



启蒙数学文化译丛
丛书主编 汪宇

Mathematics:
Queen and Servant of Science

E. T. Bell

〔美〕E. T. 贝尔 著
李永学 译

数 学
科学的女王和仆人

本书用通俗生动的语言阐释纯数学和应用数学的本质与特征，厘清了数学与科学之间的关系，是领会数学灵魂、理解数学思维的经典佳作。



华东师范大学出版社

启蒙数学文化译丛



丛书主编 汪宇

Mathematics

Queen and Servant of Science

E. T. Bell

数 学

科学的女王和仆人

[美] E.T. 贝尔 著 李永学 译



E. T. Bell.



华东师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学：科学的女王和仆人 / (美) E.T. 贝尔著；李永学译. —上海：华东师范大学出版社，2019
ISBN 978-7-5675-8830-1

I. ①数… II. ①E… ②李… III. ①数学—普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 026662 号

启蒙数学文化译丛系启蒙编译所旗下品牌
本书版权、文本、宣传等事宜，请联系：qmbys@qq.com

数学：科学的女王和仆人

作者 (美) E. T. 贝尔
译者 李永学
策划编辑 王 焰
组稿编辑 龚海燕
项目编辑 王国红
特约审读 周 俊

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路3663号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市 (邮购) 电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网 店 http://hdsdcb.tmall.com

印刷者 山东鸿君杰文化发展有限公司
开 本 890 × 1240 32开
印 张 15.5
字 数 358千字
版 次 2020年1月第一版
印 次 2020年1月第一次
书 号 ISBN 978-7-5675-8830-1
定 价 94.00元

出 版 人 王 焰

(如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)

致读者

v

想要直接阅读正文的读者可以略去这份前言，直达第一章。但我觉得，有些人或许想知道，这本书中可能会有哪些内容，又不会有哪些内容。

这本书彻底重写了两本数学通俗读物，而且对原有内容进行了大量增补。两本书之一是1931年的《科学的女王》，它本是为“百年进展系列丛书”写的，而这一丛书又是1933年在芝加哥举办的百年进步展的一部分。另一本则是第一本书的续集，1937年出版的《科学的女仆》。有人希望我分别改写这两部书，我则对这两本书进行了大幅度的改写，而且将两本书并为一本。

书中内容纯数学和应用数学大约各占一半。这两者是密不可分的。

书中各章不需要连续阅读，而且，除非你对某章的内容有兴趣，你也不需要从头到尾读完。你不妨取你之所需，而无须阅读其他部分。如果有些内容第一眼看上去似乎过分艰难或者不吸引人（这是有可能的），你可以跳过这部分；然后，如果你对它仍有兴趣，可以回头再读。正如数学家J. 勒朗·达朗贝尔(1717—1783)所建议的那样，你可以“继续下去，信心终将来临”。

如果你想要追踪某个贯穿多个章节的主题，那么请注意，方括号中的小数为你提供了可供参考的章节和部分。这一标记为你提供了参照条目，避免了不恰当的或令人困惑的详细索引。例如，[3.4]指的是第三章第四节。这一方法主要是由数学家与逻辑学家 G. 皮亚诺(1858—1932)在 19 世纪 90 年代发明的，如今在学术写作中得到广泛应用。

vi 一件令人高兴的事情是，原先那两本书有一大批非数学家读者，如律师、医生、工程师、商人、作家等。所能记得的初等数学让他们对于此后的发展有足够的好奇心，并有兴趣在不对数学的庞大实体进行精细解剖的情况下探索其精神实质。一件更为可喜的事情是，除了在学校中必须学习的数学以外，大批年轻学生(无论男女)愿意一睹数学的更多风采。如果现在这本书能有类似的吸引力，我将深切感谢我的读者。

我将要叙述的内容，是对从漫长岁月积累下来的庞大素材中撷取的题材的说明。我相信，它至少会告诉大家，数学是一门生机勃勃的学科，它不但还在继续发展，而且，它对于理解一些科学和技术是不可或缺的。我同样相信，它对于科学哲学中的某些更为深刻的部分也能起到提示作用。

我从科学中选取的例证主要来自于物理学与天文学，但并非全然如此，其原因无他，只是因为这样便不会让我的描述离题过远。除了职业数学家之外，很少有人能够理解数学思维方式的深邃与广阔。在这样一个概述的严格框架内，我只能简要勾勒出几个例子，看看那些大师级人物是如何把数学的预见性洞察力导向科学的。H. R. 赫兹(1857—1894)在 1888 年第一次用实验证明了

无线电波的存在,正如他曾经评论过的那样:“看起来,我们所使用的数学工具比我们更为聪明,它们能够在不受我们的意愿支配的情况下,独立完成自己的进化。”

空间的限制妨碍了大量数学预测取得令人震惊的胜利,这就造成了这样的现象,即对于人们已经接受而且显然会长期有效的贡献,尽管有些数学思想已经做出了足够详细的解释,但它们还是无法成为人类可靠知识的一部分。我在[20.1—20.4]中描述了数学内部的持续冲突,对于数学来说,这种冲突所带来的威胁都还一直存在。

本书所能提供的服务十分有限,请不要对此抱有过高的期望。vii
我无意以我的简略描述取代任何主题的纯数学或应用数学教科书或者科学论文。我的目标要低得多。我相信,正如 R. 笛卡尔(1596—1650)在他二十三岁那年做了一个梦之后所做的那样,一些喜爱数学的学生可能会问自己:“我该走哪条人生道路?”在此之后,笛卡尔奋勇向前,发明了解析几何,这是整个人类历史上最伟大的数学成就之一。我同样相信,那些从本书的阐述中得到所求的业余数学爱好者,将从中感觉到足够的现代数学精神,从而愿意继续深造,学到比我在书中描述的更多的东西。

我偶尔会引用读者或许从中学一年级便熟悉了的一些经典结果,那是因为我有着守旧的一面,它让我相信,过去的伟大数学家们并没有全部走入坟墓。最新的科学或者数学新奇发明可能会在一年或者更短的时间内失去其迷人之处与新鲜感。因为,就像任何一位女士会告诉你的那样,今天还是新款的软帽,明天就会,或者可能会过时。因此我还将继续相信,在我有生之年,哪怕设计最

为精密的计算机器，也不大可能取代像毕达哥拉斯、阿基米德、牛顿、莱布尼茨、高斯、罗巴切夫斯基、伽罗瓦、黎曼、麦克斯韦和爱因斯坦这一类人物的头脑。

目录后面有一份书中出现的数学家的名单，其中包括他们的名字首字母、生卒年和他们第一次出现在本书的章节。这有助于读者在继续阅读本书的同时注意到时间的进程。一旦某人已经出现过，除有特殊原因之外，他的姓名在书中再次出现时不再加入名字首字母和生卒年。有几位人士的生卒年不明。在编制这份名单时，我对我在书中引用的人名(204个)数目有些不安。所有这些名字都是我记忆中随意撷取的。如果有些热爱数学的读者没有在书中找到自己的偶像，我愿意提醒他们，我在本书中对于许多事例的选用几乎没有遵循什么规律，而且，要公平地对待数学的所有创造者，我应该放进差不多 8000 个名字。更何况，单单提及某人的名字并不能说明他有何种事迹，无论从质量或数量上说，这都不是一个指标。就从数量上来说，我可以举出几个例子。凯莱[1.1]的全部著作之多，足以填满大约 7500 张四开版的纸张；西尔维斯特[1.1]的全部著作大约 2800 张；阿贝尔[1.3]的著作是 950 张；柯西[5.3]的著作超过 11000 张。欧拉[1.3]的全部著作还在收集之中，但其总量肯定会超过这些人的数量。据估计，其全部著作大约需要 100 部四开本书，每部大约 500 页。还有几位此处未曾提及的数学家的贡献也同样令人瞩目。但我并不是要撰写一部数学史，因此我甚至无意提及所有主要数学家的名字，而正是由于这些数学家的贡献，数学才从它远自苏美尔、巴比伦、埃及和古希腊时

代的起源，一直发展到今天这个程度。然而，我所提及的这些数学家和科学家中的一些，例如詹姆斯·克拉克·麦克斯韦(1831—1879)，论及他们对于文明进程的影响，即使有些政治家或者军事家可以望其项背，其数目肯定也极为稀少。如果进行一次随机的抽样调查，有多少人会知道克拉克·麦克斯韦何许人也，或者他的工作的直接影响曾使大英帝国没有在二战早期便一败涂地呢？这一点，我留待各位读者在阅读本书时寻找答案。

在进入正文之前，我特向总部设在巴尔的摩的威廉姆斯与维尔金斯公司致谢，该公司出版了作为本书基础的那两本书，他们十分慷慨地允许我随意使用原书的内容。

E. T. 贝尔

人名表

- 阿贝尔, N. H. (1802—1829)/[1. 3]
- 亚当斯, J. C. (1819—1892)/[13. 4]
- 伊索(公元前 6 世纪)/[8. 9]
- 艾里, G. B. (1801—1892)/[13. 4]
- 亚历山大大帝(公元前 356—前 323)/[11. 1]
- 亚历山大, J. W. (1888—[1971])/[8. 7]
- 安提丰(公元前 5 世纪)/[14. 4]
- 阿波罗尼奥斯(公元前 260?—前 200?)/[13. 2]
- 阿基米德(公元前 287—前 212)/[1. 2]
- 阿斯奎斯, H. H. (1852—1928)/[13. 4]
- 巴贝奇, C. (1792—1871)/[11. 8]
- 巴切特, C. G. 德·梅齐里亚克(1581—1638)/[11. 4]
- 巴赫曼, P. (1837—1920)/[11. 3]
- 巴拿赫, S. (1892—1945)/[8. 9]
- 巴拉瓦利, H. (当代[1898—1973])/[10. 1]
- 巴罗, I. (1630—1677)/[19. 2]
- 贝克莱, G. (1685—1753)/[20. 1]
- 伯克霍夫, G. (1911—[1996])/[5. 5]
- 伯克霍夫, G. D. (1884—1944)/[6. 1]
- 玻尔, N. (1885—[1962])/[10. 3]
- 布尔, G. (1815—1864)/[5. 1]
- 布拉赫, T. (1546—1601)/[13. 2]
- 布劳威尔, L. E. J. (1881—[1966])/[1. 3]
- 布里松(公元前 5 世纪)/[14. 4]
- 布拉里-福蒂, C. (1861—1931)/[19. 4]
- 巴特勒, S. (1835—1902)/[1. 1]
- 康托尔, G. (1845—1918)/[11. 6]

- 康托尔, M. (1829—1920)/[14. 4] [11. 3]
- 卡罗尔, L. (C. L. 道奇森) (1832—1898)/[17. 1] [12. 1]
- 嘉当, E. (1869—[1951])/[9. 6]
- 柯西, A. L. (1789—1857)/[5. 3]
- 凯莱, A. (1821—1895)/[1. 1]
- 克利福德, W. K. (1845—1879)/[3. 2]
- 科尔, F. N. (1861—1926)/[11. 2]
- 哥伦布, C. (1451—1506)/[13. 4]
- 孔德, I. M. A. F. X. (1798—1857)/[12. 2]
- 哥白尼, N. (1473—1543)/[13. 2]
- 但丁(1265—1321)/[13. 2]
- 达尔文, C. R. (1809—1882)/[12. 1]
- 戴维斯, H. M. (当代)/[11. 8]
- 戴德金, J. W. R. (1831—1916)/[5. 5]
- 德·摩根, A. (1806—1871)/[2. 2]
- 德·摩根, W. F. (1839—1917)/[8. 5]
- 笛沙格, G. (1591—1661)/[7. 5]
- 笛卡尔, R. (1596—1650)/[6. 2]
- 迪克森, L. E. (1874—[1954])/[11. 1]
- 丢番图(公元1世纪)/[8. 9]
- 狄拉克, P. A. M. (1902—[1984])/[1. 1]
- 狄利克雷, J. P. G. L. (1805—1859)/[11. 3]
- 迪布里克, L. A. (当代[1901—1993])/[12. 1]
- 迪克, W. 冯(1856—1934)/[9. 4]
- 爱丁顿, A. S. (1882—1944)/[6. 3]
- 爱因斯坦, A. (1879—[1955])/[1. 1]
- 爱森斯坦, F. M. G. (1823—1852)/[11. 2]
- 欧几里得(公元前365—前275)/[1. 3]
- 欧多克索斯(公元前408—前355)/[13. 1]
- 欧拉, L. (1707—1783)/[1. 3]
- 埃弗雷特, E. (1794—1865)/[2. 2]
- 法拉第, M. (1791—1867)/[12. 1]
- 费马, P. S(·德)(1601—1665)/[11. 2]
- 弗拉姆斯蒂德, J. (1646—1719)/[13. 4]
- 傅里叶, J. B. J. (1768—1830)/[1. 1]
- 福勒, R. H. (1889—1944)/[11. 3]
- 弗雷歇, (R.) M. (1878—[1973])/[8. 9]
- 弗雷格, F. L. G. (1848—1925)/[19. 4]
- 伽利略(1564—1642)/[13. 2]
- 伽罗瓦, E. (1811—1832)/[4. 3]

- 高斯, C. F. (1777—1855)/[1. 1]
- 格尔丰德, A. (当代[1906—1968])/[11. 6]
- 根岑, G. (当代[1909—1945])/[20. 3]
- 乔治三世, 英国国王(1738—1820)/[13. 4]
- 吉布斯, J. W. (1839—1903)/[18. 3]
- 哥德尔, K. (1906—[1978])/[20. 3]
- 哥德巴赫, C. (1690—1764)/[11. 1]
- 戈特沙尔克, E. (当代)/[11. 4]
- 格拉斯曼, H. G. (1809—1877)/[8. 3]
- 格里高利, D. F. (1813—1844)/[2. 2]
- 格罗斯曼, M. (1878—1936)/[10. 3]
- 阿达马, J. (1865—[1963])/[11. 3]
- 哈雷, E. (1656—1742)/[13. 3]
- 哈密顿, W. R. (1805—1865)/[2. 2]
- 哈代, G. H. (1877—1947)/[8. 9]
- 黑格尔, G. W. F. (1770—1831)/[14. 1]
- 海森堡, W. (1901—[1976])/[1. 1]
- 赫拉克利特(公元前6世纪)/[14. 4]
- 埃尔米特, C. (1822—1901)/[1. 3]
- 赫歇尔, W. (1738—1822)/[13. 4]
- 赫兹, H. (1857—1894)/[12. 1]
- 希尔伯特, D. (1862—1943)/[2. 2]
- 喜帕恰斯(公元前2世纪)/[13. 4]
- 赫尔德, O. (1859—1937)/[9. 8]
- 雨果, V. (1802—1885)/[6. 3]
- 亨廷顿, E. V. (1874—[1952])/[3. 1]
- 赫胥黎, T. H. (1825—1895)/[12. 1]
- 因凯里, K. (当代[1908—1997])/[11. 5]
- 雅可比, C. G. J. (1804—1851)/[1. 1]
- 詹姆斯, W. (1842—1910)/[10. 3]
- 琼斯, J. H. (1877—1946)/[2. 2]
- 若尔当, C. (1838—1922)/[4. 3]
- 康德, I. (1724—1804)/[1. 4]
- 卡普费雷尔, H. (1888—[1984])/[11. 4]
- 卡斯纳, E. (1878—[1955])/[8. 8]
- 济慈, J. (1795—1821)/[13. 4]
- 开尔文勋爵(W. 汤姆逊)(1824—1907)/[7. 1]
- 开普勒, J. (1571—1630)/[13. 2]
- 基尔霍夫, G. R. (1824—1887)/[8. 7]
- 柯克曼, T. P. (1806—1895)/[8. 7]
- 克莱因, F. (1849—1929)/[2. 1]
- 克罗内克, L. (1823—1891)/[1. 3]
- 库默尔, E. E. (1810—1893)/[5. 8]
- 屈尔沙克, J. (1864—1933)/[8. 9]
- 库斯明, R. (当代[1891—1949])[11. 6]

拉法耶特, M 德(1757—1834)/[17. 4]
拉格朗日, J. L. (1736—1813)/[1. 1]
兰道, E. (1877—1938)/[11. 3]
拉普拉斯, P. S. (1749—1827)/[6. 3]
拉瓦锡, A. L. (1743—1794)/[6. 5]
勒贝格, H. (1875—1941)/[16. 8]
莱默, D. H. (1905—[1991])/[11. 2]
莱默, D. N. (1867—1938)/[11. 2]
莱默, E. (1906—[2007])/[11. 4]
莱布尼茨, G. W. (1646—1716)/[1. 3]
勒韦耶, U. J. J. (1811—1877)/[10. 3]
列维-奇维塔, T. (1873—1941)/
[10. 3]
李, M. S. (1842—1899)/[5. 8]
林德曼, C. L. F. (1852—1939)/
[11. 4]
刘维尔, J. (1809—1882)/[1. 1]
李特尔伍德, J. E. (1885—[1977])/
[11. 3]
罗巴切夫斯基, N. I. (1792—1856)/
[3. 3]
卢卡斯, E. (1842—1891)/[11. 2]
武卡谢维奇, J. (当代 [1878—
1956])/[5. 2]
马赫, E. (1838—1916)/[7. 6]
马可尼, G. (1874—1937)/[17. 4]

马克思, K. (1818—1883)/[14. 1]
莫佩尔蒂, P. L. M. 德(1698—1759)/
[16. 2]
麦克斯韦, J. 克拉克(即“麦克斯
韦”)(1831—1879)/[12. 1]
梅内克缪斯(公元前 375? —前
325?)/[13. 1]
门捷列夫, D. I. (1834—1907)/[12. 1]
门格尔, K. (1902—[1985])/[6. 1]
梅森, M. (1588—1648)/[11. 2]
迈克耳孙, A. A. (1852—1931)/[17. 4]
弥尔顿, J. (1608—1674)/[13. 2]
莫比乌斯, A. F. (1790—1868)/[7. 5]
摩尔, E. H. (1862—1932)/[12. 1]
莫雷, E. W. (19 世纪下半叶[1838—
1923])/[17. 4]
墨菲, R. (19 世纪上半叶[1806—
1843])/[16. 8]
诺依曼, J. 冯(1903—[1957])/[16. 8]
纽曼, J. R. (当代 [1907—1966])/
[19. 2]
牛顿, I. (1643—1727)/[1. 2]
尼文, I. M. (1915—[1999])/[11. 7]
奥卡姆的威廉(约 1285—1349)/
[12. 3]
奥尔, O. (1899—[1968])/[5. 5]

- 帕斯卡, B. (1623—1662)/[1. 3] [2. 1]
- 皮科克, G. (1791—1858)/[2. 2] 桑福德, V. (当代[1891—1971])/
- 皮尔斯, B. (1809—1880)/[2. 1] [11. 4]
- 皮尔斯, C. S. (1839—1914)/[5. 2] 叔本华, A. (1788—1860)/[12. 2]
- 潘兴, J. J. (1860—1948)/[17. 4] 塞尔伯格, A. (当代[1917—2007])/
- 皮莱, S. S. (当代[1901—1950])/ [11. 3]
- [11. 7] 斯利克特, C. S. (1864—1944)/[19. 3]
- 柏拉图(公元前 427—前 347)/ 史密斯, D. E. (1860—1944)/[14. 4]
- [13. 1] 史密斯, H. J. S. (1826—1883)/[11. 4]
- 普朗克, M. (1858—1947)/[19. 3] 斯图姆, J. C. F. (1803—1855)/[1. 1]
- 普吕克, J. (1801—1868)/[8. 3] 西罗, L. (1832—1918)/[9. 1]
- 庞加莱, H. (1854—1912)/[8. 5] 西尔维斯特, J. J. (1814—1897)/
- 波斯特, E. L. (1897—[1954])/[5. 2] [1. 1]
- 普桑, C. 德拉 V. (1866—[1962])/ 塔斯基, A. (当代[1902—1983])/
- [11. 3] [5. 2]
- 托勒密(公元 2 世纪)/[13. 2] 泰勒(公元前 6 世纪)/[2. 2]
- 毕达哥拉斯(公元前 580—前 500)/ 尤勒, H. S. (1872—[1956])/[11. 2]
- [1. 2] 范迪弗, H. S. (1882—[1973])/
- 瑞利勋爵(1842—1919)/[17. 1] [11. 4]
- 赖欣巴哈, H. (1891—[1953])/[5. 2] 维布伦, O. (1880—1960)/[6. 1]
- 里奇, M. M. G. (1835—1925)/[10. 3] 魏尔兰, P. (1844—1896)/[12. 2]
- 黎曼, G. F. B. (1826—1866)/[1. 1] 维诺格拉多夫, I. M. (当代[1891—
- 罗伯逊, H. P. (1903—[1961])/ 1983])/[11. 3]
- [10. 3] 沃尔泰拉, V. (1860—1940)/[16. 8]
- 罗瑟, J. B. (1907—[1989])/[11. 4] 华林, E. (1734—1798)/[11. 1]
- 罗素, B. (A. W.) (1872—[1970])/ 韦弗, W. (1894—[1978])/[11. 8]

6 数学：科学的女王和仆人

魏尔斯特拉斯, K. (1815—1897)/
[4. 3]

威尔斯, H. G. (1866—1946)/[7. 1]

外尔, H. (1885—[1955])/[3. 1]

怀特海, A. N. (1861—1947)/[5. 2]

惠特克, E. T. (1873—[1956])/[12. 3]

韦伊费列治, A. (当代 [1884—
1954])/[11. 4]

威尔逊, J. (1741—1793)/[11. 3]

华兹华斯, W. (1770—1850)/[13. 4]

杨, J. W. (1879—1932)/[6. 1]

策梅洛, E. (1871—[1953])/[11. 3]

齐普夫, G. K. (当代 [1902—1950])/
[16. 3]

策尔纳, J. K. F. (1834—1882)/[7. 6]

目 录

致读者	i
人名表	1
第一章 观 点	1
1.1 数学的对象	1
1.2 黄金时代	6
1.3 阿贝尔的建议	9
1.4 现代数学的灵魂	15
第二章 数学的真理	17
2.1 对数学的描述	17
2.2 公设法	21
第三章 突破界限	29
3.1 普通代数	29
3.2 改变规则	35
3.3 公设的来源	38
第四章 “一样,但又不一样”	45
4.1 普通代数的实现	45
4.2 有理数、实数、可数数、不可数数、离散性、连续性、复	

数、分析和函数	46
4.3 路途的终点	53
第五章 抽象的艺术	56
5.1 兴趣的改变	56
5.2 非普通代数	57
5.3 环	68
5.4 同态、同构、自同构	74
5.5 格或结构	77
5.6 子环、理想	82
5.7 子域、扩张	86
5.8 斜域、线性代数	91
第六章 由橡子长成的橡树	97
6.1 变 换	97
6.2 一个几何问题,又见变量	103
6.3 矩 阵	104
6.4 给联合国的一项建议	118
6.5 自然中的不变性	119
6.6 西尔维斯特的先见之明	121
第七章 形象思维	124
7.1 图 像	124
7.2 笛卡尔的发明	126
7.3 不必要的困难	129
7.4 三项建议	132
7.5 直觉进入了代数	136

7.6 代数进入了几何	140
第八章 旧的和新的里程碑	144
8.1 什么是几何?	144
8.2 进一步发展	147
8.3 多维空间	148
8.4 对偶性	150
8.5 非度量与度量	151
8.6 连通性	156
8.7 纽 结	157
8.8 一类拓扑学	159
8.9 又见抽象	161
第九章 群	167
9.1 乘法表	167
9.2 同构、同态	173
9.3 复形、陪集、正规子群	175
9.4 置换群	178
9.5 解 读	181
9.6 无限群	185
9.7 二十面体	187
9.8 伽罗瓦理论	189
第十章 度量的世界	191
10.1 从毕达哥拉斯到笛卡尔	191
10.2 从笛卡尔到黎曼	197
10.3 从黎曼到爱因斯坦	206