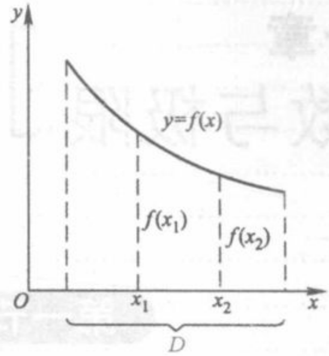

图 1－2

(2) 有界性

设 $y=f(x)(x \in D)$，若存在 $M>0$，对一切的 $x \in D$，有 $|f(x)| \leqslant M$，称 $f(x)$ 在 D 上有界.

若存在 M_1，对一切的 $x \in D$，有 $f(x) \geqslant M_1$，称 $f(x)$ 在 D 上有下界；若存在 M_2，对一切的 $x \in D$，有 $f(x) \leqslant M_2$，称 $f(x)$ 在 D 上有上界.

注意：$f(x)$ 在 D 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界.

(3) 奇偶性

设函数 $y=f(x)(x \in D)$，其中 D 关于原点对称，

若对任意的 $x \in D$，有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 在 D 上为偶函数；

若对任意的 $x \in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 在 D 上为奇函数.

注意：偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于坐标原点对称.

(4) 周期性

设 $y=f(x)(x \in D)$，若存在常数 $T>0$，对任意的 $x \in D$，有 $(x \pm T) \in D$，且

$$f(x+T)=f(x),$$

称 $f(x)$ 为周期函数，其中 T 称为 $f(x)$ 的周期.

5. 基本初等函数

(1) 幂函数

$y=x^a$(a 为常数)称为幂函数.

(2) 指数函数

$y=a^x$(a 为常数且 $a>0, a \neq 1$)称为指数函数.

(3) 对数函数

$y=\log_a x$(a 为常数且 $a>0, a \neq 1$)称为对数函数.

(4) 三角函数

$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$ 统称为三角函数.

(5) 反三角函数

$y=\arcsin x(-1 \leqslant x \leqslant 1)$，

$y=\arccos x(-1 \leqslant x \leqslant 1)$，

$y=\arctan x(-\infty < x < +\infty)$，

$y = \operatorname{arccot} x \ (-\infty < x < +\infty)$,

统称为反三角函数.

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

6. 初等函数 —— 由常数及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

基本题型解析

题型一:求函数的表达式

【例 1】 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$,求 $f\{f[f(x)]\}$.

【解】 $f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{1+f(x)}=\dfrac{\dfrac{x}{1+x}}{1+\dfrac{x}{1+x}}=\dfrac{x}{1+2x}$,

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{f[f(x)]}{1+f[f(x)]}=\frac{\dfrac{x}{1+2x}}{1+\dfrac{x}{1+2x}}=\frac{x}{1+3x}.$$

【例 2】 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求 $f(x)$.

【解】 由 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$ 得 $f(x)=x^2-2$.

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, x<1, \\ x, x\geqslant 1, \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} x+2, x<0, \\ x^2-1, x\geqslant 0, \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

【解】 $f[g(x)]=\begin{cases} e^{g(x)}, g(x)<1, \\ g(x), g(x)\geqslant 1, \end{cases}$

由 $\begin{cases} x+2<1, \\ x<0 \end{cases}$ 得 $x<-1$,由 $\begin{cases} x^2-1<1, \\ x\geqslant 0 \end{cases}$ 得 $0\leqslant x<\sqrt{2}$;

由 $\begin{cases} x+2\geqslant 1, \\ x<0 \end{cases}$ 得 $-1\leqslant x<0$,由 $\begin{cases} x^2-1\geqslant 1, \\ x\geqslant 0 \end{cases}$ 得 $x\geqslant\sqrt{2}$,

$$\text{故 } f[g(x)]=\begin{cases} e^{x+2}, & x<-1, \\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}, \\ x+2, & -1\leqslant x<0, \\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}. \end{cases}$$

题型二:函数的定义域

【例 1】 求函数 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$ 的定义域.

【解】 由$\begin{cases}-1\leqslant \dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1,\\ 2x-x^2\geqslant 0,\\ 2x-1>0,\\ 2x-1\neq 1\end{cases}$ 得$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0\leqslant x\leqslant 2,\\ x>\dfrac{1}{2},\\ x\neq 1.\end{cases}$

故函数的定义域为$(\frac{1}{2},1)\cup(1,2]$.

题型三：函数的初等特性

【例 1】 判断函数 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

【解】 函数 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,

因为 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数.

【例 2】 证明:任何一个定义域关于原点对称的函数都可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

【证明】 设 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

令 $F(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$,$G(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$,则 $f(x)=F(x)+G(x)$,

因为 $F(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=F(x)$,所以 $F(x)$ 为偶函数;

因为 $G(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-G(x)$,所以 $G(x)$ 为奇函数,

故 $f(x)$ 可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

题型四：求函数的反函数

【例 1】 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数.

【解】 由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 得 $x+\sqrt{x^2+1}=e^y$,

因为$(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})=1$,所以 $-x+\sqrt{x^2+1}=e^{-y}$,

两式相减得函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数为

$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

【例 2】 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}$ 的反函数.

【解】 函数的定义域为 $x>-\dfrac{1}{2}$,

由 $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}$ 得$\sqrt{2x+1}=\dfrac{1+y}{1-y}$,解得 $x=\dfrac{2y}{(1-y)^2}$,

故原函数的反函数为 $y=\dfrac{2x}{(1-x)^2}$.

同济七版教材 | 习题解答

习题 1－1 映射与函数

1.求下列函数的自然定义域：

(1)$y=\sqrt{3x+2}$； (2)$y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3)$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$； (4)$y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5)$y=\sin\sqrt{x}$； (6)$y=\tan(x+1)$；

(7)$y=\arcsin(x-3)$； (8)$y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9)$y=\ln(x+1)$； (10)$y=e^{\frac{1}{x}}$.

【解】 (1)$3x+2\geqslant 0$ 得 $x\geqslant -\dfrac{2}{3}$，则函数 $y=\sqrt{3x+2}$ 的定义域为$\left\{x \mid x\geqslant -\dfrac{2}{3}\right\}$.

(2) 由 $1-x^2\neq 0$ 得 $x\neq\pm 1$，函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ 的定义域为$\{x \mid x\in\mathbf{R},x\neq\pm 1\}$.

(3) 由$\begin{cases}x\neq 0\\1-x^2\geqslant 0\end{cases}$得 $0<|x|\leqslant 1$，函数 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) 由 $4-x^2>0$ 得 $-2<x<2$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域为$(-2,2)$.

(5) 显然函数 $y=\sin\sqrt{x}$ 的定义域为$[0,+\infty)$.

(6) 由 $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 得 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1(k\in\mathbf{Z})$，函数 $y=\tan(x+1)$ 的定义域为$\left\{x \mid x\in\mathbf{R},x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1(k\in\mathbf{Z})\right\}$.

(7) 由 $-1\leqslant x-3\leqslant 1$ 得 $2\leqslant x\leqslant 4$，函数 $y=\arcsin(x-3)$ 的定义域为$[2,4]$.

(8) 由$\begin{cases}3-x\geqslant 0\\x\neq 0\end{cases}$得 $x\leqslant 3$ 且 $x\neq 0$，函数 $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) 显然函数 $y=\ln(x+1)$ 的定义域为$(-1,+\infty)$.

(10) 显然函数 $y=e^{\frac{1}{x}}$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2.下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1)$f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$；

(2)$f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3},g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4)$f(x)=1,g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

【解】 (1) 函数 $f(x)=\lg x^2$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而函数 $g(x)=2\lg x$ 的

定义域为$(0,+\infty)$,因为定义域不同,所以两个函数不同.

(2)$f(x)=x,g(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$因为两个函数对应法则不同,所以两个函数不同.

(3) 两个函数相同,因为定义域相同,且对应法则相同.

(4) 因为两个函数定义域不同,所以两个函数不同.

3. 设$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$求$\varphi(\frac{\pi}{6}),\varphi(\frac{\pi}{4}),\varphi(-\frac{\pi}{4}),\varphi(-2)$,并作出函数$y=\varphi(x)$的图形.

【解】 $\varphi(\frac{\pi}{6})=|\sin\frac{\pi}{6}|=\frac{1}{2},\varphi(\frac{\pi}{4})=|\sin\frac{\pi}{4}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi(-\frac{\pi}{4})=|\sin(-\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2},\varphi(-2)=0.$

函数$y=\varphi(x)$的图形如图 1-3 所示.

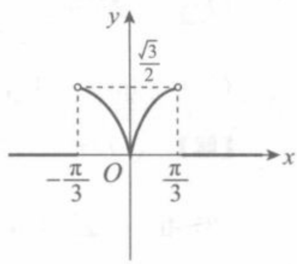

图 1-3

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1)$y=\dfrac{x}{1-x},(-\infty,1)$;

(2)$y=x+\ln x,(0,+\infty)$.

【证明】 (1)$y=\dfrac{x}{1-x}=-1+\dfrac{1}{1-x}$,

任取$x_1,x_2\in(-\infty,1)$且$x_1<x_2$,

因为$f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{1-x_2}-\dfrac{1}{1-x_1}=\dfrac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0$,

所以$f(x_1)<f(x_2)$,即$y=\dfrac{x}{1-x}$在$(-\infty,1)$内单调增加.

(2) 任取$x_1,x_2\in(0,+\infty)$且$x_1<x_2$,

因为$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\ln x_2-x_1-\ln x_1=x_2-x_1+\ln\dfrac{x_2}{x_1}>0$,

所以$f(x_1)<f(x_2)$,即$y=x+\ln x$在$(0,+\infty)$内单调增加.

5. 设$f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数,若$f(x)$在$(0,l)$内单调增加,证明$f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

【证明】 任取$x_1,x_2\in(-l,0)$且$x_1<x_2$,则$0<-x_2<-x_1<l$,

因为$f(x)$在$(0,l)$内单调增加,所以$f(-x_2)<f(-x_1)$,

又因为$f(x)$为奇函数,所以$-f(x_2)<-f(x_1)$,从而$f(x_2)>f(x_1)$,

故$f(x)$在$(-l,0)$内单调增加.

6. 设下面所考虑的函数都是定义在区间$(-l,l)$上的,证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

【证明】 (1) 设$F(x)=f(x)+g(x)$,

若 $f(x)$，$g(x)$ 都是偶函数，则

$F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x)$，即 $F(x)$ 为偶函数；

若 $f(x)$，$g(x)$ 都是奇函数，则

$F(-x)=f(-x)+g(-x)=-[f(x)+g(x)]=-F(x)$，即 $F(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $F(x)=f(x)g(x)$，

若 $f(x)$，$g(x)$ 为偶函数，则

$F(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=F(x)$，即 $F(x)$ 为偶函数；

若 $f(x)$，$g(x)$ 为奇函数，则

$F(-x)=f(-x)g(-x)=[-f(x)][-g(x)]=F(x)$，即 $F(x)$ 为偶函数；

若 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，则

$F(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-F(x)$，即 $F(x)$ 为奇函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　　(2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\sin x-\cos x+1$；　　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

【解】 (1) 令 $f(x)=x^2(1-x^2)$，因为函数的定义域关于原点对称，且 $f(-x)=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数；

(2) 令 $f(x)=3x^2-x^3$，因为 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，故 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数；

(3) 令 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，因为函数的定义域关于原点对称，且 $f(-x)=f(x)$，

故 $f(x)$ 为偶函数；

(4) 令 $f(x)=x(x-1)(x+1)$，因为函数的定义域关于原点对称，且

$f(-x)=-x(-x-1)(-x+1)=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$，

故 $f(x)$ 为奇函数；

(5) 令 $f(x)=\sin x-\cos x+1$，因为 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，

故 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数；

(6) 令 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$，因为函数的定义域关于原点对称，且 $f(-x)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

8. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；　　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin\pi x$；　　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$.

【解】

(1) $y=\cos(x-2)$ 是以 2π 为周期的周期函数；

(2) $y=\cos 4x$ 是以 $\dfrac{\pi}{2}$ 为周期的周期函数；

(3) $y=1+\sin\pi x$ 是以 2 为周期的周期函数；

(4)$y=x\cos x$ 不是周期函数;

(5)$y=\sin^2 x$ 是以 π 为周期的周期函数.

9.求下列函数的反函数:

(1)$y=\sqrt[3]{x+1}$;　　(2)$y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(3)$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$;　　(4)$y=2\sin 3x(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6})$;

(5)$y=1+\ln(x+2)$;　　(6)$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

【解】 (1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 得 $x=y^3-1$,则反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$,则反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 得 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$,则反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y=2\sin 3x$ 得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$,则反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$ 得 $x=e^{y-1}-2$,则反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(6) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 得 $\dfrac{1}{y}=1+\dfrac{1}{2^x}$,从而得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$,则反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

10.设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

【证明】 设 $f(x)$ 在 X 上有界,即存在 $M>0$,使得当 $x\in X$ 时,$|f(x)|\leqslant M$,从而 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$,即 $f(x)$ 既有下界 $-M$,又有上界 M.

设 $f(x)$ 在 X 既有下界 M_1,又有下界 M_2,即当 $x\in X$ 时,$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$,

取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$,当 $x\in X$ 时,$|f(x)|\leqslant M$,即 $f(x)$ 在 X 上有界.

11.在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1)$y=u^2,u=\sin x,x_1=\dfrac{\pi}{6},x_2=\dfrac{\pi}{3}$;

(2)$y=\sin u,u=2x,x_1=\dfrac{\pi}{8},x_2=\dfrac{\pi}{4}$;

(3)$y=\sqrt{u},u=1+x^2,x_1=1,x_2=2$;

(4)$y=e^u,u=x^2,x_1=0,x_2=1$;

(5)$y=u^2,u=e^x,x_1=1,x_2=-1$.

【解】 (1)$y=\sin^2 x,y_1=\sin^2\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{4},y_2=\sin^2\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{4}$.

(2)$y=\sin 2x,y_1=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},y_2=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$.

(3)$y=\sqrt{1+x^2},y_1=\sqrt{2},y_2=\sqrt{5}$.

(4)$y=e^{x^2},y_1=1,y_2=e$.

(5)$y=e^{2x},y_1=e^2,y_2=e^{-2}$.

12. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；

(2) $f(\sin x)$；

(3) $f(x+a)(a>0)$；

(4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

【解】 (1) 由 $0\leqslant x^2\leqslant 1$ 得函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

(2) 由 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$ 得函数 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2n\pi,(2n+1)\pi](n\in\mathbf{Z})$.

(3) 由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 得函数 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a,1-a]$.

(4) 由 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$ 得

当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $[a,1-a]$；

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $\varnothing$.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\0, & |x|=1,\\-1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

【解】 $f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, x<0,\\0, x=0,\\-1, x>0.\end{cases}$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1,\\1, & |x|=1,\\e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

$f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的图形如图 1－4 所示.

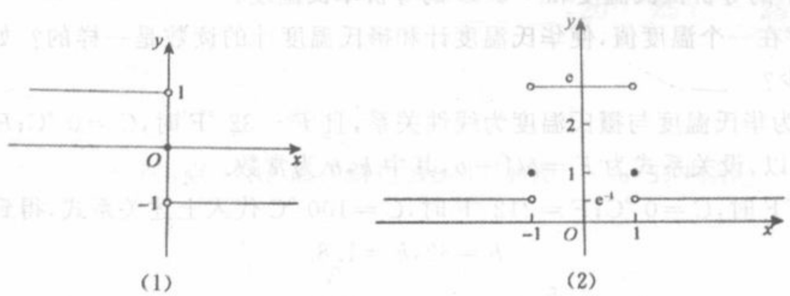

图 1－4

14. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40°$(图 1—5). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域.

【解】 如图所示，$AB=CD$，$S_0=\dfrac{1}{2}h(BC+AD)$，得 $h=CD\sin\varphi$，

设 $BC=b$，$AD=b+2CD\cos\varphi$，从而有 $S_0=h(b+h\cot\varphi)$.

又 $L=AB+BC+CD=b+2CD=b+\dfrac{2h}{\sin\varphi}$，