高等学校应用型本科教材

高等数学

（第2版）

主编　侯方勇

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

高等学校应用型本科教材

高等数学

（第2版）

主　编　侯方勇
副主编　吴博峰　郑　薇

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/侯方勇主编.—2版.—西安:西安交通大学出版社,2019.6
ISBN 978-7-5693-1200-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①侯… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第112270号

书　　名　高等数学(第2版)
主　　编　侯方勇
责任编辑　曹　昳

出版发行　西安交通大学出版社
　　　　　(西安市兴庆南路1号　邮政编码710048)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
　　　　　(029)82668315(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　西安明瑞印务有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张　21.25　字数　500千字
版次印次　2019年6月第2版　2019年6月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5693-1200-3
定　　价　55.00元

读者购书、书店添货,如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:28790738@qq.com

版权所有　侵权必究

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

本书编写组

主　编　侯方勇

副主编　吴博峰　郑　薇

编　者　韦娜娜　闫　璐　董　慧　赵华杰　李　妮

前言

本书是我们在多年教学实践的基础上结合应用型本科学校实际需求情况编写而成的，编者对本书的结构、内容、教学手段等进行了详细而科学的规划。本书的特色主要体现在以下几个方面：

1. 试图对现行微积分课程作较大幅度的改革与探索，将微积分课程视为两个相对独立完备的体系：微分学体系与积分学体系，即先全面系统地学习微分学（一元、多元微分学），然后再全面系统地学习积分学（定积分、重积分、曲线与曲面积分），使学生对微分学和积分学都能有更加全局而完整的认识。

2.本书严格按照经济管理类教学大纲要求编写，力求理论体系完整，同时合理把握内容的难易程度，使得本教材不仅适合通识教学中侧重计算和应用的教学需要，也兼顾到有考研意愿的学生的学习需求。

在编写过程中，编者主要作了以下考虑：

1. 妥善处理好“一元”与“多元”相应概念、性质、方法的内在联系，把握其共性与差异性。在“糅合”一元与多元相应的内容时，注意到相应概念的思想本质是一致的，从而在基本理论和基本方法上也有着高度的相似性，同时，为了避免读者在学习过程中（尤其是在计算时）引起混淆，我们本着“概念融合，计算分离”的原则，将一元微（积）分与多元微（积）分的概念放在一起，便于读者学习时作比较，而将一元微（积）分与多元微（积）分的计算独立开来，分别介绍，避免混淆。这既是本书的最大特点，同时也是本书编写过程中最棘手的环节。

2. 为支撑多元微积分的内容，需要将空间解析几何、多元函数、极限理论与连续性等知识作为预备知识先行加以介绍。

3. 根据应用型本科学校的特点，本着“适度、够用”的原则，在保持微积分内容的系统性和完整性的前提下，本书适当降低了某些理论的难度，略去了稍长或有一定难度的定理证明。但对于“教学基本要求”中的基本概念、基本理论和基本方法部分则不吝篇幅，力求深入浅出地引入概念，完整仔细地介绍方法，引导学生将学习重点集中到掌握基本内容而不刻意追求难度与技巧的学习导向上来。

4. 着力引导应用型本科学生的“应用”意识，书中精选了一些在物理、经济、管理等方面应用的例题，以培养学生数学建模的思想；既注重高等数学有关内容的阐释，又注重展示这些内容在实际问题中的应用，这样可使本书同时兼备自然科

学和社会科学的知识背景。

在本书编写过程中，我们得到了西安财经大学行知学院和西北工业大学明德学院领导的大力支持；西安交通大学出版社为本书的出版给予了大力帮助。为体现本书内容的典型性，书中部分例题引自他人著作，在此一并表示衷心的感谢。由于我们水平有限，书中若有不尽如意的地方，敬请同行和广大读者批评指正。

编　者

2019 年 4 月 30 日

目　录

第 1 章　空间解析几何基础

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就，它通过点和坐标的对应关系，把数学研究的两个基本对象“数”和“形”统一了起来，使得人们既可以用代数方法解决几何问题，也可以用几何方法解决代数问题，从而达到真正的“数形结合”.

本章介绍空间解析几何的一些基本概念，包括空间直角坐标系、空间曲面、空间曲线、空间向量代数、空间平面与空间直线方程等，这些内容是学习多元函数微积分的重要基础.

1.1　空间直角坐标系与空间曲面

1.1.1　空间直角坐标系

在平面解析几何中，已经建立了平面直角坐标系，并通过平面直角坐标系把平面上的点和有序实数组（即点的坐标(x,y)）对应了起来.同样，为了把空间中的任一点与有序实数组对应起来，我们建立了**空间直角坐标系**.

在空间取一定点 O，作三条以 O 点为原点的两两互相垂直的数轴，依次称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），这三条轴具有相同的单位长度，它们的正向满足右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 的角度后指向 y 轴的正向时，竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向（图 1－1）.

图 1－1

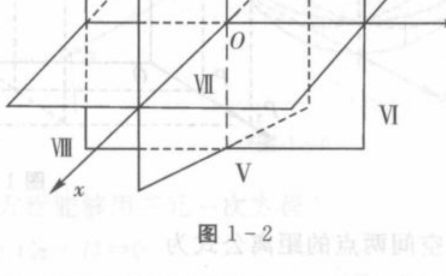

图 1－2

三个坐标轴中的每两条坐标轴可以确定一个平面，这样确定的三个平面统称为坐标平面.由 x 轴与 y 轴所确定的坐标平面称为 xOy 面，由 y 轴及 z 轴确定的坐标平面称为 yOz 平面，

由 z 轴及 x 轴所确定的坐标平面称为 xOz 平面.这三个坐标平面把空间分成 8 个部分,每一部分称为一个卦限,含 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的卦限称为第一卦限.在 xOy 面上方,从第一卦限开始,按逆时针方向依次确定的三个卦限分别称为第二、第三、第四卦限.在 xOy 面下方,第一卦限之下为第五卦限,从第五卦限开始按逆时针方向依次确定第六至第八卦限,这八个卦限分别用Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示(图 1-2).

设 M 是空间中任意一点,过点 M 作三个平面分别与三个坐标轴垂直,它们与三个坐标轴的交点依次记作 P、Q、R(图 1-3),这三个交点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次记为 x、y、z,则点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x,y,z;反过来,已知一个有序数组 x,y,z,可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P,在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q,在 z 轴上取坐标为 z 的点 R,然后通过 P、Q、R 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面,这三个垂直平面的交点 M 便是由有序数组 x,y,z 确定的唯一的点.

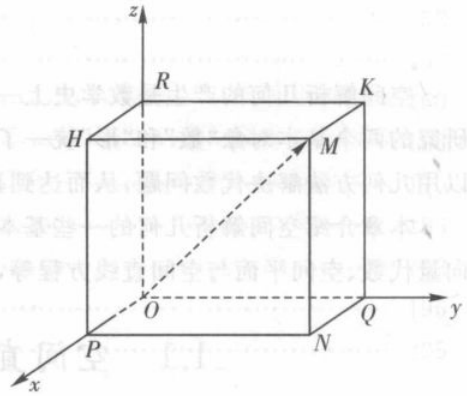

图 1-3

这样就建立了空间点 M 和有序数组 x,y,z 之间的一一对应关系,这组数 x,y,z 称为点 M 的坐标,分别称为 M 的 x 坐标、y 坐标和 z 坐标,记作 $M(x,y,z)$.

1.1.2 空间两点之间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中的两点,过 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三个坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体,如图 1-4 所示,由相应的三角形勾股定理易知

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2&=|M_1N|^2+|NM_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\end{aligned}$$

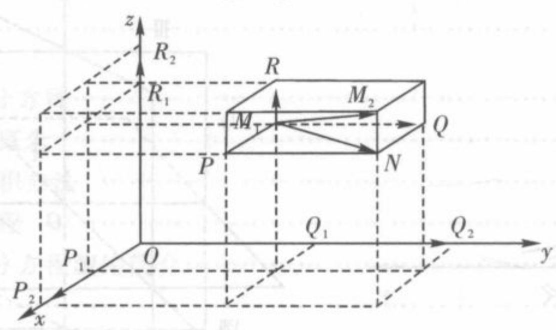

图 1-4

所以,空间两点的距离公式为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1-1-1}$$

特别地,点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例 1.1.1　求点 $M(x,y,z)$ 到 x 坐标轴的距离和到 xOy 坐标面的距离.

解　点 $M(x,y,z)$ 在 x 轴上的投影,记为 A 点,则 A 的坐标为 $(x,0,0)$,所以 $M(x,y,z)$ 到 x 轴的距离 d_1 为

$$d_1=|MA|=\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{y^2+z^2}$$

设 P 是点 M 在 xOy 面上的投影,则 P 的坐标为 $(x,y,0)$,所以 M 到 xOy 面的距离 d_2 为

$$d_2=|MP|=\sqrt{(x-x)^2+(y-y)^2+(z-0)^2}=|z|$$

1.1.3　曲面方程的一般概念

平面解析几何中把曲线看作平面上动点的几何轨迹,类似地,空间直角坐标系中的任何曲面都可以看作动点在空间的几何轨迹.在这种意义下,如果三元方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{1-1-2}$$

满足:(1)曲面 S 上的任何一点的坐标都满足方程(1-1-2);

(2)不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程(1-1-2).

则方程(1-1-2)称为曲面 S 的方程,而曲面 S 就称为方程(1-1-2)的图形.这就建立了空间曲面与曲面方程的一一对应关系,如图 1-5 所示.

建立了空间曲面与其方程的联系后,就可以通过方程研究来理解曲面的几何性质,与平面解析几何相类似,空间解析几何主要研究以下两个基本问题:

(1)已知曲面 S 上的点满足的几何条件,建立曲面 S 的方程;

(2)已知方程 $F(x,y,z)=0$,研究该方程对应曲面的几何形状.

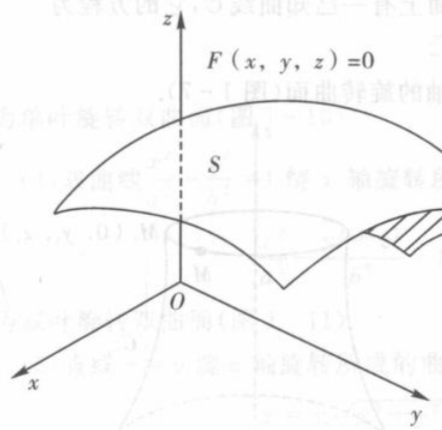

图 1-5

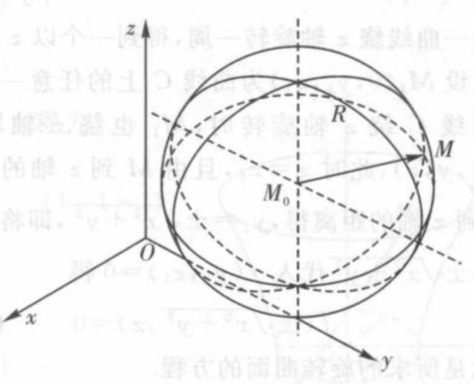

图 1-6

讨论平面方程及其应用.空间中任一平面方程能够用三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1-1-3}$$

来表示,反之亦然,其中 A、B、C 是不全为零的常数.方程(1-1-3)称为平面的一般方程.特别地,xOy 平面的方程是 $z=0$,同样 yOz 平面和 xOz 平面的方程是 $x=0$ 和 $y=0$.而 $x=a$、$y=$

b 和 $z=c$ 分别表示平行于坐标面 yOz、xOz、xOy 的平面.

下面再举个球面方程的例子:

已知球心在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,半径为 R.$M(x,y,z)$ 是球面上的任一点,由球面到球心的距离等于半径 R 可得

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \tag{1-1-4}$$

由于球面上的点的坐标都满足方程(1-1-4),不在球面上的点的坐标都不满足方程(1-1-4),故方程(1-1-4)就是所求的球面方程,如图 1-6 所示.

特别地,球心在坐标原点 $O(0,0,0)$,半径为 R 的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{1-1-5}$$

例 1.1.2　方程 $x^2+y^2+z^2+4x-4y-1=0$ 表示怎样的曲面?

解　通过配方,方程化为

$$(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=3^2$$

所以它表示球心在点 $(-2,2,0)$,半径为 3 的球面.

1.1.4 常见的空间曲面

以下介绍几种常见曲面的方程.

1.旋转曲面

一条平面曲线绕其所在平面上一定直线旋转一周所形成的曲面称为旋转曲面,旋转曲线和定直线分别称为旋转曲面的母线和旋转轴.

现在我们考虑以坐标轴为旋转轴的曲面.设 yOz 面上有一已知曲线 C,它的方程为

$$f(y,z)=0$$

把这一曲线绕 z 轴旋转一周,得到一个以 z 轴为旋转轴的旋转曲面(图 1-7).

设 $M_1(0,y_1,z_1)$ 为曲线 C 上的任意一点,那么,当曲线 C 绕 z 轴旋转时,M_1 也绕 z 轴转动到点 $M(x,y,z)$,此时 $z=z_1$,且由 M 到 z 轴的距离等于 M_1 到 z 轴的距离得,$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$,即将 $z_1=z$ 和 $y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入 $f(y_1,z_1)=0$ 得

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0 \tag{1-1-6}$$

这就是所求的旋转曲面的方程.

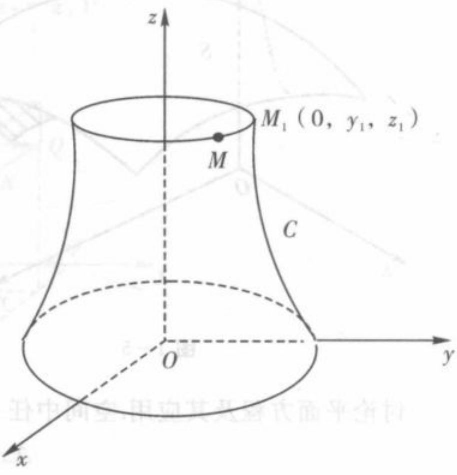

图 1-7

由此,yOz 面上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转,所得的旋转曲面方程就是将 $f(y,z)=0$ 中的 y 改写成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$,即 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

同理,曲线 $f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转,所得的旋转曲面方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0 \tag{1-1-7}$$

下面我们以平面上的二次曲线绕坐标轴旋转为例，分别求典型的旋转曲面方程，并画出它们的图形，这些曲面方程在今后的学习中常用到.

(1)抛物线 $z=y^2$ 绕 z 轴旋转所成的曲面方程是将 $z=y^2$ 中的 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，即

$$z=x^2+y^2 \tag{1-1-8}$$

此曲面称为旋转抛物面(图 1-8).

(2)椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕 z 轴旋转所成的曲面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{1-1-9}$$

此曲面称为旋转椭球面(图 1-9).

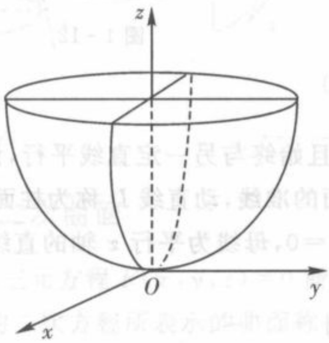

图 1-8

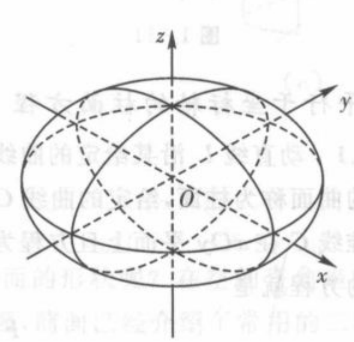

图 1-9

(3)双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕 z 轴旋转所成的曲面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{1-1-10}$$

称为单叶旋转双曲面(图 1-10).

(4)双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转所成的曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1 \tag{1-1-11}$$

称为双叶旋转双曲面(图 1-11).

(5)直线 $z=y$ 绕 z 轴旋转所成的曲面方程为

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

即

$$z^2=x^2+y^2 \tag{1-1-12}$$

此曲面称为旋转锥面或圆锥面(图 1-12)，其半顶角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

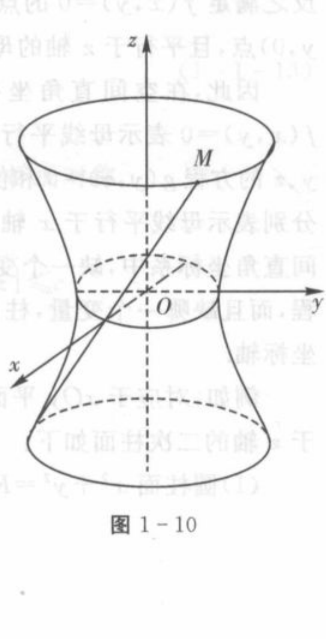

图 1-10

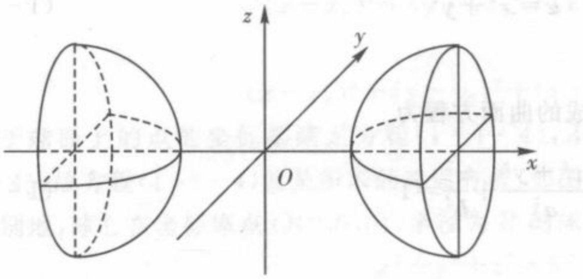

图 1-11

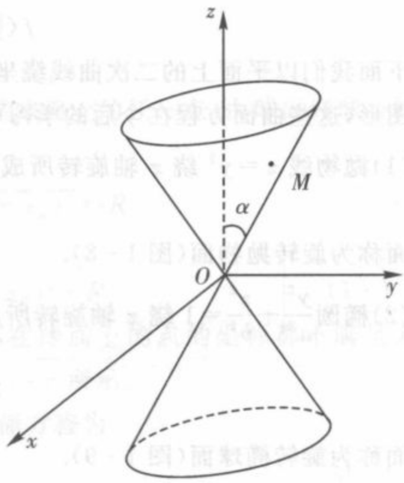

图 1-12

2.母线平行于坐标轴的柱面方程

定义 1.1.1 动直线 L 沿某给定的曲线 C 运动,且始终与另一定直线平行,该直线在平行移动中形成的曲面称为**柱面**,给定的曲线 C 称为柱面的**准线**,动直线 L 称为柱面的**母线**.

如果取准线 C 在 xOy 平面上且方程为 $F(x,y)=0$,母线为平行 z 轴的直线(图 1-13),则这个柱面的方程就是

$$F(x,y)=0$$

这是因为,对柱面上任一点 $M(x,y,z)$,过 M 作直线平行于 z 轴,这条直线就是过 M 的母线,直线上任何点的 x、y 坐标都相同,只有 z 坐标不同,它与 xOy 平面的交点 $N(x,y,0)$ 必在 C 上,N 的 x、y 坐标满足 $f(x,y)=0$,即 $M(x,y,z)$ 满足 $f(x,y)=0$;反之满足 $f(x,y)=0$ 的点 $M(x,y,z)$ 一定过 $N(x,y,0)$ 点,且平行于 z 轴的母线,即在柱面上.

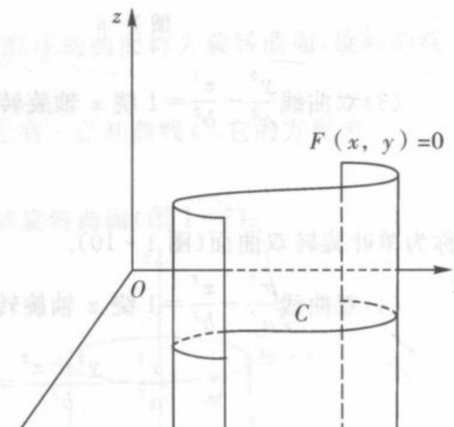

图 1-13

因此,在空间直角坐标系中仅含 x、y 的方程 $f(x,y)=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面.同理,仅含 y、z 的方程 $g(y,z)=0$ 和仅含 x、z 的方程 $h(x,z)=0$ 分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面.总之,在空间直角坐标系中,缺一个变量的方程一般都是柱面方程,而且缺哪一个变量,柱面的母线就平行于相应的坐标轴.

例如,对应于 xOy 平面上的二次曲线,在空间直角坐标系中,我们可得到相应的母线平行于 z 轴的二次柱面如下:

(1)圆柱面 $x^2+y^2=R^2$,准线是 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$;

(2)椭圆柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,准线是 xOy 面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,见图 1-14(a);

(3)双曲柱面$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,准线是 xOy 面上的双曲线$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,见图 1-14(b);

(4)抛物柱面 $y^2=2px(p>0)$,准线是 xOy 面上的抛物线 $y^2=2px(p>0)$,见图 1-14(c).

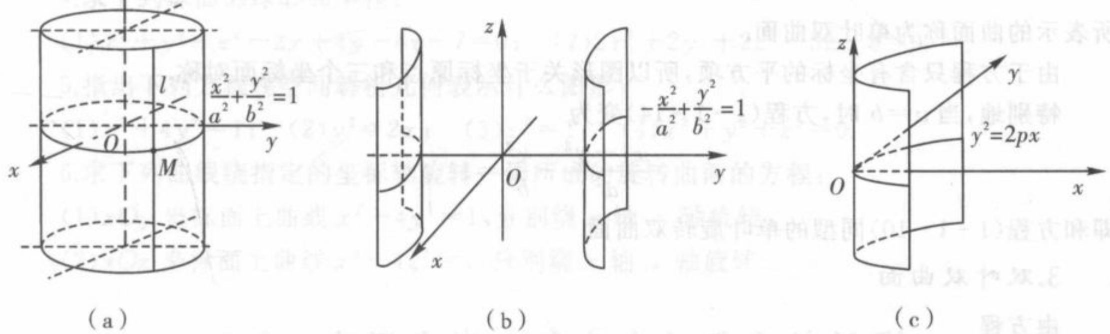

图 1-14

1.1.5　简单二次曲面

怎样了解三元方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面的形状呢?在空间直角坐标系中,含有变量 x、y、z 的二次方程所表示的曲面称作二次曲面,前面已经介绍了常用的二次曲面,下面再介绍在空间直角坐标系中其他的二次曲面,它们在工程中有一定的实际意义.

要了解曲面的形状可引入平面截痕法.与坐标平面平行的平面 $x=c$(或 $y=c$,或 $z=c$)与曲面 $F(x,y,z)=0$ 的交线称为截痕,对一系列截痕的几何形状加以综合分析,可以获得空间曲面的形状信息,这种方法称为**平面截痕法**.

1.椭球面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\quad(a、b、c\text{ 是正数})\tag{1-1-13}$$

所表示的曲面称为椭球面.

首先,方程只含坐标的平方项,所以图形关于坐标原点和三个坐标面对称.

由方程(1-1-13)可知,

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant1,\frac{y^2}{b^2}\leqslant1,\frac{z^2}{c^2}\leqslant1\quad\text{即}\quad|x|\leqslant a,|y|\leqslant b,|z|\leqslant c$$

这说明椭球面在平面 $x=\pm a$,$y=\pm b$,$z=\pm c$ 所围成的长方体内.

特别地:(1)当 $a=b$ 且 $a\neq c$ 时,方程(1-1-13)成为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

这是和方程(1-1-9)同型的旋转椭球面.

(2)当 $a=b=c$ 时， 椭球方程退化为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2.单叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a、b、c\ 为正数) \tag{1-1-14}$$

所表示的曲面称为单叶双曲面.

由于方程只含有坐标的平方项，所以图形关于坐标原点和三个坐标面对称.

特别地，当 $a=b$ 时，方程(1-1-14)变为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

即和方程(1-1-10)同型的单叶旋转双曲面.

3.双叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a、b、c\ 为正数) \tag{1-1-15}$$

所表示的曲面称为双叶双曲面.

4.椭圆抛物面

由方程

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=z \quad (p、q\ 同号) \tag{1-1-16}$$

所表示的曲面称为椭圆抛物面.

特别地，当 $p=q$ 时，方程(1-1-16)退化为

$$x^2+y^2=pz$$

这是和方程(1-1-8)同型的旋转抛物面.

5.双曲抛物面(马鞍面)

由方程

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=z \quad (p、q\ 同号) \tag{1-1-17}$$

所表示的曲面称为双曲抛物面.当 $p>0,q>0$ 时，形状如图 1-15 所示，也称为鞍形曲面.

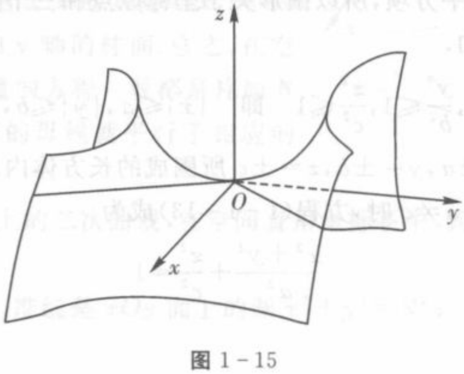

图 1-15

习　题 1-1

1.已知动点到点(2,0,0)的距离为到(-4,0,0)的距离的一半,求该动点的轨迹方程.

2.建立以点(1,3,-2)为球心,且通过坐标原点的球面方程.

3.曲面上任一点到点 $F_1(-a,0,0)$ 与 $F_2(a,0,0)$ 的距离的平方和等于 $4a^2$,求曲面方程.

4.求下列球面的球心和半径:

(1)$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-7=0$;　(2)$2x^2+2y^2+2z^2-5z-8=0$.

5.指出下列方程在空间解析几何表示什么图形:

(1)$x^2+4y^2=1$;　(2)$y^2=2x$;　(3)$x^2=1$;　(4)$x^2+y^2+z^2=0$.

6.求下列曲线绕指定的坐标轴旋转一周所成的旋转曲面的方程:

(1)xOy 坐标面上曲线 $x^2+4y^2=1$,分别绕 x 轴、y 轴旋转;

(2)xOz 坐标面上曲线 $x^2-4z^2=1$,分别绕 x 轴、z 轴旋转.

1.2　空间曲线及其在坐标面上的投影

考虑到在后续课程,如积分学的应用中求平面图形的面积、平面曲线的弧长等,需要应用极坐标与参数方程,而一些高中教材忽略了对极坐标系与参数方程的讲授,本节先介绍极坐标系与参数方程的基本知识.

1.2.1　平面曲线极坐标

1.极坐标

极坐标系是平面上的点与有序实数组的一种对应关系.在平面上取一定点 O 称为**极点**,从 O 点出发引一条射线 Ox 称为**极轴**,再取定一长度单位,通常规定角度取逆时针方向为正,这样,平面上任一点 P 的位置就可以用线段 OP 的长度 ρ 以及从 Ox 到 OP 的角度 θ 来确定,有序数对 (ρ,θ) 就称为 P 点的极坐标,记为 $P(\rho,\theta)$,称 ρ 为 P 点的**极半径或极径**,θ 为 P 点的**极角**,O 点为**极坐标原点**.

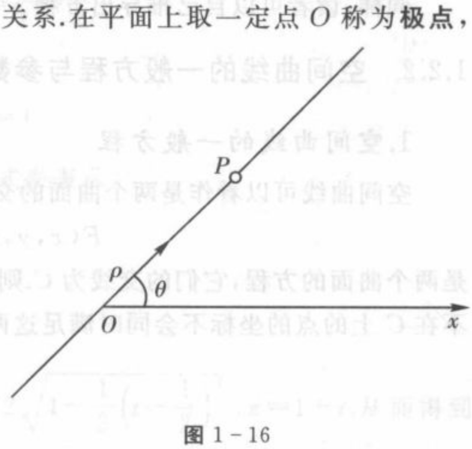

图 1-16

极坐标系与直角坐标系是既不相同又有联系的坐标系,现在我们来建立这两种坐标系的关系,见图 1-16.极坐标系的极点与直角坐标系的坐标原点同为 O 点,极轴作为 x 轴,设 P 点的直角坐标为 (x,y),极半径 $\rho=|OP|$,于是极坐标转换成直角坐标系的公式为

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}\tag{1-2-1}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com